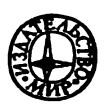
A. TIJONOV · A. SAMARSKY

ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) d\tau = \iint_\Sigma \{P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b \ldots = 0 \quad (a_{ij}=a_{ji}),$$


ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

А. Н. ТИХОНОВ,
А. А. САМАРСКИЙ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

A. N. TIJONOV,

A. A. SAMARSKY

ECUACIONES DE LA FISICA MATEMATICA

Traducido del ruso
por
Juán José Tolosa
Candidato a Doctor en
Ciencias Fisico-Matemáticas

EDITORIAL MIR

MOSCU

CDU 517.946 (075.8) = 60

На испанском языке

INDICE

CAPITULO III

CAPITULO IV
ECUACIONES DE TIPO ELIPTICO

CAPITULO V

PROPAGACION DE LAS ONDAS EN EL ESPACIO

CAPITULO VI

PROPAGACION DEL CALOR EN EL ESPACIO

CAPITULO VII

ECUACIONES DE TIPO ELIPTICO (CONTINUACION)

COMPLEMENTO I

METODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

COMPLEMENTO II

FUNCIONES ESPECIALES

DEL PROLOGO DE LA PRIMERA EDICION

El presente libro fue escrito como un manual para los estudiantes de Física.

El temario de la Física matemática está estrechamente ligado con el estudio de diferentes procesos físicos. Entre éstos podemos citar los fenómenos que se estudian en la Hidrodinámica, en la teoría de la elasticidad, en la electrodinámica, etc. Los problemas matemáticos que surgen aquí contienen muchos elementos comunes, y forman el objeto de la Física matemática.

El método de investigación que caracteriza a esta rama de la ciencia es matemático en su esencia. Sin embargo, el planteamiento de los problemas de la Física matemática tiene sus caracteres específicos, por estar estrechamente ligado con el estudio de los problemas físicos. Así, por ejemplo, las etapas inicial y final de un proceso poseen un carácter cualitativamente distinto, y exigen la aplicación de métodos matemáticos diferentes.

El temario de la Física matemática es extraordinariamente amplio. En el presente libro se estudian los problemas de la Física matemática que se reducen a ecuaciones en derivadas parciales.

Hemos querido someter la elección y la exposición del material a la característica de los procesos físicos típicos; en correspondencia con esto, la distribución del material corresponde a los tipos fundamentales de ecuaciones.

El estudio de cada tipo de ecuaciones comienza por los problemas físicos más sencillos que se reducen a ecuaciones del tipo considerado. Una atención especial se concede al planteamiento matemático de los problemas, a la exposición rigurosa de la resolución de los problemas más sencillos y a la interpretación física de los resultados obtenidos. Cada capítulo contiene ejercicios, cuyo fin fundamental es desarrollar hábitos técnicos de resolución

de problemas de esta disciplina. Ciertos ejercicios tienen de por sí interés físico. Al final de cada capítulo hay apéndices, en los cuales se dan ejemplos de aplicación de los métodos expuestos en el texto básico a la resolución de diferentes problemas de la física y la técnica, y también se citan ejemplos que se salen del marco de los problemas considerados en el texto básico. La elección de dichos ejemplos, sin lugar a dudas, puede variar grandemente.

El libro contiene sólo una parte del material que entra en el curso de los métodos de la Física matemática. En el libro no se han incluido la teoría de las ecuaciones integrales y los métodos variacionales.

A. Tijonov, A. Samarsky

CAPITULO I

CLASIFICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

Muchos problemas de la física matemática se reducen a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Las ecuaciones diferenciales de segundo orden se encuentran con particular frecuencia. En el presente capítulo estudiaremos la clasificación de estas ecuaciones.

§ 1. CLASIFICACION DE LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN

1. Ecuaciones diferenciales con dos variables independientes. Daremos las definiciones necesarias.

Se llama ecuación en derivadas parciales de segundo orden con dos variables independientes x e y a una relación entre la función incógnita $u(x, y)$ y sus derivadas parciales hasta de segundo orden inclusive[1]):

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Análogamente se escribe la ecuación para un número mayor de variables independientes.

La ecuación se llama *lineal con respecto a las derivadas de orden mayor*, si ésta tiene la forma

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \qquad (1)$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{22} son funciones de x e y.

---

[1]) Utilizaremos las siguientes notaciones para las derivadas:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \text{ etc.}$$

Si los coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{22} dependen no sólo de x e y, sino que son, al igual que F_1, funciones de x, y, u, u_x, u_y, entonces tal ecuación se denomina *cuasilineal*.

La ecuación se llama *lineal*, si es lineal tanto respecto a las derivadas de orden mayor u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, como a la función u y a sus derivadas primeras u_x, u_y:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0, \qquad (2)$$

siendo a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f funciones sólo de x e y. Si los coeficientes de la ecuación (2) no dependen de x e y, ésta es una ecuación lineal con coeficientes constantes. La ecuación se llama *homogénea*, si $f(x, y) = 0$.

Mediante la transformación de las variables

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

que admita transformación inversa, se obtiene una nueva ecuación, equivalente a la inicial. Es natural plantearse la pregunta: ¿cómo escoger ξ y η, de modo que la ecuación en estas variables tenga la forma más sencilla?

En este punto daremos la respuesta a dicha pregunta para las ecuaciones lineales con respecto a las derivadas de mayor grado del tipo (1), con dos variables independientes x e y:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Transformando las derivadas a las nuevas variables, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x,\\
u_y &= u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y,\\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx},\\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy},\\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Sustituyendo los valores de las derivadas dados por (3) en la ecuación (1), tendremos:

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \qquad (4)$$

donde

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y = a_{22}\xi_y^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,$$

y la función $\bar{F}$ no depende de las derivadas segundas. Obsérvese que si la ecuación inicial es lineal, o sea, si

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f,$$

entonces $\overline{F}$ tiene la forma

$$\overline{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u + \delta,$$

es decir, la ecuación permanece lineal[1]).

Escojamos las variables ξ y η de modo que el coeficiente $\overline{a}_{11}$ sea igual a cero. Consideremos la ecuación en derivadas parciales de primer orden

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0. \qquad (5)$$

Sea $z = \varphi(x, y)$ alguna solución particular de dicha ecuación. Si hacemos $\xi = \varphi(x, y)$, el coeficiente $\overline{a}_{11}$, evidentemente, será igual a cero. De este modo, el problema citado más arriba sobre la elección de las nuevas variables independientes está ligado a la resolución de la ecuación (5).

Demostremos los lemas siguientes.

1. Si $z = \varphi(x, y)$ es una solución particular de la ecuación

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0,$$

la relación $\varphi(x, y) = C$ es una integral general de la ecuación diferencial ordinaria

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx\, dy + a_{22} dx^2 = 0. \qquad (6)$$

2. Si $\varphi(x, y) = C$ es una integral general de la ecuación diferencial ordinaria

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx\, dy + a_{22} dx^2 = 0,$$

la función $z = \varphi(x, y)$ satisface a la ecuación (5).

Demostremos el primer lema. Como la función $z = \varphi(x, y)$ satisface a la ecuación (5), la igualdad

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0 \qquad (7)$$

es una identidad, puesto que se satisface para todas las x e y en la región en la cual está dada la solución. La relación $\varphi(x, y) = C$ es una integral general de la ecuación (6), si la función y, determinada de la relación implícita $\varphi(x, y) = C$, satisface a la ecuación (6). Sea

$$y = f(x, C)$$

[1]) Obsérvese que si la transformación de variables es lineal, entonces $\overline{F} = F$, puesto que las derivadas segundas de ξ y η en las fórmulas (3) son iguales a cero, y $\overline{F}$ no tiene sumandos complementarios de la transformación de las derivadas segundas.

dicha función; entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}\right]_{y=f(x, C)} \tag{8}$$

donde los paréntesis y el subíndice $y = f(x, C)$ indican que en el segundo miembro de la igualdad (8) la variable y no es independiente, sino que su valor es igual a $f(x, C)$. De aquí se desprende que $y = f(x, C)$ satisface a la ecuación (6), puesto que

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} =$$

$$= \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x, C)} = 0,$$

debido a que la expresión entre corchetes es igual a cero para todos los valores de x e y, y no sólo para $y = f(x, C)$.

Demostremos el segundo lema. Sea $\varphi(x, y) = C$ una integral general de la ecuación (6). Demostremos que

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \tag{7'}$$

para cualquier punto (x, y). Sea (x_0, y_0) cierto punto dado. Si demostramos que en éste se satisface la igualdad (7'), de aquí se seguirá, en virtud de ser (x_0, y_0) arbitrario, que la igualdad (7') es una identidad, y que la función $\varphi(x, y)$ es una solución de la ecuación (7'). Tracemos por el punto (x_0, y_0) una curva integral de la ecuación (6), haciendo $\varphi(x_0, y_0) = C_0$ y considerando la curva $y = f(x, C_0)$. Es evidente que $y_0 = f(x_0, C_0)$. Para todos los puntos de esta curva, tendremos:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} =$$

$$= \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x, C_0)} = 0.$$

Haciendo $x = x_0$ en la última igualdad, se obtiene:

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0, y_0) + 2a_{12}\varphi_x(x_0, y_0)\varphi_y(x_0, y_0) + a_{22}\varphi_y^2(x_0, y_0) = 0,$$

que es lo que queríamos demostrar[1]).

---

[1]) La relación establecida entre las ecuaciones (5) y (6) es equivalente al conocido nexo (véase Stepánov, *Curso de Ecuaciones Diferenciales*, 1937, pág. 287; Smirnov, *Curso de Matemáticas superiores*, tomo II, 1948, pág. 78) entre una ecuación lineal en derivadas parciales de primer orden y un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto puede comprobarse desarrollando el primer miembro de la ecuación (5) en forma de producto de dos expresiones diferenciales lineales.

(Véase también L. Elsgoltz, *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, Ed. MIR, 1969, págs. 248—251.) (*N. de la Red.*)

La ecuación (6) se llama ecuación *característica* para la ecuación (1), y sus integrales, *características*.

Haciendo $\xi = \varphi(x, y)$, donde $\varphi(x, y) = \text{const}$ es una integral general de la ecuación (6), el coeficiente de $u_{\xi\xi}$ se reduce a cero. Si $\psi(x, y) = \text{const}$ es otra integral general de la ecuación (6), independiente de $\varphi(x, y)$, haciendo $\eta = \psi(x, y)$ se anulará también el coeficiente de $u_{\eta\eta}$.

La ecuación (6) se divide en dos ecuaciones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{10}$$

El signo de la expresión subradical determina el tipo de la ecuación

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0. \tag{1}$$

Esta ecuación se llamará en el punto M ecuación de tipo

hiperbólico, si en el punto M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,
elíptico, si en el punto M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,
parabólico, si en el punto M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$[1]).

No es difícil convencerse de la validez de la relación

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) D^2, \quad D = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y,$$

de la cual se deduce la invariancia del tipo de la ecuación bajo una transformación de las variables, puesto que el determinante funcional (jacobiano) D de la transformación de variables es diferente de cero. En distintos puntos de la región de determinación la ecuación puede pertenecer a tipos diferentes.

Consideremos una región G, en todos los puntos de la cual la ecuación tiene un mismo tipo. Por cada punto de la región G pasan dos características; además, para las ecuaciones de tipo hiperbólico las características son reales y distintas, para las ecuaciones de tipo elíptico, complejas y diferentes, y para las de tipo parabólico ambas características son reales y coinciden.

Estudiemos cada caso por separado.

1. Para la ecuación de tipo hiperbólico es $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ y los segundos miembros de las ecuaciones (9) y (10) son reales y diferentes. Sus integrales generales $\varphi(x, y) = C$ y $\psi(x, y) = C$

---

[1]) Esta terminología se ha adoptado de la teoría de las curvas de segundo orden.

determinan familias reales de características. Haciendo

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \tag{11}$$

reducimos la ecuación (4), después de dividir entre el coeficiente de $u_{\xi\eta}$, a la forma

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),$$

siendo

$$\Phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}.$$

Esta es la llamada forma *canónica* de las ecuaciones de tipo hiperbólico[1]). A menudo se utiliza la segunda forma canónica. Hagamos

$$\xi = \alpha + \beta, \quad \eta = \alpha - \beta,$$

es decir,

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2},$$

donde α y β son nuevas variables. Entonces

$$u_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta), \quad u_\eta = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta), \quad u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta}).$$

Como resultado, la ecuación (4) toma la forma

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1 \quad (\Phi_1 = 4\Phi).$$

---

[1]) Para que sea posible la introducción de las nuevas variables ξ y η mediante las funciones φ y ψ, hay que demostrar la independencia de estas funciones; una condición suficiente de esto es que el determinante funcional correspondiente sea distinto de cero. Supongamos que el determinante funcional

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$$

se anula en cierto punto M. Entonces tiene lugar la proporcionalidad de las filas, es decir,

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{\psi_x}{\psi_y},$$

lo cual es, sin embargo, imposible, puesto que

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \text{ y}$$

$$\frac{\psi_x}{\psi_y} = -\frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

$$(a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0)$$

(aquí consideramos que $a_{11} \neq 0$, lo cual no limita la generalidad). Con esto queda establecida la independencia de las funciones φ y ψ.

2. Para las ecuaciones de tipo parabólico, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, las ecuaciones (9) y (10) coinciden, y obtenemos una integral general de la ecuación (6): $\varphi(x, y) = \text{const}$. Hagamos en este caso

$$\xi = \varphi(x, y) \text{ y } \eta = \eta(x, y),$$

siendo $\eta(x, y)$ una función cualquiera, independiente de φ. Bajo esta elección de las variables, el coeficiente $\bar{a}_{11}$ será

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0,$$

puesto que $a_{12} = \sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$; de aquí se sigue que

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$
$$= (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0.$$

Luego de dividir la ecuación (4) entre el coeficiente de $u_{\eta\eta}$, se obtiene la forma canónica para la ecuación de tipo parabólico:

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \quad \left(\Phi = -\frac{F}{\bar{a}_{22}}\right).$$

Si u_ξ no figura en el segundo miembro, ésta será una ecuación diferencial ordinaria, que depende de ξ en calidad de parámetro.

3. Para la ecuación de tipo elíptico es $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, y los segundos miembros de las ecuaciones (9) y (10) son complejos. Sea

$$\varphi(x, y) = C$$

una integral compleja de la ecuación (9). Entonces

$$\varphi^*(x, y) = C^*,$$

donde φ^* es la función conjugada con φ, será una integral general de la ecuación conjugada (10). Pasemos a variables complejas, haciendo

$$\xi = \varphi(x, y), \ \eta = \varphi^*(x, y).$$

Entonces la ecuación de tipo elíptico se reduce a la misma forma que la hiperbólica.

Para no tratar con variables complejas, introduzcamos nuevas variables α y β, iguales a

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i},$$

de modo que

$$\xi = \alpha + i\beta, \ \eta = \alpha - i\beta.$$

En este caso,

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 =$$
$$= (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) +$$
$$+ 2i\,(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0,$$

es decir,

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} \quad \text{y} \quad \bar{a}_{12} = 0.$$

La ecuación (4), después de dividir entre el coeficiente de $u_{\alpha\alpha}$, toma la forma[1])

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \quad \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}\right).$$

De esta manera, según el signo de la expresión $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$, tienen lugar las siguientes formas canónicas de la ecuación (1):
$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ (tipo hiperbólico) $u_{xx} - u_{yy} = \Phi$, o bien $u_{xy} = \Phi$,
$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (tipo elíptico) $u_{xx} + u_{yy} = \Phi$,
$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ (tipo parabólico) $u_{xx} = \Phi$.

2. Clasificación de las ecuaciones de segundo orden con varias variables independientes. Consideremos la ecuación lineal con coeficientes reales

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0 \quad (a_{ij} = a_{ji}), \qquad (12)$$

donde a, b, c, f son funciones de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Introduzcamos nuevas variables independientes ξ_k, haciendo

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Entonces

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\alpha_{ik},$$
$$u_{x_ix_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k\xi_l}\alpha_{ik}\alpha_{jl} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}(\xi_k)_{x_ix_j},$$

[1]) Tal transformación es lícita sólo en el caso en que los coeficientes de la ecuación (1) sean funciones analíticas. Efectivamente, si $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, los segundos miembros de las ecuaciones (9) y (10) son complejos y, por consiguiente, la función y debe tener valores complejos. Sólo se puede hablar de las soluciones de estas ecuaciones en el caso en que los coeficientes $a_{ik}(x, y)$ estén determinados para valores complejos de y. Al reducir una ecuación de tipo elíptico a su forma canónica, nos limitaremos al caso en que los coeficientes son analíticos.

siendo

$$\alpha_{lk} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_l}.$$

Sustituyendo las expresiones para las derivadas en la ecuación inicial, se obtiene:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{kl} u_{\xi_k \xi_l} + \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu + f = 0,$$

siendo

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl},$$

$$\bar{b}_k = \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\xi_k)_{x_i x_j}.$$

Consideremos la forma cuadrática

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 y_i y_j, \tag{13}$$

cuyos coeficientes son iguales a los coeficientes a_{ij} de la ecuación inicial en cierto punto $M_0 (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Efectuando sobre las variables y la transformación lineal

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \eta_k,$$

se obtiene, para la forma cuadrática, la nueva expresión

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l,$$

donde

$$\bar{a}_{kl}^0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 \alpha_{ik} \alpha_{jl}.$$

De este modo, los coeficientes de la parte principal de la ecuación varían en forma análoga a los coeficientes de una forma cuadrática bajo una transformación lineal.

Como es sabido, escogiendo una transformación lineal adecuada se puede reducir la matriz (a_{ij}^0) de la forma cuadrática a su forma diagonal, en la cual

$$|\bar{a}_{ii}^0| = 1, \quad \text{ó bien } 0;$$

$$\bar{a}_{ij}^0 = 0 \quad (i \neq j, \; i = 1, 2, \ldots, n).$$

De acuerdo con la *ley de inercia*, el número de coeficientes positivos, negativos y nulos $\bar{a}^0_{ii}$ en la expresión canónica de la forma cuadrática es invariante con respecto a una transformación lineal.

Llamemos a la ecuación (12) en el punto M_0 ecuación de tipo *elíptico*, si todos los n coeficientes $\bar{a}^0_{ii}$ son de un mismo signo; de tipo *hiperbólico* (o *hiperbólico normal*), si $n-1$ coeficientes $\bar{a}^0_{ii}$ poseen el mismo signo, y un coeficiente, el signo opuesto; de tipo *ultrahiperbólico*, si entre los $\bar{a}^0_{ii}$ hay m coeficientes de un signo y $n-m$ del signo opuesto (m, $n-m>1$); de tipo *parabólico*, si por lo menos uno de los coeficientes $\bar{a}^0_{ii}$ es igual a cero.

Escogiendo nuevas variables independientes ξ_i de forma que en el punto M_0 sea

$$\alpha_{ik}=\frac{\partial\xi_k}{\partial x_i}=\alpha^0_{ik},$$

donde α^0_{ik} son los coeficientes de la transformación que reduce la forma cuadrática (13) a su forma canónica (por ejemplo, haciendo $\xi_k=\sum\alpha^{(0)}_{ik}x_i$), obtenemos que en el punto M_0 la ecuación se reduce, según el tipo, a una de las formas canónicas siguientes:

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}+\ldots+u_{x_nx_n}+\Phi=0 \quad \text{(tipo elíptico)},$$

$$u_{x_1x_1}=\sum_{i=2}^{n}u_{x_ix_i}+\Phi \qquad \text{(tipo hiperbólico)},$$

$$\sum_{i=1}^{m}u_{x_ix_i}=\sum_{i=m+1}^{n}u_{x_ix_i}+\Phi \quad (m>1,\ n-m>1)$$

$$\text{(tipo ultrahiperbólico)},$$

$$\sum_{i=1}^{n-m}(\pm u_{x_ix_i})+\Phi=0 \quad (m>0) \qquad \text{(tipo parabólico)}.$$

No nos detendremos aquí a hacer una división más detallada de las ecuaciones de tipo parabólico en ecuaciones elíptico-parabólicas, hiperbólico-parabólicas, etc.

De esta manera, si la ecuación (12) pertenece a cierto tipo en un punto M, se la puede reducir, en este punto, a la forma canónica correspondiente.

Consideremos con más detalle el problema sobre si se puede reducir una ecuación a su forma canónica en cierto entorno del punto M, si en todos los puntos de dicho entorno la ecuación pertenece a un mismo tipo.

Para reducir una ecuación en cierta región a su forma canónica habría que someter las funciones $\xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i=$

$= 1, 2, \ldots, n$) a las relaciones diferenciales $\bar{a}_{kl} = 0$, para $k \neq l$. El número de estas condiciones, igual a $\frac{n(n-1)}{2}$, supera a n —el número de funciones ξ a determinar— para $n > 3$. Para $n = 3$ los elementos no diagonales de la matriz $(\bar{a}_{ik})$ se podrían, en general, reducir a cero, pero entonces los elementos diagonales pueden resultar distintos.

Por consiguiente, para $n \geqslant 3$ la ecuación no se puede reducir a la forma canónica en un entorno del punto M. Para $n = 2$, se puede anular el único coeficiente no diagonal y satisfacer a la condición de igualdad de los dos coeficientes diagonales, lo cual, precisamente, fue hecho en el p. 1.

Si los coeficientes de la ecuación (12) son constantes, al reducir (12) a su forma canónica en un punto M, obtenemos una ecuación reducida a la forma canónica en toda la región de definición de la ecuación.

3. Formas canónicas de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes. En el caso de dos variables independientes, la ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes tiene la forma

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0. \quad (14)$$

A ésta le corresponde una ecuación característica con coeficientes constantes. Por esto, las características serán las líneas rectas

$$y = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + C_1, \quad y = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + C_2.$$

Mediante la transformación correspondiente de variables, la ecuación (14) se reduce a una de las formas canónicas:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \text{ (tipo elíptico)}, \quad (15)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{\xi\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0, \\ \text{o bien} \\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \end{array}\right\} \text{(tipo hiperbólico)}, \quad (16)$$

$$u_{\xi\xi} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \quad \text{(tipo parabólico)}. \quad (17)$$

Para simplificaciones ulteriores, introduzcamos en lugar de u una nueva función v:

$$u = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \cdot v,$$

donde λ y μ son constantes por ahora indeterminadas. Entonces

$$u_\xi = e^{\lambda\xi + \mu\eta}(v_\xi + \lambda v),$$

$$u_\eta = e^{\lambda\xi + \mu\eta}(v_\eta + \mu v),$$

$$u_{\xi\xi}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\,(v_{\xi\xi}+2\lambda v_\xi+\lambda^2 v),$$
$$u_{\xi\eta}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\,(v_{\xi\eta}+\lambda v_\eta+\mu v_\xi+\lambda\mu v),$$
$$u_{\eta\eta}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\,(v_{\eta\eta}+2\mu v_\eta+\mu^2 v).$$

Sustituyendo las expresiones para las derivadas en la ecuación (15) y simplificando luego por $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, se obtiene:

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+(b_1+2\lambda)\,v_\xi+(b_2+2\mu)\,v_\eta+$$
$$+(\lambda^2+\mu^2+b_1\lambda+b_2\mu+c)\,v+f_1=0.$$

Escojamos los parámetros λ y μ de forma que dos coeficientes, por ejemplo, los de las derivadas primeras, se anulen $\left(\lambda=-\frac{b_1}{2};\ \mu=-\frac{b_2}{2}\right)$. Como resultado, se obtiene:

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\gamma v+f_1=0,$$

siendo γ una constante que se expresa a partir de c, b_1 y b_2, $f_1 = f e^{-(\lambda\xi+\mu\eta)}$. Efectuando operaciones análogas también para los casos (16) y (17), obtenemos las siguientes formas canónicas para las ecuaciones con coeficientes constantes:

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\gamma v+f_1=0 \quad \text{(tipo elíptico)},$$

o bien
$$\left.\begin{aligned} v_{\xi\eta}+\gamma v+f_1&=0,\\ v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}+\gamma v+f_1&=0\end{aligned}\right\}\text{(tipo hiperbólico)},$$

$$v_{\xi\xi}+b_2 v_\eta+f_1=0 \quad \text{(tipo parabólico)}.$$

Como fue indicado en el p. 2, la ecuación con coeficientes constantes en el caso de varias variables independientes

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}+cu+f=0$$

se reduce, mediante una transformación lineal de las variables, a su forma canónica simultáneamente para todos los puntos de su región de definición. Introduciendo en lugar de la función u la función v

$$u=ve^{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\ldots+\lambda_nx_n}$$

y escogiendo las λ_i de forma adecuada, podemos simplificar más la ecuación, lo que nos da formas canónicas similares al caso $n=2$.

EJERCICIOS DEL CAPITULO I

1. Hallar las regiones en que la ecuación

$$u_{xx}+yu_{yy}=0$$

es hiperbólica, elíptica y parabólica, y reducirla a su forma canónica en la región en que es hiperbólica.

2. Reducir a su forma canónica las ecuaciones:

a) $u_{xx}+xyu_{yy}=0$.
b) $yu_{xx}-xu_{yy}+u_x+yu_y=0$.
c) $e^{2x}u_{xx}+2e^{x+y}u_{xy}+e^{2y}u_{yy}=0$.
d) $u_{xx}+(1+y)^2u_{yy}=0$.
e) $xu_{xx}+2\sqrt{xy}\,u_{xy}+yu_{yy}-u_x=0$.
f) $(x-y)u_{xx}+(xy-y^2-x+y)u_{xy}=0$.
g) $y^2u_{xx}-e^{2x}u_{yy}+u_x=0$.
h) $\operatorname{sen}^2 y u_{xx}-e^{2x}u_{yy}+3u_x-5u=0$.
i) $u_{xx}+2u_{xy}+4u_{yy}+2u_x+3u_y=0$.

3. Reducir a su forma canónica y simplificar lo más que se pueda la ecuación

$$au_{xx}+2au_{xy}+au_{yy}+bu_x+cu_y+u=0.$$

4. Introduciendo la función $v=ue^{\lambda x+\mu y}$ y escogiendo de forma apropiada los parámetros λ y μ, simplificar las siguientes ecuaciones con coeficientes constantes:

a) $u_{xx}+u_{yy}+\alpha u_x+\beta u_y+\gamma u=0$.
b) $u_{xx}=\frac{1}{a^2}u_y+\alpha u+\beta u_x$.
c) $u_{xx}-\frac{1}{a^2}u_{yy}=\alpha u_x+\beta u_y+\gamma u$.
d) $u_{xy}=\alpha u_x+\beta u_y$.

CAPITULO II

ECUACIONES DE TIPO HIPERBOLICO

Las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden de tipo hiperbólico se encuentran con mayor frecuencia en los problemas físicos relacionados con procesos oscilatorios. La ecuación más simple de tipo hiperbólico

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

es llamada comúnmente *ecuación de las oscilaciones de una cuerda*. En el presente capítulo, así como también en los siguientes, nos limitaremos al estudio de la clase de las ecuaciones lineales.

§ 1. PROBLEMAS SIMPLES QUE SE REDUCEN A ECUACIONES DE TIPO HIPERBOLICO. PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS DE CONTORNO

1. Ecuación de las oscilaciones transversales pequeñas de una cuerda. Cada punto de una cuerda de longitud l puede ser caracterizado por el valor de su abscisa x. La descripción del proceso de oscilación de una cuerda puede efectuarse dando la posición de los puntos de la cuerda en distintos momentos de tiempo. Para determinar la posición de la cuerda en el momento de tiempo t, es suficiente dar las componentes del vector del desplazamiento $\{u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)\}$ del punto x en el momento t.

Consideraremos el problema más sencillo sobre las oscilaciones de una cuerda. Supondremos que los desplazamientos de la cuerda se hallan en un mismo plano x, u y que el vector del desplazamiento u es perpendicular en cualquier momento al eje x; entonces, el proceso oscilatorio se puede describir mediante una sola función $u(x, t)$, que caracteriza el desplazamiento vertical de la cuerda. Consideraremos a la cuerda como un hilo elástico flexible.

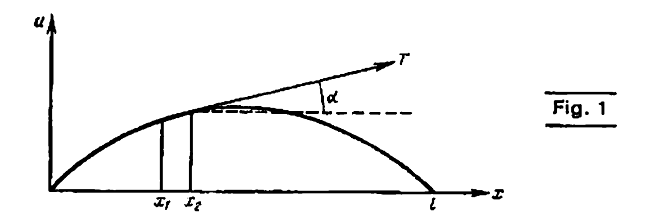


Fig. 1

La expresión matemática del concepto de flexibilidad reside en que las tensiones que surgen en la cuerda están dirigidas siempre por la tangente a su perfil instantáneo (fig. 1). Esta condición expresa el hecho de que la cuerda no se resiste a la flexión.

La magnitud de la tensión que surge en la cuerda como consecuencia de la elasticidad, puede ser calculada por la ley de Hooke[1]). Consideraremos pequeñas oscilaciones de la cuerda y despreciaremos el cuadrado de u_x con respecto a la unidad.

Calculemos, aplicando esta condición, el alargamiento a que se somete un segmento de la cuerda (x_1, x_2). La longitud de este segmento es igual a

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(u_x)^2}\, dx \cong x_2 - x_1 = S.$$

De este modo, en los límites de la exactitud que hemos convenido en el proceso oscilatorio no hay ningún alargamiento de los segmentos de cuerda; de aquí, y en base a la ley de Hooke, se deduce que la magnitud de la tensión T en cada punto no varía con el tiempo. Demostremos también que la tensión no depende tampoco de x, es decir, que

$$T(x) = T_0 = \text{const}.$$

Hallemos las proyecciones de la tensión sobre los ejes x y u (designémoslas por T_x y T_u):

$$T_x(x) = T(x)\cos\alpha = \frac{T}{\sqrt{1+(u_x)^2}} \cong T(x),$$

$$T_u(x) = T(x)\,\mathrm{sen}\,\alpha \cong T(x)\,\mathrm{tg}\,\alpha = T(x)\,u_x,$$

siendo α el ángulo de la tangente a la curva $u(x, t)$ con el eje x. Sobre el segmento (x_1, x_2) actúan fuerzas de tensión, fuerzas externas y fuerzas de inercia. La suma de las proyecciones de todas las fuerzas sobre el eje x debe ser igual a cero (se consideran sólo las

[1]) Véase S. P. Strelkov, «*Mecánica*», ed. «Nauka», 1965.

oscilaciones transversales). Como las fuerzas de inercia y las externas están dirigidas, por hipótesis, a lo largo del eje u, tendremos

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0, \quad \text{o bien} \quad T(x_1) = T(x_2). \qquad (1)$$

De aquí se deduce, en virtud de ser x_1 y x_2 puntos arbitrarios, que la tensión no depende de x, es decir, que para todos los valores de x y de t

$$T(x) \equiv T_0. \qquad (2)$$

Pasemos, luego de estas observaciones preliminares, a la deducción de la ecuación de las oscilaciones transversales de una cuerda. Apliquemos la segunda ley de Newton. La componente de la cantidad de movimiento del segmento de cuerda (x_1, x_2) sobre el eje u es igual a

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t)\,\rho(\xi)\,d\xi,$$

donde ρ es la densidad lineal de la cuerda. Igualemos la variación de la cantidad de movimiento en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)\,[u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\,d\xi$$

al impulso de las fuerzas que actúan, formadas por la tensión $T_0 u_x|_{x=x_2} - T_0 u_x|_{x=x_1}$ en los puntos x_2 y x_1 y por la fuerza externa, que consideraremos distribuida continuamente con densidad (carga) $F(x, t)$, calculada en la unidad de longitud. Como resultado se obtiene la ecuación de las oscilaciones transversales de un elemento de la cuerda en forma integral:

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\,\rho(\xi)\,d\xi =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} T_0\,[u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)]\,d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau. \qquad (3)$$

Para pasar a la ecuación diferencial, supongamos que existen las derivadas segundas continuas de $u(x, t)$[1]). Entonces la fórmula (3),

---

[1]) Al hacer la suposición de que la función tiene derivadas segundas, de hecho convenimos en considerar sólo funciones que posean dicha propiedad. De este modo, una hipótesis de este tipo está relacionada con una limitación de la clase de fenómenos físicos estudiados, y no contiene en sí la afirmación de que no existen funciones que satisfagan a la ecuación integral de las oscilaciones y que no tengan derivadas segundas. Tales funciones existen y poseen gran interés desde el punto de vista práctico. Para más detalles, véase el p. 7 del § 2.

después de aplicar dos veces el teorema del valor medio, toma la forma

$$u_{tt}(\xi^*, t^*)\,\rho(\xi^*)\,\Delta t\,\Delta x = \{T_0\,[u_{xx}(\xi^{**}, t^{**})] + F(\xi^{***}, t^{***})\}\ \Delta t\,\Delta x,$$

donde

$$\xi^*,\ \xi^{**},\ \xi^{***} \in (x_1, x_2), \text{ y } t^*,\ t^{**},\ t^{***} \in (t_1, t_2).$$

Simplificando entre $\Delta x\,\Delta t$ y pasando al límite cuando $x_2 \to x_1$, $t_2 \to t_1$, se obtiene la ecuación diferencial de las oscilaciones transversales de la cuerda

$$T_0 u_{xx} = \rho u_{tt} - F(x, t). \tag{4}$$

Si la densidad es constante, $\rho = \text{const}$, esta ecuación se escribe comúnmente en la forma

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}\right), \tag{5}$$

donde

$$f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t) \tag{6}$$

es la densidad de la fuerza con respecto a la unidad de masa. Si no hay fuerzas externas, se obtiene la ecuación homogénea

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

o bien

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \ (y = at),$$

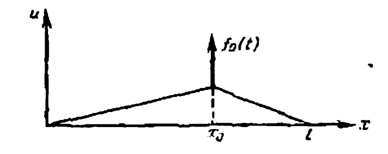
que describe las oscilaciones libres de una cuerda. Esta ecuación es el ejemplo más sencillo de una ecuación de tipo hiperbólico.

Si en el punto $x_0\,(x_1 < x_0 < x_2)$ está aplicada una fuerza concentrada $f_0(t)$ (fig. 2), la ecuación (3) se escribe así:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)\,[u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\,d\xi - \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} T_0\,[u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)]\,d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau)\,d\tau.$$

Como las velocidades de los puntos de la cuerda están acotadas, para $x_1 \to x_0$ y $x_2 \to x_0$ las integrales del primer miembro de esta igualdad tienden a cero, y la igualdad (3) toma la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0\,[u_x(x_0 + 0, \tau) - u_x(x_0 - 0, \tau)]\,d\tau = -\int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$



Aplicando el teorema del valor medio, simplificando ambos miembros de la igualdad por Δt y pasando al límite cuando $t_2 \to t_1$, se obtiene:

$$u_x(x, t)\Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = -\frac{1}{T_0} f_0(t).$$

De aquí se ve que en el punto de aplicación de la fuerza concentrada, las derivadas primeras son discontinuas, y la ecuación diferencial pierde el sentido. En este punto deben cumplirse las dos condiciones de conjunción

$$\left.\begin{aligned} u(x_0+0, t) &= u(x_0-0, t), \\ u_x(x_0+0, t) - u_x(x_0-0, t) &= -\frac{1}{T_0} f_0(t), \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

la primera de las cuales expresa la continuidad de la cuerda, y la segunda determina la magnitud de la «quebradura» de la cuerda en el punto x_0, que depende de $f_0(t)$ y de la tensión T_0.

2. Ecuación de las oscilaciones longitudinales de las barras y las cuerdas. Las ecuaciones de las oscilaciones longitudinales de una cuerda, una barra y un resorte se escriben de la misma forma. Consideremos una barra, situada en el segmento $(0, l)$ del eje x. El proceso de las oscilaciones longitudinales puede ser descrito por una sola función $u(x, t)$, que es el desplazamiento, en el momento t, del punto que tiene la abscisa x en la posición de equilibrio[1]). En las oscilaciones longitudinales, dicho despla-

[1]) La variable geométrica x escogida aquí se llama variable de Lagrange. En las variables de Lagrange cada punto físico de la barra se caracteriza durante todo el proceso por una misma coordenada geométrica x. El punto físico que ocupaba en el momento inicial (en el estado de equilibrio) la posición x, se halla en cualquier momento ulterior t en el punto con coordenada $X = x + u(x, t)$. Si fijamos cierto punto geométrico A con coordenada X, en distintos momentos de tiempo en este punto se hallarán distintos puntos físicos (con distintas coordenadas de Lagrange x). Frecuentemente se utilizan también las variables de Euler X, t, donde X es la coordenada geométrica. Si $U(X, t)$ es el desplazamiento de un punto con coordenada de Euler X, su coordenada de Lagrange será

$$x = X - U(X, t).$$

En el p. 6 se cita un ejemplo de aplicación de las coordenadas de Euler.

zamiento tiene lugar a lo largo de la barra. Al deducir la ecuación, supondremos que las tensiones que surgen en el proceso oscilatorio se someten a la ley de Hooke.

Calculemos el alargamiento relativo del elemento $(x, x + \Delta x)$ en el momento t. Las coordenadas de los extremos de este elemento en el momento t tienen los valores

$$x + u(x, t), \quad x + \Delta x + u(x + \Delta x, t),$$

y el alargamiento relativo es igual a

$$\frac{[\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t)] - \Delta x}{\Delta x} = u_x(x + \theta\,\Delta x, t) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1).$$

Pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene que el alargamiento relativo en el punto x se determina mediante la función $u_x(x, t)$. En virtud de la ley de Hooke, la tensión $T(x, t)$ es igual a

$$T(x, t) = k(x)\, u_x(x, t), \tag{9}$$

siendo $k(x)$ el módulo de Young en el punto x $(k(x) > 0)$.

Aplicando el teorema de la variación de la cantidad de movimiento, obtenemos la ecuación integral de las oscilaciones:

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\rho(\xi)\, d\xi =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2)\, u_x(x_2, \tau) - k(x_1)\, u_x(x_1, \tau)]\, d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{10}$$

donde $F(x, t)$ es la densidad de la fuerza externa, calculada en la unidad de longitud.

Supongamos que existen las derivadas segundas continuas de la función $u(x, t)$. Aplicando el teorema del valor medio y efectuando el paso al límite[1] cuando $\Delta x = x_2 - x_1 \to 0$ y $\Delta t = t_2 - t_1 \to 0$, obtenemos la ecuación diferencial de las oscilaciones longitudinales de una barra[2]

$$[k(x)\, u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x, t). \tag{11}$$

---

[1] En lo sucesivo omitiremos los detalles relacionados con los pasos al límite, los cuales fueron estudiados al deducir la ecuación de las oscilaciones transversales de una cuerda.

[2] La condición de pequeñez de las oscilaciones está ligada en este caso sólo con los límites de aplicación de la ley de Hooke. En el caso general es $T = k(x, u_x)\, u_x$, y se llega a la ecuación cuasilineal

$$[k(x, u_x)\, u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x, t).$$

Si la barra es homogénea ($k(x) = \text{const}$, $\rho = \text{const}$), esta ecuación se escribe en la forma siguiente:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}\right), \tag{12}$$

donde

$$f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho} \tag{13}$$

es la densidad de la fuerza con respecto a la unidad de masa.

3. Energía de las oscilaciones de una cuerda. Hallemos la expresión de la energía de las oscilaciones transversales de una cuerda, $E = K + U$, donde K es la energía cinética y U, la potencial. El elemento de cuerda dx, que se mueve con velocidad $v = u_t$, posee la energía cinética

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \rho(x)\, dx\, (u_t)^2 \quad (m = \rho\, dx).$$

La energía cinética de toda la cuerda es igual a

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) [u_t(x, t)]^2\, dx. \tag{14}$$

La energía potencial de las oscilaciones transversales de una cuerda que tiene, para $t = t_0$, la forma $u(x, t_0) = u_0(x)$, es igual al trabajo que es necesario efectuar para que la cuerda pase de la posición de equilibrio a la posición $u_0(x)$. Supongamos que la función $u(x, t)$ da el perfil de la cuerda en el momento t, siendo, además,

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, t_0) = u_0(x).$$

El elemento dx, bajo la acción de la resultante de las fuerzas de tensión $T \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+dx} - T \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x = T u_{xx}\, dx$, recorre un camino $u_t(x, t)\, dt$ durante el tiempo dt. El trabajo efectuado por toda la cuerda durante el tiempo dt es igual a

$$\left\{\int_0^l T_0 u_{xx} u_t\, dx\right\} dt = \left\{T_0 u_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l T_0 u_x u_{xt}\, dx\right\} dt =$$

$$= \left\{-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l T_0 (u_x)^2\, dx + T_0 u_x u_t \Big|_0^l\right\} dt.$$

Integrando respecto a t desde 0 hasta t_0, obtenemos:

$$-\frac{1}{2}\int_0^l T_0 (u_x)^2 dx \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^l T_0 [u_x(x, t_0)]^2 dx + \int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \Big|_0^l dt.$$

No es difícil esclarecer el sentido del último sumando del segundo miembro de esta igualdad. En efecto, $T_0 u_x \mid_{x=0}$ es la magnitud de la tensión en el extremo de la cuerda $x = 0$; $u_t(0, t)\, dt$ es el desplazamiento de dicho extremo, y la integral

$$\int_0^{t_0} T_0 u_x u_t \mid_{x=0} dt \tag{15}$$

es el trabajo que hay que gastar en el desplazamiento del extremo $x = 0$. El sumando correspondiente a $x = l$ tiene un sentido análogo. Si los extremos de la cuerda están fijos, el trabajo en dichos extremos será igual a cero (en este caso $u(0, t) = 0$, $u_t(0, t) = 0$). En consecuencia, al desplazar una cuerda con extremos fijos de la posición de equilibrio $u = 0$ a la posición $u_0(x)$ el trabajo no depende de la forma en que la cuerda se lleva a esta posición, y es igual a

$$-\frac{1}{2}\int_0^l T_0 [u_0'(x)]^2 dx, \tag{16}$$

que es la energía potencial de la cuerda en el momento $t = t_0$, con signo opuesto. De esta manera, la energía total de la cuerda es igual a

$$E = \frac{1}{2}\int_0^l [T_0 (u_x)^2 + \rho(x)(u_t)^2]\, dx. \tag{17}$$

En forma completamente análoga se puede obtener la expresión de la energía potencial de las oscilaciones longitudinales de una barra. Por otra parte, ésta se puede obtener también partiendo de la fórmula de la energía potencial de una barra elástica

$$U = \frac{1}{2} k \left(\frac{l - l_0}{l_0}\right)^2 l_0,$$

donde l_0 es la longitud inicial de la barra, y l, la longitud final. De aquí se deduce directamente que

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l k (u_x)^2 dx.$$

4. Deducción de la ecuación de las oscilaciones eléctricas en los cables. El paso de la corriente eléctrica por un cable con parámetros distribuidos se caracteriza por la intensidad de la corriente i y por la tensión v, que son funciones de la posición del punto x y del tiempo t. Aplicando la ley de Ohm a un segmento de longitud dx, se puede escribir que la caída de tensión en el elemento de cable dx es igual a la suma de las fuerzas electromotrices:

$$-v_x\, dx = iR\, dx + i_t L\, dx, \tag{18}$$

en donde R y L son la resistencia y el coeficiente de autoinducción, calculados para la unidad de longitud.

La cantidad de electricidad que pasa por el elemento de cablo dx durante el tiempo dt,

$$[i\,(x,\ t) - i\,(x + dx,\ t)]\, dt = -i_x\, dx\, dt, \tag{19}$$

es igual a la suma de la cantidad de electricidad necesaria para cargar el elemento dx y la cantidad que se pierde como consecuencia de la imperfección de la aislación:

$$C\,[v\,(x,\ t + dt) - v\,(x,\ t)]\, dx + Gdx\cdot vdt =$$
$$= (Cv_t + Gv)\, dx\, dt, \tag{20}$$

donde C y G son los coeficientes de capacidad y de pérdida, calculados para la unidad de longitud; además, se considera que la magnitud de las pérdidas es proporcional a la tensión en el punto considerado del cable.

De las fórmulas (18), (19) y (20) se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{l} i_x + Cv_t + Gv = 0, \\ v_x + Li_t + Ri = 0, \end{array}\right\} \tag{21}$$

llamado sistema de ecuaciones *telegráficas*[1]).

Para obtener una sola ecuación, que permita determinar la función i, derivemos la primera igualdad de (21) respecto a x, la segunda respecto a t, multiplicándola además por C. Efectuando la resta, bajo la hipótesis de que los coeficientes permanecen constantes, hallamos:

$$i_{xx} + Gv_x - CLi_{tt} - CRi_t = 0.$$

Sustituyendo v_x por su valor, dado por la segunda ecuación de (21), obtenemos la ecuación para la intensidad de la corriente:

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)\, i_t + GRi. \tag{22}$$

---

[1]) Estas ecuaciones son aproximadas dentro de los límites de la teoría del campo electromagnético, puesto que no consideran las oscilaciones electromagnéticas en el medio que rodea al cable.

Análoga forma tiene la ecuación para la tensión:

$$v_{xx} = CLv_{tt} + (CR + GL)\, v_t + GRv. \qquad (23)$$

La ecuación (22) ó (23) se llama ecuación telegráfica. Si se pueden despreciar las pérdidas a través de la aislación y si la resistencia es muy pequeña ($G \cong R \cong 0$), obtenemos la conocida ecuación de las oscilaciones

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \quad \left(a = \sqrt{\frac{1}{LC}}\right). \qquad (24)$$

5. Oscilaciones transversales de una membrana. Se llama membrana a una película plana, que no ofrece resistencia a la flexión y al desplazamiento. Consideremos una membrana extendida sobre un contorno plano C. Estudiaremos las oscilaciones transversales de la membrana, en las cuales el desplazamiento es perpendicular al plano de la membrana.

Sea ds un elemento de arco de cierto contorno, tomado en la superficie de la membrana, que pasa por el punto M (x, y). Sobre este elemento actúa una tensión igual a $T\,ds$. El vector T, como consecuencia de no haber resistencia a la flexión y al desplazamiento, se encuentra en el plano tangente a la superficie momentánea de la membrana, y es perpendicular al elemento ds. Se puede demostrar que la ausencia de resistencia al desplazamiento implica que la magnitud de la tensión no depende de la dirección del elemento ds, de modo que el vector de tensión $T = T\,(x, y, z)$ es función de x, y y t. Estas propiedades del vector T son la expresión matemática de la ausencia de resistencia a la flexión y al desplazamiento.

Estudiaremos las pequeñas oscilaciones de la membrana, despreciando el cuadrado de las derivadas primeras u_x, y u_y, donde la función $u\,(x, y, t)$ determina la forma de la membrana en el momento de tiempo t. De esta hipótesis se deduce de inmediato que $T_h\,(x, y, t)$, la proyección de la tensión en el plano (x, y), es igual al valor absoluto de la tensión. En efecto, en cualquier orientación del arco ds, el ángulo γ' entre el vector T y el plano (x, y) no supera al ángulo γ, formado por la normal a la superficie de la membrana en el punto (x, y) con el eje z. Por esto

$$\cos\gamma' \geqslant \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \cong 1,$$

es decir, $\cos\gamma' \cong 1$, y

$$T_h\,(x, y, z, t) = T\cos\gamma' \cong T\,(x, y, z, t). \qquad (25)$$

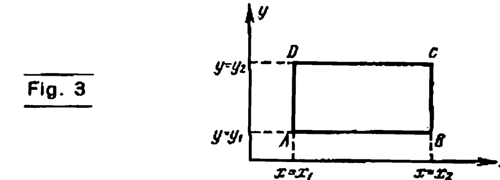


Fig. 3

La componente vertical de la tensión es, evidentemente, igual a

$$T_u = T\frac{\partial u}{\partial n}$$

Tomemos en la superficie de la membrana un elemento de superficie, cuya proyección en el eje (x, y) sea el rectángulo $ABCD$ con lados paralelos a los ejes de coordenadas (fig. 3). Sobre este elemento actúa una fuerza de tensión, igual a

$$T^* = \oint_{ABCD} T\,ds. \qquad (26)$$

En virtud de la ausencia de desplazamiento a lo largo de los ejes x e y, las proyecciones de T^* sobre este eje son iguales a cero:

$$T_x^* = \int_B^C T(x_2, y, t)\,dy - \int_A^D T(x_1, y, t)\,dy =$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} \{T(x_2, y, t) - T(x_1, y, t)\}\,dy = 0.$$

Análogamente

$$T_y^* = \int_{x_1}^{x_2} \{T(x, y_2, t) - T(x, y_1, t)\}\,dx = 0.$$

Aplicando el teorema del valor medio y teniendo en cuenta la arbitrariedad en la elección del elemento $ABCD$, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} T(x, y_1, t) = T(x, y_2, t), \\ T(x_1, y, t) = T(x_2, y, t), \end{array}\right\} \qquad (27)$$

es decir, la tensión T no cambia al variar x e y y puede depender sólo de t.

La superficie de cualquier elemento de la membrana en el momento de tiempo t es igual, en nuestra aproximación, a

$$\iint \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \iint \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\,dx\,dy = \iint dx\,dy. \qquad (28)$$

Por consiguiente, en el proceso de las oscilaciones no hay alargamientos, de donde se deduce, en virtud de la ley de Hooke, la independencia de las tensiones con respecto al tiempo. De este modo, hemos demostrado que la tensión no depende de las variables x, y y t:

$$T(x, y, t) = \text{const} = T_0. \tag{29}$$

Pasemos a la deducción de la ecuación de las oscilaciones de la membrana. Apliquemos el teorema del incremento de la cantidad de movimiento. Sea S_1 la proyección de cierto trozo de la membrana sobre el plano (x, y), y C_1, la frontera de S_1. Igualando la variación de la cantidad de movimiento al impulso de las componentes verticales de las fuerzas de tensión y de las fuerzas externas con densidad $f(x, y, t)$, obtenemos la ecuación de las oscilaciones de la membrana en forma integral:

$$\iint_S [u_t(x, y, t_2) - u_t(x, y, t_1)]\, \rho(x, y)\, dx\, dy =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_{C_1} T_0 \frac{\partial u}{\partial n}\, ds\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_1} f\, dx\, dy\, dt, \tag{30}$$

donde $\rho(x, y)$ es la densidad superficial de la membrana, y $f(x, y, t)$, la densidad de la fuerza externa (en la unidad de superficie).

Para pasar a la ecuación diferencial, supongamos que la función $u(x, y, t)$ posee derivadas segundas continuas. La integral de contorno se transforma, mediante el teorema de Ostrogradski[1], en una de superficie:

$$\int_{C_1} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \iint_{S_1} (u_{xx} + u_{yy})\, dx\, dy,$$

a consecuencia de lo cual la ecuación integral de las oscilaciones se reduce a la forma

$$\int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_1} \{\rho u_{tt} - T_0(u_{xx} + u_{yy}) - f(x, y, t)\}\, dx\, dy\, dt = 0.$$

Aplicando el teorema del valor medio, y teniendo en cuenta la arbitrariedad en la elección de S_1 y del segmento de tiempo (t_1, t_2), concluimos que la expresión entre llaves es idénticamente nula. Así llegamos a la ecuación diferencial de las oscilaciones de una membrana:

$$\rho u_{tt} = T_0(u_{xx} + u_{yy}) + F(x, y, t). \tag{31}$$

[1] Véase V. I. Smirnov, *Curso de Matemáticas Superiores*, t. II, 1948, pág. 190; B. M. Budak, S. V. Fomín, *Integrales Múltiples y Series*, ed. «Nauka», 1965.

Para una membrana homogénea, la ecuación de las oscilaciones puede escribirse en la forma

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t) \quad \left(a^2 = \frac{T_0}{\rho}\right), \tag{32}$$

donde $f(x, y, t)$ es la densidad de la fuerza, calculada para la unidad de masa de la membrana.

6. **Ecuaciones de la hidrodinámica y de la acústica.** Para caracterizar el movimiento de un líquido, se utilizan las funciones $v_1(x, y, z, t)$, $v_2(x, y, z, t)$, $v_3(x, y, z, t)$, que son las componentes del vector velocidad v en el punto (x, y, z) en el momento t (variables de Euler). La densidad $\rho(x, y, z, t)$, la presión $p(x, y, z, t)$ y la densidad de las fuerzas externas $F(x, y, z, t)$ (si éstas existen), calculada para la unidad de masa, son también magnitudes que caracterizan el movimiento de un líquido.

Consideremos cierto volumen de líquido T y calculemos las fuerzas que actúan sobre él. Despreciando las fuerzas de rozamiento, determinadas por la viscosidad, es decir, considerando un líquido ideal, obtenemos, para la resultante de las fuerzas de la presión, una expresión en forma de integral de superficie:

$$-\iint_S pn\, dS, \tag{33}$$

donde S es la superficie del volumen T, n, el vector unitario de la normal exterior. La fórmula de Ostrogradski[1]) nos da:

$$-\iint_S pn\, dS = -\iiint_T \operatorname{grad} p\, d\tau. \tag{34}$$

Al calcular la aceleración de cierto punto del líquido, es necesario considerar el desplazamiento del propio punto. Sea $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ la ecuación de la trayectoria de este punto. Calculemos la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial v}{\partial z}\dot{z} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v}{\partial y} v_2 + \frac{\partial v}{\partial z} v_3 = \frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)\, v,$$

---

[1]) En efecto, $pn = p\cos(n, x)\, i + p\cos(n, y)\, j + p\cos(n, z)\, k$, donde (i, j, k) son los vectores unitarios en el sistema de coordenadas (x, y, z),

$$\iint_S p\cos(n, x)\, ds = \iiint_T \frac{\partial p}{\partial x}\, d\tau, \quad \text{etc.}$$

donde

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}.$$

Esta derivada con respecto al tiempo, que considera el movimiento de la partícula del medio (sustancia), se llama *sustancial*, o material. La ecuación del movimiento del líquido expresa el nexo habitual entre la aceleración de las partículas y las fuerzas que actúan sobre éstas:

$$\iiint_T \rho \frac{dv}{dt}\,d\tau = -\iiint_T \operatorname{grad} p\,d\tau + \iiint_T \rho F\,d\tau, \qquad (35)$$

donde la última integral es la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre el volumen T. De aquí, en virtud de la arbitrariedad del volumen T, se obtiene la ecuación del movimiento de un líquido ideal en la forma de *Euler*:

$$v_t + (v\nabla)\,v = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + F. \qquad (36)$$

Pasemos a la deducción de la ecuación de continuidad. Si dentro de T no hay fuentes ni desagües, el cambio, en la unidad de tiempo, de la cantidad de líquido comprendido dentro de T, es igual al flujo a través de la frontera S:

$$\frac{d}{dt}\iiint_T \rho\,dt = -\iint_S \rho v n\,dS. \qquad (37)$$

La transformación de la integral de superficie en integral de volumen nos da

$$\iiint_T \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho v\right) d\tau = 0.$$

Como esta igualdad es válida para volúmenes arbitrariamente pequeños, de aquí se sigue la *ecuación de continuidad*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial\rho}{dt} + v\operatorname{grad}\rho + \rho\operatorname{div} v = 0. \qquad (38)$$

A las ecuaciones (36) y (38) hay que agregar la *ecuación* termodinámica *de estado*, que tomaremos aquí en la forma

$$p = f(\rho).$$

Por lo tanto, obtenemos un sistema de cinco ecuaciones con cinco funciones incógnitas v_x, v_y, v_z, p y ρ. Si la ecuación de estado contuviese a la temperatura, habría que agregar además la ecuación de propagación del calor (véase el apéndice IV). De este modo, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)\,v = F - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p, \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ &p = f(\rho) \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

es un sistema cerrado de ecuaciones de la hidrodinámica.

Apliquemos las ecuaciones de la hidrodinámica al proceso de propagación del sonido en un gas. Haremos las siguientes suposiciones: 1) no actúan fuerzas externas; 2) el proceso de propagación del sonido es adiabático, por lo cual la ecuación de estado es la adiabática de Poisson

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \quad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v}\right),$$

en donde ρ_0 y p_0 son la densidad y presión iniciales, c_p y c_v, las capacidades caloríficas a presión constante y a volumen constante; 3) las oscilaciones del gas son pequeñas, pudiéndose despreciar las potencias mayores que 1 de las velocidades, los gradientes de velocidades y las variaciones de densidad.

Llamemos *condensación* del gas a la magnitud $s(x, y, z, t)$, igual a la variación relativa de la densidad,

$$s(x, y, z, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \qquad (40)$$

de donde

$$\rho = \rho_0(1 + s). \qquad (41)$$

Las ecuaciones de la hidrodinámica, bajo las hipótesis hechas, toman la forma

$$\left.\begin{aligned} v_t &= -\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p, \\ \rho_t + \rho_0 \operatorname{div} v &= 0, \\ p = p_0(1+s)^\gamma &\cong p_0(1+\gamma s), \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

puesto que

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho_0}(1 - s + \ldots)\operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p + \ldots,$$

$$\operatorname{div} \rho v = v \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} v = \rho_0 \operatorname{div} v + \ldots,$$

donde los puntos suspensivos indican los términos de segundo y mayor orden de infinitud. Introduciendo la notación $a^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$, escribamos el sistema (42) en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} v_t &= -a^2 \operatorname{grad} s, \\ s_t + \operatorname{div} v &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{42'}$$

Aplicando a la primera ecuación de (42′) el operador de divergencia y cambiando el orden de derivación, tendremos:

$$\operatorname{div}\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} v = -a^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} s) = -a^2 \nabla^2 s = -a^2 \Delta s,$$

donde

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

es el *operador de Laplace*. Aplicando la segunda ecuación de (42′), obtenemos la ecuación de las oscilaciones

$$\Delta s = \frac{1}{a^2} s_{tt}, \tag{43}$$

o bien

$$a^2 (s_{xx} + s_{yy} + s_{zz}) = s_{tt}.$$

De aquí y de (40) se obtiene la ecuación para la densidad:

$$a^2 (\rho_{xx} + \rho_{yy} + \rho_{zz}) = \rho_{tt}. \tag{43'}$$

Las ecuaciones (43) y (43′) son las ecuaciones de las oscilaciones. Introduzcamos ahora el *potencial de las velocidades*, y demostremos que éste satisface a la misma ecuación de las oscilaciones (43) que la condensación.

De la ecuación

$$v_t = -a^2 \operatorname{grad} s$$

se deduce que

$$v(x, y, z, t) = v(x, y, z, 0) - a^2 \operatorname{grad}\left(\int_0^t s\,dt\right), \qquad (44)$$

donde $v(x, y, z, 0)$ es la distribución inicial de las velocidades. Si el campo de velocidades en el momento inicial posee el potencial

$$v|_{t=0} = -\operatorname{grad} f(x, y, z), \qquad (45)$$

tiene lugar la igualdad

$$v = -\operatorname{grad}\left[f(x, y, z) + a^2 \int_0^t s\,dt\right] = -\operatorname{grad} U, \qquad (46)$$

la cual indica que existe el potencial de las velocidades $U(x, y, z, t)$. La determinación del potencial de las velocidades es suficiente para describir todo el proceso del movimiento[1]):

$$\left.\begin{aligned} v &= -\operatorname{grad} U, \\ s &= \frac{1}{a^2} U_t. \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de continuidad

$$s_t + \operatorname{div} v = 0,$$

se obtiene la ecuación de las oscilaciones para el potencial:

$$a^2 (U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = U_{tt},$$

o bien

$$U_{tt} = a^2 \Delta U. \qquad (48)$$

Para la presión p y la velocidad v se puede obtener también una ecuación de las oscilaciones del tipo (48), llamada con frecuencia *ecuación de la acústica*.

En la resolución de los problemas para los casos bi- y unidimensional hay que sustituir en la ecuación (48) el operador de Laplace por el operador $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ y por el $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ respectivamente.

---

[1]) De la fórmula (46) se ve que el potencial U se determina salvo un sumando, que es una función arbitraria de t. De la ecuación $v_t = -a^2 \operatorname{grad} s$ y de (46) se sigue $\operatorname{grad}\left(s - \frac{1}{a^2} U_t\right) = 0$, es decir, $s = \frac{1}{a^2} U_t$, si el potencial U se normaliza correspondientemente.

La constante

$$a=\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

posee dimensiones de velocidad y, como demostraremos en el § 2, es la velocidad de propagación del sonido.

Calculemos la velocidad del sonido en el aire a presión atmosférica normal. En este caso $\gamma = \frac{7}{5}$, $\rho_0 = 0{,}001293$ g/cm^3, $p_0 =$ $= 1{,}033$ kg/cm^2; por consiguiente,

$$a=\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}=336 \text{ m/seg.}$$

En el caso de las oscilaciones de un gas en una región acotada, en su frontera deben darse condiciones de frontera determinadas. Si la frontera es una pared sólida impermeable, la componente normal de la velocidad es igual a cero, lo que nos lleva a las condiciones

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Sigma}=0, \quad \text{o bien} \quad \left.\frac{\partial s}{\partial n}\right|_{\Sigma}=0. \tag{49}$$

7. Condiciones de frontera e iniciales. Al describir matemáticamente un fenómeno físico, ante todo hay que plantear el problema, es decir, enunciar las condiciones suficientes para la determinación unívoca del proceso.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias y, más aún, las ecuaciones en derivadas parciales poseen, en general, un conjunto infinito de soluciones. Por eso, en el caso en que el problema físico se reduce a una ecuación en derivadas parciales, para la caracterización unívoca del proceso es necesario agregar a la ecuación ciertas condiciones complementarias.

En el caso de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, la solución puede ser determinada por las condiciones iniciales, o sea, fijando los valores de la función y de su derivada primera en el valor «inicial» del argumento (problema de Cauchy[1])). También suelen haber otras formas de las condiciones complementarias cuando, por ejemplo, se dan los valores de la función en dos puntos (problema de la catenaria[2]). Para una ecua-

---

[1]) Véase L. Elsgoltz, *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, ed. MIR, 1969, págs. 15 y 43. (*N. de la Red.*)

[2]) Ob. cit., págs. 15 y 102 (*N. de la Red.*)

ción en derivadas parciales también son posibles distintas formas de las condiciones complementarias.

Consideremos primeramente el problema más sencillo sobre las oscilaciones transversales de la cuerda con extremos fijos. En este problema. $u(x, t)$ da la desviación de la cuerda del eje x. Si los extremos de la cuerda $0 \leqslant x \leqslant l$ están fijos, deben cumplirse las *«condiciones de frontera»*[1])

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \tag{50}$$

Como el proceso de las oscilaciones de la cuerda depende de su forma inicial y de la distribución de las velocidades, hay que dar las *«condiciones iniciales»*:

$$\left.\begin{aligned} u(x, t_0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, t_0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

De esta manera, las condiciones complementarias están formadas por condiciones de frontera e iniciales, donde $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son funciones dadas de un punto. Más adelante demostraremos que estas condiciones determinan completamente la solución de la ecuación de las oscilaciones de una cuerda

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{52}$$

Si los extremos de la cuerda se mueven según cierta ley dada, las condiciones de frontera (50) toman otra forma:

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{50'}$$

donde $\mu_1(t)$ y $\mu_2(t)$ son funciones dadas del tiempo t. El problema de las oscilaciones longitudinales de una cuerda o de un resorte se plantea análogamente.

Son posibles también otros tipos de condiciones de frontera (o de contorno). Consideremos, por ejemplo, el problema sobre las oscilaciones longitudinales de un resorte, uno de cuyos extremos está fijo (punto de suspensión) y el otro, libre. La ley del movimiento del extremo libre no está dada, y a menudo es la función buscada.

En el punto de suspensión $x = 0$ la desviación es

$$u(0, t) = 0;$$

en el extremo libre $x = l$ la tensión del resorte

$$T(l, t) = k \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} \tag{53}$$

[1]) También llamadas «condiciones de contorno». (*N. del T.*)

es igual a cero (no hay fuerzas externas), de modo que el enunciado matemático de la condición de un extremo libre tiene la forma

$$u_x(l, t) = 0.$$

Si el extremo $x = 0$ se mueve según una ley dada $\mu(t)$, y en $x = l$ está dada la fuerza $\bar{\nu}(t)$, entonces

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = \nu(t) \quad \left(\nu(t) = \frac{1}{k}\bar{\nu}(t)\right).$$

Es también típica la condición de un enlace elástico, por ejemplo, para $x = l$,

$$ku_x(l, t) = -\alpha u(l, t),$$

o bien

$$u_x(l, t) = -hu(l, t) \quad \left(h = \frac{\alpha}{k}\right), \tag{54}$$

bajo la cual el extremo $x = l$ puede desplazarse, pero la fuerza elástica del enlace causa una tensión en este extremo, que tiende a volver el extremo desplazado a la posición original. Esta fuerza es, de acuerdo con la ley de Hooke, proporcional al desplazamiento $u(l, t)$; el coeficiente de proporcionalidad α se llama coeficiente de rigidez del enlace.

Si el punto (o el sistema), con respecto al cual tiene lugar un enlace elástico, se desplaza, y si su desviación de la posición inicial está dada por la función $\theta(t)$, entonces la condición de frontera toma la forma

$$u_x(l, t) = -h[u(l, t) - \theta(t)], \quad h = \frac{\alpha}{k} > 0. \tag{55}$$

La condición de un enlace elástico en el extremo izquierdo $x = 0$ tiene la forma

$$u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)], \quad h > 0$$

(formalmente se puede considerar que (55) tiene lugar también para $x = 0$, pero que $h < 0$). Hay que destacar que en el caso de un enlace rígido (α es grande), cuando aún pequeños desplazamientos del extremo originan grandes tensiones, la condición de frontera (55) pasa a la condición $u(l, t) = \mu(t)$ $(\alpha = \infty)$ para $\mu(t) = \theta(t)$. En el caso de un enlace suave (α es pequeño), para el cual desviaciones grandes del extremo originan tensiones débiles, la condición de frontera pasa a la condición de extremo libre

$$u_x(l, t) = 0 \quad (\alpha = 0).$$

En lo sucesivo, nos referiremos a tres tipos fundamentales de condiciones de frontera:

condición de frontera de primera especie: $u(0, t) =$
$= \mu(t)$, régimen dado;

condición de frontera de segunda especie: $u_x(0, t) =$
$= \nu(t)$, fuerza dada;

condición de frontera de tercera especie: $u_x(0, t) =$
$= h[u(0, t) - \theta(t)]$, enlace elástico.

Análogamente se plantean las condiciones de frontera en el segundo extremo $x = l$. Si las funciones dadas en el segundo miembro ($\mu(t)$, $\nu(t)$ ó $\theta(t)$) son iguales a cero, las condiciones de frontera se llaman *homogéneas*.

Combinando los distintos tipos enumerados de condiciones de frontera, obtenemos seis tipos de problemas de contorno simples.

Una condición de frontera más compleja tiene lugar, por ejemplo, cuando hay un enlace elástico que no se somete a la ley de Hooke, y la tensión en el extremo es una función no lineal del desplazamiento $u(l, t)$, de forma que

$$u_x(l, t) = \frac{1}{k} F[u(l, t)]. \tag{56}$$

Esta condición de frontera es no lineal, a diferencia de las consideradas más arriba. Además, pueden haber relaciones entre los desplazamientos y las tensiones en diferentes extremos del sistema. Por ejemplo, en los problemas de las oscilaciones de un anillo, cuando $x = 0$ y $x = l$ representan un mismo punto físico, las condiciones de frontera toman la forma

$$u(l, t) = u(0, t); \quad u_x(0\, t) = u_x(l, t), \tag{57}$$

es decir, se reducen a las exigencias de continuidad de u y de u_x. Las derivadas con respecto a t pueden figurar también en las condiciones de frontera. Si el extremo del resorte experimenta la resistencia del medio, proporcional a la velocidad de su movimiento (al extremo del resorte se ha ajustado una placa, cuyo plano es perpendicular al eje del resorte), la condición de frontera toma la forma

$$ku_x(l, t) = -\alpha u_t(l, t). \tag{58}$$

Si al extremo $x = l$ del resorte se le ajusta un peso de masa m, para $x = l$ debe cumplirse la condición

$$mu_{tt}(l, t) = -ku_x(l, t) + mg. \tag{59}$$

Para las oscilaciones transversales de la cuerda, todas las condiciones de frontera se escriben en la misma forma, sustituyendo k por T_0.

En lo sucesivo nos limitaremos a considerar los tres tipos más sencillos de condiciones de frontera, haciendo la exposición fundamental en el ejemplo del primer tipo de condición de frontera, y anotando sólo al paso las particularidades relacionadas con las condiciones segunda y tercera.

Formulemos el primer problema de contorno para la ecuación (5):

hallar la función $u(x, t)$, determinada en la región $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$, que satisfaga a la ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \text{para } 0 < x < l, \; t > 0,$$

a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \qquad (t > 0)^{1)}, \qquad (60')$$

y a las iniciales:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \qquad (0 < x < l). \qquad (60'')$$

Análogamente se plantea el problema para la ecuación (11).

Si en ambos extremos se toman condiciones de frontera de segunda o tercera especie, los problemas correspondientes se llaman segundo o tercer problema de contorno. Si las condiciones de frontera para $x = 0$ y $x = l$ son de diferente tipo, los problemas de contorno se denominan mixtos, sin hacer una clasificación más detallada.

Consideremos ahora los casos límite del problema planteado. La influencia de las condiciones de frontera sobre un punto M_0, suficientemente alejado de la frontera en la cual éstas están dadas, se deja sentir al cabo de un intervalo de tiempo suficientemente grande.

Si nos interesa el fenómeno durante un intervalo pequeño de tiempo, en el cual la influencia de las fronteras aún no es esencial, en lugar del problema completo se puede considerar el *problema* límite *con condiciones iniciales* para una región no acotada:

hallar la solución de la ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \text{ para } -\infty < x < \infty, \; t > 0,$$

con las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty. \qquad (61)$$

---

[1]) No nos detenemos en el caso en que las condiciones de frontera están dadas en el segmento $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Este problema con frecuencia se llama *problema de Cauchy*.

Si, en cambio, estudiamos el fenómeno en las cercanías de una frontera, y la influencia del régimen de frontera en la segunda frontera no posee significado sustancial durante el transcurso del intervalo de tiempo que nos interesa, obtenemos el planteamiento del problema en la semirrecta $0 \leqslant x < \infty$, en el que se dan, además de la ecuación, las condiciones complementarias

$$\left.\begin{array}{ll} u(0, t) = \mu(t), & t \geqslant 0, \\ \left.\begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{array}\right\} & 0 \leqslant x < \infty. \end{array}\right\} \quad (62)$$

El carácter del fenómeno para los momentos de tiempo suficientemente alejados del momento inicial $t = 0$, se determina completamente por los valores de frontera, puesto que la influencia de las condiciones iniciales a causa del rozamiento, que existe en cualquier sistema real, se debilita con el transcurso del tiempo[1]). Los problemas de este tipo se encuentran con particular frecuencia en los casos en que el sistema es excitado mediante un régimen de frontera periódico, que actúa durante un tiempo prolongado. Tales problemas «sin condiciones iniciales» (para determinar el régimen permanente) se formulan del siguiente modo:

hallar la solución de la ecuación estudiada para $0 \leqslant x \leqslant l$ y $t > -\infty$ con las condiciones de frontera

$$\left.\begin{array}{l} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t). \end{array}\right\} \quad (63)$$

Análogamente se plantea el problema sin condiciones iniciales para la semirrecta.

En lo sucesivo consideraremos, además de los problemas de contorno fundamentales, también los problemas límite:

1. Problemas en una región no acotada, cuando una o ambas fronteras se hallan en el infinito.
2. Problemas sin condiciones iniciales (para determinar el régimen permanente), cuando se considera la solución determinada durante un intervalo infinito de tiempo.

8. Reducción del problema general. Al encarar un problema complejo, es natural tratar de reducir su resolución a la de proble-

---

[1]) La ecuación de las oscilaciones considerando el rozamiento, proporcional a la velocidad, tiene la forma

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t \qquad (\alpha > 0).$$

Para más detalles sobre el planteamiento de los problemas sin condiciones iniciales para $\alpha = 0$ véase el p. 7 del § 3.

mas más sencillos. Con este fin, representaremos la solución del problema de contorno general en forma de suma de soluciones de varios problemas de contorno particulares.

Sean $u_i(x, t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ las funciones que satisfacen a las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f^i(x, t) \tag{64}$$

para $0 < x < l$, $t > 0$ y a las condiciones complementarias

$$\left.\begin{aligned} u_i(0, t) &= \mu_1^i(t), \\ u_i(l, t) &= \mu_2^i(t); \\ u_i(x, 0) &= \varphi^i(x), \\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x, 0) &= \psi^i(x). \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Evidentemente, tiene lugar la superposición de las soluciones, o sea, la función

$$u^{(0)}(x, t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x, t) \tag{66}$$

satisface a una ecuación análoga cuyo segundo miembro es

$$f^{(0)}(x, t) = \sum_{i=1}^{n} f^i(x, t) \tag{67}$$

y a las condiciones complementarias, cuyos segundos miembros son las funciones

$$\left.\begin{aligned} \mu_k^{(0)}(t) &= \sum_{i=1}^{n} \mu_k^i(t) \quad (k = 1, 2), \\ \varphi^{(0)}(x) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi^i(x), \\ \psi^{(0)}(x) &= \sum_{i=1}^{n} \psi^i(x). \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

El principio de superposición antedicho se refiere, evidentemente, no sólo al problema dado, sino también a cualquier ecuación lineal con condiciones complementarias lineales. Esta propiedad será utilizada con frecuencia en lo sucesivo.

La solución del problema general de contorno

$$\left.\begin{array}{l} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \\ (0 < x < l, \ t > 0); \\ u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t); \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{array}\right\} \qquad (69)$$

puede ser representada como la suma

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + u_4(x, t), \qquad (70)$$

en donde u_1, u_2, u_3, u_4 son las soluciones de los siguientes problemas de contorno particulares:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad (i = 1, 2, 3), \\ \dfrac{\partial^2 u_4}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + f(x, t), \end{array} \qquad (0 < x < l, \ t > 0),$$

$$\left.\begin{array}{llll} u_1(0, t) = 0, & u_2(0, t) = \mu_1(t), & u_3(0, t) = 0, & u_4(0, t) = 0, \\ u_1(l, t) = 0, & u_2(l, t) = 0; & u_3(l, t) = \mu_2(t); & u_4(l, t) = 0; \\ u_1(x, 0) = \varphi(x), & u_2(x, 0) = 0, & u_3(x, 0) = 0, & u_4(x, 0) = 0, \\ u_{1_t}(x, 0) = \psi(x); & u_{2_t}(x, 0) = 0; & u_{3_t}(x, 0) = 0; & u_{4_t}(x, 0) = 0. \end{array}\right\} \quad (71)$$

Aquí nos hemos limitado a dar esta reducción formal, con el fin de caracterizar los problemas de contorno particulares que constituyen las etapas fundamentales de la resolución del problema general. Una reducción análoga puede ser efectuada también para los casos límite del problema de contorno general.

9. Planteamiento de los problemas de contorno para el caso de varias variables. Hemos considerado detalladamente el planteamiento de los problemas de contorno para el caso de una variable geométrica independiente x (y del tiempo t). Si el número de variables geométricas es $n > 1$ (por ejemplo, $n = 3$), el primer problema de contorno se plantea de manera totalmente semejante:

se pide hallar la función $u(M, t) = u(x, y, z, t)$, determinada para $t \geqslant 0$ dentro de una región dada T de frontera Σ, que satisfaga para $t > 0$, dentro de T, a la ecuación

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(M, t) \ (M(x, y, z) \in T, \ t > 0), \qquad (72)$$

a la condición de frontera en Σ

$$u|_{\Sigma}=\mu(P, t) \quad (P(x, y, z)\in\Sigma, t>0) \tag{73}$$

($\mu(x, y, z, t)$ es una función dada en Σ) y a las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} u(M, 0)=\varphi(M), \\ u_t(M, 0)=\psi(M) \end{array}\right\} \quad (M(x, y, z)\in T). \tag{74}$$

La descomposición del problema general de contorno en varios más simples se efectúa análogamente a lo expuesto anteriormente. Obsérvese que es posible también el planteamiento de los problemas límite de contorno para una región no acotada, para el semiespacio, etc.

10. Teorema de unicidad. Al resolver los problemas de contorno:

1) hay que comprobar que las condiciones complementarias son suficientes para obtener una solución única; esto se obtiene demostrando el teorema *de unicidad*;

2) hay que demostrar que las condiciones complementarias no se exceden en la determinación del problema, es decir, que entre éstas no hay condiciones incompatibles; esto se obtiene demostrando el teorema *de existencia*; la demostración de la existencia de la solución con frecuencia está estrechamente ligada al método de determinación de ésta.

En el presente punto demostraremos el siguiente *teorema de unicidad*:

Puede existir solamente una función $u(x, t)$, determinada en la región $0\leqslant x\leqslant l$, $t\geqslant 0$, y que satisfaga a la ecuación

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+F(x, t) \quad (\rho(x)>0,\ k(x)>0), \tag{75}$$

$$0<x<l, \quad t>0,$$

y a las condiciones iniciales y de frontera

$$\left.\begin{array}{ll} u(x, 0)=\varphi(x), & u_t(x, 0)=\psi(x), \\ u(0, t)=\mu_1(t), & u(l, t)=\mu_2(t), \end{array}\right\} \tag{76}$$

si se cumplen las condiciones:

1) la función $u(x, t)$ y las derivadas de ésta que figuran en la ecuación (75), así como también la derivada u_{xt}, son continuas en el segmento $0\leqslant x\leqslant l$ para $t\geqslant 0$;

2) los coeficientes $\rho(x)$ y $k(x)$ son continuos en el segmento $0\leqslant x\leqslant l$.

Supongamos que existen dos soluciones del problema considerado:

$$u_1(x, t), \ u_2(x, t),$$

y consideremos la diferencia $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$.

La función $v(x, t)$ satisface, evidentemente, a la ecuación homogénea

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{77}$$

y a las condiciones complementarias homogéneas

$$\left.\begin{array}{ll} v(x, 0) = 0, & v(0, t) = 0, \\ v_t(x, 0) = 0; & v(l, t) = 0, \end{array}\right\} \tag{78}$$

así como a la condición 1) del teorema.

Demostremos que la función $v(x, t)$ es idénticamente nula.

Tomemos la función

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \{k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2\}\, dx \tag{79}$$

y demostremos que no depende de t. El sentido físico de la función $E(t)$ es evidente: es la energía total de la cuerda en el momento de tiempo t. Derivemos $E(t)$ con respecto a t, efectuando la derivación bajo el signo integral[1]):

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l (kv_x v_{xt} + \rho v_t v_{tt})\, dx.$$

Integrando por partes el primer sumando del segundo miembro, tendremos:

$$\int_0^l kv_x v_{xt}\, dx = [kv_x v_t]_0^l - \int_0^l v_t (kv_x)_x\, dx. \tag{80}$$

El primer término se anula en virtud de las condiciones de frontera ($v(0, t) = 0$ implica $v_t(0, t) = 0$, y lo mismo para $x = l$). De aquí se deduce que

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l [\rho v_t v_{tt} - v_t (kv_x)_x]\, dx = \int_0^l v_t [\rho v_{tt} - (kv_x)_x]\, dx = 0.$$

---

[1]) Para poder derivar bajo el signo integral, es suficiente que la expresión subintegral que se obtiene sea continua en el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$ para $t \geqslant 0$. Esta condición se cumple en nuestro caso, puesto que la función $v(x, t)$ satisface a la condición 1) del teorema, y $\rho(x)$ y $k(x)$, a la condición 2).

es decir, $E(t) = \text{const}$. Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, obtenemos:

$$E(t) = \text{const} = E(0) = \frac{1}{2}\int_0^l [k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2]_{t=0}\,dx = 0, \qquad (81)$$

puesto que

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0.$$

Aplicando la fórmula (81) y el hecho de que k y ρ son positivas, concluimos que

$$v_x(x, t) \equiv 0, \quad v_t(x, t) \equiv 0,$$

de donde se sigue la identidad

$$v(x, t) = \text{const} = C_0. \qquad (82)$$

Aplicando la condición inicial, hallamos que

$$v(x, 0) = C_0 = 0;$$

con esto queda demostrado que

$$v(x, t) \equiv 0. \qquad (83)$$

En consecuencia, si existen dos funciones $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ que satisfacen a todas las condiciones del teorema, entonces $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$.

Para el segundo problema de contorno, la función $v = u_1 - u_2$ satisface a las condiciones de frontera

$$v_x(0, t) = 0, \quad v_x(l, t) = 0, \qquad (84)$$

y el primer término del segundo miembro en la fórmula (80) también se anula. La parte restante de la demostración del teorema se conserva sin cambios.

Para el tercer problema de contorno la demostración exige algún cambio. Considerando, como antes, dos soluciones u_1 y u_2, obtenemos para su diferencia $v(x, t) = u_1 - u_2$ la ecuación (77) y las condiciones de frontera

$$\left.\begin{aligned} v_x(0, t) - h_1 v(0, t) &= 0 \quad (h_1 \geqslant 0), \\ v_x(l, t) + h_2 v(l, t) &= 0 \quad (h_2 \geqslant 0). \end{aligned}\right\} \qquad (85)$$

Expresemos el primer término del segundo miembro de (80) en la forma

$$[kv_x v_t]_0^l = -\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial t}[h_2 v^2(l, t) + h_1 v^2(0, t)].$$

Integrando $\frac{dE}{dt}$ en los límites desde cero hasta t, se obtiene:

$$E(t) - E(0) = \int_0^t \int_0^l v_t [\rho v_{tt} - (kv_x)_x] \, dx \, dt -$$

$$- \frac{k}{2} \{h_2 [v^2(l, t) - v^2(l, 0)] + h_1 [v^2(0, t) - v^2(0, 0)]\},$$

de donde se deduce, en virtud de la ecuación y de las condiciones iniciales, que

$$E(t) = -\frac{k}{2} [h_2 v^2(l, t) + h_1 v^2(0, t)] \leqslant 0. \tag{86}$$

Como $E(t) \geqslant 0$, en virtud de que el integrando no es negativo, entonces

$$E(t) \equiv 0, \tag{87}$$

y, por lo tanto, también

$$v(x, t) \equiv 0. \tag{88}$$

El método de demostración del teorema de unicidad que hemos expuesto, basado en la aplicación de la expresión de la energía total, se aplica ampliamente en la demostración de teoremas de unicidad en diferentes ramas de la física matemática, por ejemplo, en la teoría de los campos electromagnéticos, en la teoría de la elasticidad y en la hidrodinámica.

La demostración de la unicidad de otros problemas de contorno (problemas de Cauchy y problemas sin condiciones iniciales) será dada en lo sucesivo en el sitio correspondiente.

EJERCICIOS

1. Demostrar que la ecuación de las oscilaciones pequeñas de rotación de una barra tienen la forma

$$\theta_{tt} = a^2 \theta_{xx}, \quad a = \sqrt{\frac{GJ}{k}},$$

donde θ es el ángulo de giro del corte de la barra de abscisa x; G, el módulo del desplazamiento; J, el momento polar de inercia del corte transversal, y k, el momento de inercia de la unidad de longitud de la barra. Dar una interpretación física de las condiciones de frontera de primera, segunda y tercera especie para esta ecuación.

2. Un hilo homogéneo totalmente flexible está fijo de uno de sus extremos y se halla en la posición vertical de equilibrio, bajo la acción de su peso. Deducir la ecuación de las pequeñas oscilaciones del hilo.

Respuesta: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right], \; a^2 = g,$

donde $u(x, t)$ es el desplazamiento del punto; l, la longitud del hilo; g, la aceleración de la fuerza de gravedad.

3. Un hilo homogéneo pesado de longitud l, fijo en su punto superior ($x = 0$) al eje vertical, gira alrededor de éste con velocidad angular constante ω. Deducir la ecuación de las pequeñas oscilaciones del hilo alrededor de su posición vertical de equilibrio.

Respuesta: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \omega^2 u$, donde $a^2 = g$.

4. Deducir la ecuación de las oscilaciones transversales de una cuerda en un medio cuya resistencia es proporcional a la primera potencia de la velocidad.

Respuesta: $v_{tt} = a^2 v_{xx} - h^2 v_t, \; a^2 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$.

5. Deducir las condiciones de frontera para la ecuación de las oscilaciones longitudinales de una barra flexible (resorte) en el caso en que el extremo superior de la barra está fijo en forma rígida, y en el inferior se ha asegurado un peso P, si:

a) como posición de equilibrio se toma la posición tensa de la barra bajo la acción del peso inmóvil P, colgado del extremo inferior (estiramiento estático);

b) como posición de equilibrio se toma el estado de la barra sin tensión (por ejemplo, en el momento inicial se quita de debajo del peso un soporte, y el peso comienza a estirar la barra).

6. Escribir la ecuación y las condiciones que determinan el proceso de oscilaciones de rotación de una barra, si a ambos extremos de ésta se han fijado roldanas.

Respuesta: Para $x = 0$, $x = l$, deben cumplirse condiciones de frontera de la forma

$$\theta_{tt}(0, t) = \alpha_1^2 \theta_x(0, t), \; \theta_{tt}(l, t) = -\alpha_2^2 \theta_x(l, t).$$

7. En cierto punto $x = x_0$ de la cuerda ($0 \leqslant x \leqslant l$) hay colgado un peso de masa M. Deducir las condiciones de conjunción en el punto $x = x_0$.

8. Al extremo $x = l$ de una barra elástica, que está fija elásticamente en el punto $x = 0$, se le ha colgado un peso de masa M. Escribir la ecuación y las condiciones que determinan las oscilaciones longitudinales de la barra, suponiendo que sobre ésta actúa, además, una fuerza exterior. Considerar dos casos:

a) la fuerza está distribuida por la barra con densidad $F(x, t)$;

b) la fuerza está concentrada en el punto $x = x_0$, y es igual a $F_0(t)$.

9. Estudiar el proceso de las pequeñas oscilaciones de un gas ideal en un tubo cilíndrico. Deducir primeramente las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica y luego, suponiendo que el proceso es adiabático, deducir la ecuación diferencial para: 1) la densidad ρ, 2) la presión p, 3) el potencial U de la velocidad de las partículas del

gas, 4) la velocidad v, 5) el desplazamiento u de las partículas. Citar ejemplos en que tienen lugar las condiciones de frontera de primera, segunda y tercera especie para estas ecuaciones.

10. Establecer las relaciones de semejanza que hay entre los procesos oscilatorios mecánicos, acústicos y eléctricos (véase el apéndice VI del capítulo II).

11. Citar ejemplos de condiciones de frontera de primero, segundo y tercer tipo para las ecuaciones telegráficas.

12. Estudiar el problema de las oscilaciones longitudinales de una barra inhomogénea ($k = k_1$ para $x < x_0$, $k = k_2$ para $x > x_0$) y deducir las condiciones de conjunción en el punto de union de las partes no homogéneas de la barra (en $x = x_0$).

13. Dar la interpretación física de la condición de frontera

$$\alpha u_x(0, t) + \beta u_t(0, t) = 0.$$

14. Citar un ejemplo de modelo mecánico para el cual tenga lugar la ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + b u_t + c u.$$

§ 2. METODO DE LA PROPAGACION DE LAS ONDAS

1. Fórmula de D'Alembert. Comenzaremos el estudio de los métodos de determinación de las soluciones de los problemas de contorno para las ecuaciones de tipo hiperbólico por el problema con condiciones iniciales para la cuerda no acotada:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Transformemos esta ecuación a la forma canónica que contiene a la derivada mixta (véase el cap. I). La ecuación de las características

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

se divide en dos:

$$dx - a\,dt = 0, \quad dx + a\,dt = 0,$$

cuyas integrales son las rectas

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Introduciendo, como de costumbre, las nuevas variables

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at,$$

la ecuación de las oscilaciones de la cuerda se reduce a la forma:

$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{3}$$

Hallemos la integral general de la última ecuación. Evidentemente, para cualquier solución de la ecuación (3) será

$$u_\eta(\xi, \eta) = f^*(\eta),$$

donde $f^*(\eta)$ es cierta función sólo de la variable η. Integrando esta igualdad con respecto a η para ξ fijas, se obtiene:

$$u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta)\,d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \tag{4}$$

donde f_1 y f_2 son funciones sólo de las variables ξ y η. Recíprocamente, para cualesquiera funciones f_1 y f_2, derivables dos veces, la función $u(\xi, \eta)$ determinada por la fórmula (4) es la solución de la ecuación (3). Como cualquier solución de la ecuación (3) puede ser representada en la forma (4) escogiendo adecuadamente f_1 y f_2, la fórmula (4) es la integral general de dicha ecuación. Por consiguiente, la función

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \tag{5}$$

es la integral general de la ecuación (1).

Supongamos que la solución del problema considerado existe; entonces, ésta se expresa mediante la fórmula (5). Determinemos las funciones f_1 y f_2 de modo que se cumplan las condiciones iniciales:

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \tag{6}$$

$$u_t(x, 0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \tag{7}$$

Integrando la segunda igualdad, obtenemos:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + C,$$

donde x_0 y C son constantes. A partir de las igualdades

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)\,d\alpha + C,$$

se halla:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)\,d\alpha + \frac{C}{2}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)\,d\alpha - \frac{C}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

De este modo, hemos determinado las funciones f_1 y f_2 mediante las funciones dadas φ y ψ, y las igualdades (8) deben tener lugar para cualquier valor del argumento [1]). Sustituyendo en (5) los valores hallados de f_1 y f_2, se obtiene:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\left\{\int_{x_0}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha - \int_{x_0}^{x-at}\psi(\alpha)\,d\alpha\right\},$$

o bien

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\alpha)\,d\alpha. \qquad (9)$$

Hemos obtenido la fórmula (9), llamada fórmula de D'Alembert, bajo la hipótesis de la existencia de la solución del problema planteado. Esta fórmula demuestra la unicidad de la solución. En efecto, si existiera una segunda solución del problema (1)—(2) ésta se representaría mediante la fórmula (9), y coincidiría con la primera solución.

No es difícil comprobar que la fórmula (9) satisface (bajo la hipótesis de que φ es derivable dos veces, y la función ψ, una vez) a la ecuación y a las condiciones iniciales. De esta manera, el método expuesto demuestra tanto la unicidad como la existencia de la solución del problema planteado.

2. Interpretación física. La función $u(x, t)$, determinada por la fórmula (9), representa el proceso de propagación de la desviación y velocidad iniciales. Si fijamos $t = t_0$, la función $u(x, t_0)$ da el perfil de la cuerda en el momento t_0; fijando $x = x_0$, obtenemos la función $u(x_0, t)$ que da el proceso del movimiento del punto x_0 (fig. 4). Supongamos que un observador, que se hallaba en el punto $x = 0$ en el momento $t = 0$, se mueve con velocidad a en el sentido positivo. Introduzcamos un sistema de coordenadas relacionado con el observador, haciendo $x' = x - at$,

[1]) En la fórmula (5) las funciones f_1 y f_2 no están determinadas unívocamente. Si restamos de f_1 cierta constante C_1 y si la sumamos a f_2, u no varía. En la fórmula (8) la constante C no se determina mediante φ y ψ; sin embargo, podemos eliminarla sin cambiar el valor de u. Al sumar f_1 y f_2, los sumandos $\frac{C}{2}$ y $-\frac{C}{2}$ se simplifican.

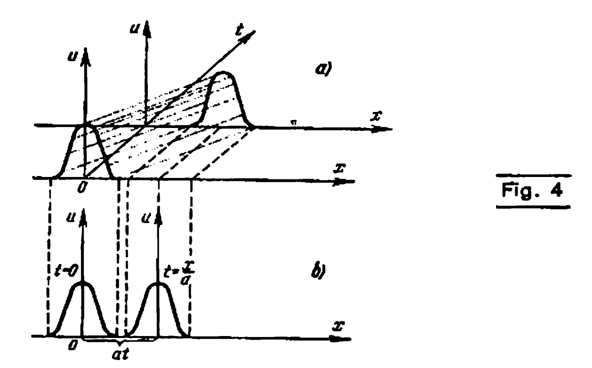


Fig. 4

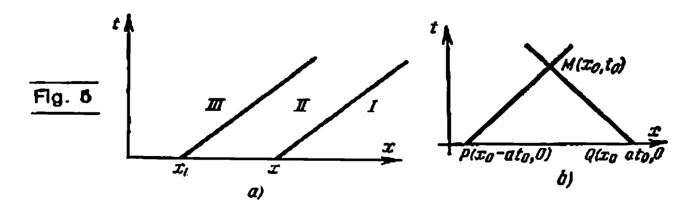
$t' = t$. En este sistema móvil de coordenadas, la función $u(x, t) = f(x - at)$ se determinará mediante la fórmula $u = f(x')$, y el observador verá todo el tiempo el mismo perfil que en el momento inicial. Por lo tanto, la función $u(x, t) = f(x - at)$ es el perfil invariable $f(x)$, que se desplaza hacia la derecha (en el sentido positivo del eje x) con velocidad a (onda que se propaga, o que corre). La función $f(x + at)$ representa, evidentemente, una onda que se desplaza hacia la izquierda (en el sentido negativo del eje x) con velocidad a. De este modo, la solución general (9) del problema de Cauchy para la cuerda infinita es la superposición de dos ondas, $f_1(x + at) + f_2(x - at)$, una de las cuales se desplaza hacia la derecha con velocidad a, y la otra, hacia la izquierda con la misma velocidad. Además

$$f_1(x + at) = \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \Psi(x + at), \quad f_2(x - at) = \frac{1}{2}\varphi(x - at) - \Psi(x - at),$$

donde

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\alpha)\,d\alpha.$$

Para esclarecer el carácter de la solución (9), resulta cómodo utilizar el plano (x, t), o «plano de fases». Las rectas $x - at = \text{const}$ y $x + at = \text{const}$ son las características de la ecuación (1). La función $u = f(x - at)$ se mantiene constante a lo largo de la característica $x - at = \text{const}$; la función $u = f(x + at)$ es constante a lo largo de la característica $x + at = \text{const}$.



Supongamos que $f(x)$ es diferente de cero sólo en el intervalo (x_1, x_2), y es nula fuera de este intervalo. Tracemos las características $x - at = x_1$ y $x - at = x_2$ por los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$; éstas dividen al semiplano $(x, t > 0)$ en tres regiones, I, II y III (fig. 5, *a*). La función $u = f(x - at)$ es distinta de cero sólo en la región II, donde $x_1 < x - at < x_2$, y las características $x - at = x_1$ y $x - at = x_2$ representan los frentes delantero y trasero de la onda que se propaga hacia la derecha.

Tomemos ahora un punto fijo (x_0, t_0), y tracemos por él ambas características $x - at = x_0 - at_0$ y $x + at = x_0 + at_0$, las cuales cortarán al eje x en los puntos $x_1 = x_0 - at_0$, $t = 0$ y $x_2 = x_0 + at_0$, $t = 0$. El valor de la función $u = f_1(x - at) + f_2(x + at)$ en el punto (x_0, t_0) es igual a $u(x_0, t_0) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, es decir, se determina por los valores de las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, que son los vértices del triángulo MPQ (fig. 5, *b*), formado por las dos características y el eje x. Este triángulo se llama triángulo característico del punto (x_0, t_0). De la fórmula (9) se aprecia que la desviación $u(x_0, t_0)$ del punto de la cuerda en el momento t_0 depende sólo de los valores de la desviación inicial en los vértices $P(x_0 - at_0, 0)$ y $Q(x_0 + at_0, 0)$ del triángulo característico MPQ, y de los valores de la velocidad inicial en el lado PQ. Esto se esclarece particularmente, si se escribe la fórmula (9) en la forma

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{PQ} \psi(\alpha)\, d\alpha. \tag{10}$$

Los datos iniciales dados fuera de PQ no ejercen influencia en el valor de $u(x, t)$ en el punto $M(x_0, t_0)$. Si las condiciones iniciales están dadas no en toda la recta infinita, sino en el segmento P_1Q_1, éstos determinan unívocamente la solución dentro del triángulo característico cuya base es el segmento P_1Q_1.

3. Ejemplos. La solución (9) se puede escribir en forma de la suma $u = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, donde

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)], \tag{11}$$

$$u_2(x, t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha. \tag{12}$$

Si la velocidad inicial es igual a cero ($\psi(x) = 0$), la desviación $u = u_1(x, t)$ es la suma de las ondas que se propagan hacia la derecha y hacia la izquierda; además, la forma inicial de ambas ondas se determina por la función $0{,}5\varphi(x)$, que es igual a la mitad de la desviación inicial. Si, en cambio, $\varphi(x) = 0$, entonces $u = u_2(x, t)$ es la desviación de la cuerda causada por la velocidad inicial.

Ejemplo 1. Estudiemos la propagación de una desviación inicial dada en forma de triángulo equilátero. Este perfil inicial se puede obtener si se tira de la cuerda en el medio del segmento $[x_1, x_2]$. En la fig. 6 se representan las posiciones sucesivas de la cuerda a intervalos de tiempo $\Delta t = (x_2 - x_1)/8a$.

Se puede obtener una representación gráfica sobre el carácter del proceso de propagación mediante el plano de fases (x, t). Tracemos las características por los puntos $P(x_1, 0)$ y $Q(x_2, 0)$; éstas dividirán al semiplano $(-\infty < x < \infty, t \geqslant 0)$ en seis regiones (fig. 7). La desviación $u_1(x, t)$ en cualquier punto (x, t) se da por la fórmula (11). Por esto, en las regiones I, III, V la desviación es igual a cero, ya que el triángulo característico de cualquier punto de estas regiones no tiene puntos comunes con el segmento $[x_1, x_2]$, en el cual están dadas las condiciones iniciales. En la región II la solución es la «onda derecha» $u = 0{,}5\varphi(x - at)$; en la IV, la «onda izquierda» $u = 0{,}5\varphi(x + at)$; en la región VI la solución es la suma de la onda «izquierda» y de la «derecha».

Ejemplo 2. Supongamos que la desviación inicial es $\varphi(x) \equiv 0$, y que la velocidad inicial es diferente de cero solamente en el segmento $[x_1, x_2]$, donde ésta toma el valor constante ψ_0: $\psi(x) = \psi_0$ para $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, $\psi(x) = 0$ para $x > x_2$ y $x < x_1$. En este caso, la solución es la función $u_2(x, t)$. Calculemos la función $\Psi(x)$, eligiendo $x_0 = 0$ (fig. 8):

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\alpha)\, d\alpha = \begin{cases} 0 \text{ para } x < x_1, \\ (x - x_1)\,\Psi_0/2a \text{ para } x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \\ (x_2 - x_1)\,\psi_0/2a \text{ para } x > x_2. \end{cases} \tag{13}$$

Fig 6

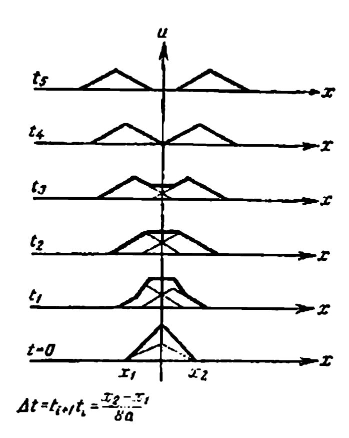
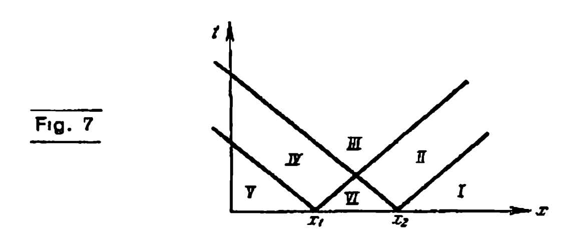


Fig. 7



La solución $u_2(x, t)$ es la diferencia de las ondas derecha e izquierda con perfil $\Psi(x)$. Las posiciones sucesivas de estas ondas, a intervalos de tiempo $\Delta t = (x_2 - x_1)/8a$, están representadas en la fig. 9. El perfil de la cuerda para $t \gg 4\Delta t$ tiene la forma de un trapecio que se ensancha uniformemente con el transcurso del tiempo. Si $\psi(x)$ no es constante en $[x_1, x_2]$, cambia sólo el perfil de $\Psi(x)$.

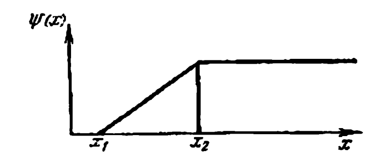


Fig. 8

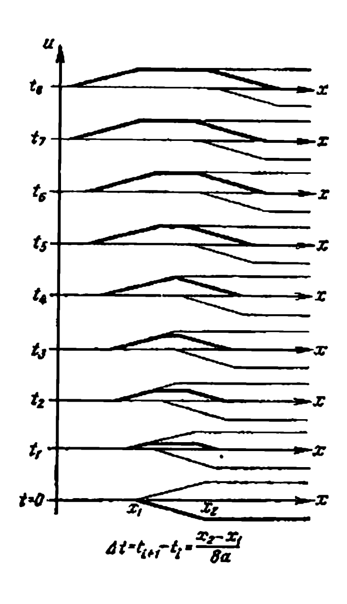


Fig. 9

Para esclarecer el carácter de la solución, utilicemos el plano de fases (x, t) (fig. 7). Escribamos las expresiones para $u(x, t)$ en diferentes regiones del plano de fases.

En la región I $(x - at > x_2)$ es $\Psi(x + at) = \Psi(x - at) = \text{const}$, $u(x, t) = 0$.

En la región V $(x + at < x_1)$ es $\Psi(x - at) = \Psi(x + at) = 0$, $u(x, t) = 0$.

En la región *III* $(x - at < x_1,\ x + at > x_2)$ es

$$\Psi'(x + at) = \text{const} = \frac{x_2 - x_1}{2a}\psi_0,$$

$$\Psi'(x - at) = 0, \quad u(x, t) = \frac{x_2 - x_1}{2a}\psi_0.$$

En la región *II* $(x_1 < x - at < x_2,\ x + at > x_2)$ es

$$\Psi'(x + at) = \frac{x_2 - x_1}{2a}\psi_0,$$

$$\Psi'(x - at) = \frac{x - at - x_1}{2a}\psi_0, \quad u(x, t) = \frac{x_2 - (x - at)}{2a}\psi_0.$$

En la región *IV* $(x_1 < x + at < x_2,\quad x - at < x_1)$ es

$$\Psi'(x + at) = \frac{x + at - x_1}{2a}\psi_0, \quad \Psi'(x - at) = 0,$$

$$u(x, t) = \frac{x + at - x_1}{2a}\psi_0.$$

En la región *VI* $(x - at > x_1,\ x + at < x_2)$ es

$$\Psi'(x + at) = \frac{x + at - x_1}{2a}\psi_0,$$

$$\Psi'(x - at) = \frac{x - at - x_1}{2a}\psi_0, \quad u(x, t) = t\psi_0.$$

Ejemplo 3. Consideremos el problema sobre las oscilaciones de una cuerda bajo la acción de un impulso concentrado. Dándole a los puntos de la cuerda $(x,\ x + \Delta x)$ una velocidad constante ψ_0 en el momento inicial (por ejemplo, golpeando a la cuerda con un martillito), aplicamos a esta parte un impulso I, igual al cambio de la cantidad de movimiento para $t = 0$, de forma que $I = \rho\Delta x\psi_0$, donde ρ es la densidad lineal de la cuerda. De esta manera, debemos resolver el problema sobre las oscilaciones de una cuerda con desviación inicial nula y velocidad inicial $\psi = I_0/\rho = \psi_0$ en el intervalo $(x,\ x + \Delta x)$, $\psi = 0$ fuera de este intervalo; aquí $I_0 = I/\Delta x$ es la densidad del impulso. El aná-

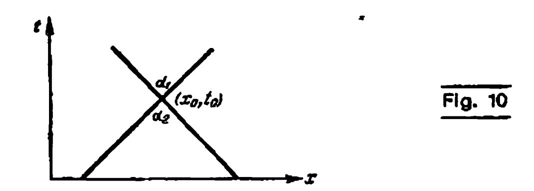


Fig. 10

lisis de la solución de este problema fue dado más arriba al resolver el ejemplo 2. La desviación causada por el impulso distribuido en el intervalo $(x, x + \Delta x)$ es, para $t > \Delta x/2a$, un trapecio con base inferior $2at + \Delta x$ y superior $2at - \Delta x$. Efectuando el paso al límite cuando $\Delta x \to 0$, $I_0 = \text{const}$, apreciamos que las desviaciones serán iguales a cero fuera de $(x - at, x + at)$, y a $I/2a\rho$ dentro de este intervalo. Se puede decir convencionalmente que estas desviaciones son originadas por el impulso puntual I.

Consideremos el plano de fases (x, t) y tracemos por el punto (x_0, t_0) ambas características:

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0$$

(fig. 10). Éstas determinan dos ángulos, α_1 y α_2, llamados ángulos característicos superior y, respectivamente, inferior para el punto (x_0, t_0).

La acción del impulso puntual en el punto (x_0, t_0) causa una desviación igual a $\frac{1}{2a}\frac{I_0}{\rho}$ dentro del ángulo característico superior, y a cero fuera de éste

4. Ecuación no homogénea. Consideremos el problema de Cauchy para la ecuación no homogénea de las oscilaciones

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{a^2} u_{tt} = u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ &u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Sea $w_f(x, t; \tau)$ la solución del problema auxiliar de Cauchy

$$\frac{1}{a^2}(w_f)_{tt} = (w_f)_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > \tau; \tag{15}$$

$$w_f(x, \tau; \tau) = 0, \quad \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, \tau; \tau) = f(x, \tau), \quad t = \tau, \quad -\infty < x < \infty. \tag{16}$$

La fórmula de D'Alembert (9) da

$$w_f(x, t; \tau) = w_f(x, t-\tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi. \tag{17}$$

Escribamos la fórmula de D'Alembert (9) en la forma

$$u(x, t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x, t; 0) + w_\psi(x, t; 0), \tag{18}$$

donde

$$w_\psi(x, t; 0) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi, \quad w_\varphi(x, t; 0) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)\, d\xi$$

son las soluciones del problema (15), (16) para $\tau = 0$ y $f = \psi(x)$, $f = \varphi(x)$ respectivamente, puesto que la derivación directa demuestra que

$$\frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x, t; 0) = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi)\, d\xi = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}.$$

Demostremos que tiene lugar el siguiente lema:

La solución de la ecuación no homogénea (14) con datos iniciales nulos $u_t(x, 0) = 0$, $u(x, 0) = 0$ tiene la forma

$$u(x, t) = a^2 \int_0^t w_f(x, t; \tau)\, d\tau. \tag{19}$$

Derivando la función (19) y considerando las condiciones (16) para $w_f(x, t; \tau)$, se halla:

$$u_t(x, t) = a^2 w_f(x, t; t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t; \tau)\, d\tau = a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t; \tau)\, d\tau, \tag{20}$$

$$u_{tt}(x, t) = a^2 \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t; t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t; \tau)\, d\tau =$$

$$= a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t; \tau)\, d\tau + a^2 f(x, t),$$

$$u_{xx} = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2}(x, t; \tau)\, d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t; \tau)\, d\tau.$$

De aquí se aprecia que la función (19) satisface a la ecuación (14). De las fórmulas (19) y (20) se deduce de inmediato que:

La solución del problema (14), en virtud de (18) y (19), se puede representar en la forma

$$u(x, t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x, t; 0) + w_\psi(x, t; 0) + a^2 \int_0^t w_f(x, t; \tau)\, d\tau. \qquad (21)$$

Aplicando la expresión (17) para w_f, obtenemos:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{a}{2}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \qquad (22)$$

La sustitución directa de (22) en (14) muestra que la función (22) es efectivamente la solución del problema (14), si existen las derivadas $\varphi''(x)$, $\psi'(x)$ y $\partial f/\partial x$.

De la fórmula (17) se deduce que la función u_f satisface a la ecuación para $t = \tau$, si f es derivable respecto a x, es decir, la representación (21) es posible bajo las mismas condiciones que aseguran la existencia de la solución del problema de Cauchy.

La fórmula (21) demuestra que la solución del problema general (14) puede ser escrita directamente, si se tiene la solución del problema auxiliar (15)—(16). Para la solución del problema de Cauchy en el espacio no acotado tiene lugar también una fórmula análoga (véase el cap. V).

5. **Estabilidad de las soluciones.** La solución de la ecuación (1) se determina unívocamente mediante las condiciones iniciales (2). Demostremos que esta solución varía en forma continua si las condiciones iniciales varían en forma continua.

Para cualquier intervalo de tiempo $[0, t_0]$ y cualquier grado de exactitud ε, existe un $\delta(\varepsilon, t_0)$ tal que dos soluciones cualesquiera de la ecuación (1) $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ se diferenciarán durante el intervalo de tiempo t_0 en menos que ε:

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0),$$

siempre que los valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{l} u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = \psi_1(x) \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{l} u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(x) \end{array}\right.$$

se diferencien en menos que δ:

$$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|<\delta; \quad |\psi_1(x)-\psi_2(x)|<\delta.$$

La demostración de este teorema es sumamente sencilla. Las funciones $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ están relacionadas con sus valores iniciales por la fórmula (9), de modo que

$$|u_1(x, t)-u_2(x, t)| \leqslant \frac{|\varphi_1(x+at)-\varphi_2(x+at)|}{2}+$$
$$+\frac{|\varphi_1(x-at)-\varphi_2(x-at)|}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}|\psi_1(\alpha)-\psi_2(\alpha)|\,d\alpha,$$

de donde, en virtud de las desigualdades (11), se obtiene:

$$|u_1(x, t)-u_2(x, t)| \leqslant \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2a}\delta\cdot 2at \leqslant \delta(1+t_0),$$

lo que demuestra nuestra afirmación, si hacemos

$$\delta=\frac{\varepsilon}{1+t_0}.$$

Cualquier proceso físicamente determinado, que se desarrolla con el transcurso del tiempo, debe caracterizarse mediante funciones que dependan en forma continua de los valores iniciales. Si no existiera esta dependencia continua, dos procesos esencialmente distintos podrían responder a sistemas de condiciones iniciales prácticamente iguales (cuya diferencia se halla en los límites de exactitud de las mediciones). Los procesos de este tipo no se pueden considerar determinados (físicamente) por tales condiciones iniciales. Del teorema anterior se deduce que el proceso de las oscilaciones de una cuerda está determinado no sólo matemáticamente, sino también físicamente, por las condiciones iniciales.

Si la solución de un problema matemático depende en forma continua de las condiciones complementarias (de las condiciones iniciales, de frontera y del segundo miembro de la ecuación, o sea, de los datos iniciales del problema), se dice que el problema es estable.

En relación con el estudio de los fenómenos determinados físicamente se introduce el concepto de problema correcto. Se dice que un problema matemático está planteado correctamente, si 1) la solución del problema existe, 2) éste posee solución única,

3) la solución del problema depende en forma continua de los datos iniciales (es estable).

Obsérvese que en las aplicaciones se encuentran con frecuencia problemas planteados incorrectamente, entre los cuales hay muchos problemas matemáticos bien conocidos.

Citemos un ejemplo de un problema planteado en forma incorrecta, cuya solución es inestable.

La función $u(x, y)$, que es solución de la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$, se determina unívocamente por sus condiciones iniciales[1] $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_y(x, 0) = \psi(x)$. Consideremos las funciones $u^{(1)}(x, y) \equiv 0$ y $u^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda x \cdot \operatorname{ch} \lambda y$, que satisfacen a la ecuación de Laplace. La función $u^{(2)}(x, y)$ depende del parámetro λ. Los valores iniciales

$$u^{(1)}(x, 0) = 0, \quad u^{(2)}(x, 0) = \varphi(x) = \frac{1}{\lambda} \operatorname{sen} \lambda x,$$

$$u_y^{(1)}(x, 0) = 0, \quad u_y^{(2)}(x, 0) = \psi(x) = 0$$

difieren en una magnitud arbitrariamente pequeña para λ suficientemente grandes. Sin embargo, la solución $u^{(2)}(x, y)$ puede hacerse arbitrariamente grande para cualquier valor fijo de y. En consecuencia, el problema con condiciones iniciales para la ecuación de Laplace está planteado incorrectamente.

Surge de manera natural la pregunta: ¿pueden corresponder los problemas planteados incorrectamente a algún problema que represente interés para la física? Y también ¿qué valor científico puede tener la solución aproximada de los problemas planteados en forma incorrecta, puesto que a pequeños errores en las condiciones de éstos les pueden corresponder errores grandes de la solución?

Tales dudas surgen porque en lo expuesto anteriormente se sobreentiende que como solución aproximada del problema se toma la solución exacta de un problema que corresponde a condiciones aproximadas.

Citemos un ejemplo de un problema planteado incorrectamente y que tiene un valor práctico importante.

Consideremos el problema de determinar la derivada $z(x) = \frac{df}{dx}$ a partir de valores uniformemente aproximados para $f(x)$. Supongamos que la medida de la exactitud al dar $\tilde{f}(x)$ y al determinar $\tilde{z}(x)$ se define como

$$\text{máx}\,|\tilde{f}(x) - f(x)| \quad \text{y} \quad \text{máx}\,|\tilde{z}(x) - z(x)|.$$

Es evidente que este problema es inestable (está planteado incorrectamente) desde el punto de vista de la terminología introducida más arriba. En efecto,

---

[1]) Estas condiciones determinan matemáticamente en forma unívoca la solución de la ecuación de Laplace. En efecto, dar $u_y(x, 0)$ equivale a dar $v_x(x, 0)$, donde $v(x, y)$ es la función armónicamente conjugada con $u(x, y)$. Con esto se determina unívocamente, salvo una constante, la función analítica cuya parte real es la función $u(x, y)$ (véase el cap. IV, § 1, p. 5).

si $\tilde{f}(x) = f(x) + \delta \cos \omega x$, entonces $\max |\tilde{f}(x) - f(x)| = \varepsilon$ para δ pequeñas. Sin embargo, si tomáramos como valor aproximado para $\tilde{z}(x)$ la derivada exacta de la función $\tilde{f}(x)$, tendríamos

$$\tilde{z}'(x) = f'(x) - \delta\omega \operatorname{sen} \omega x \text{ y } \max|\tilde{z}(x) - z(x)| = \delta\omega;$$

$\delta\omega$ puede ser un número arbitrariamente grande para δ fijas y un ω grande. Sin embargo, es bien sabido que como valor aproximado de la derivada se toma la razón de diferencias $\frac{\tilde{f}(x+h)-\tilde{f}(x)}{h}$, la cual aproxima a la derivada buscada con un error arbitrariamente pequeño, siempre que h y δ/h sean suficientemente pequeñas. Aquí se sobreentiende que para obtener una buena aproximación para df/dx, a partir del valor aproximado de $\tilde{f}(x)$, el error δ debe ser suficientemente pequeño.

De esta manera, en el ejemplo considerado se puede, a pesar de la inestabilidad del problema, indicar un método de obtención de aproximaciones tan exactas como se quiera de la solución buscada, a partir de condiciones aproximadas del problema suficientemente exactas.

Una situación semejante es típica en varios problemas planteados incorrectamente [1]).

Los problemas planteados en forma incorrecta se encuentran con frecuencia en la física, al estudiar objetos que no pueden ser estudiados (medidos) directamente. En estos casos hay que hacer conclusiones sobre las características «z» de tales objetos a partir de sus manifestaciones indirectas (físicamente determinadas) «u», que están al alcance de las mediciones experimentales, y están ligadas con «z» por una dependencia funcional del tipo $A_z = u$. Como resultado llegamos al problema de la elaboración de las observaciones, que es el problema inverso, y que consiste en determinar las características «z» de los objetos a partir de los datos «u» del experimento. Muchos de estos problemas están planteados incorrectamente. En particular, el problema de Cauchy para la ecuación de Laplace, planteado más arriba, tiene una relación directa con el problema inverso de la gravimetría (sobre la determinación de la forma de un cuerpo partiendo de la anomalía que éste causa en la fuerza de gravedad). El ejemplo citado antes sobre el cálculo de la derivada a partir de los valores aproximados de la función, es típico en muchos experimentos, donde las mediciones se efectúan por el principio de acumulación.

Destaquemos ahora lo siguiente. Es evidente que la función $u(x, t)$, determinada por la fórmula (9), puede ser solución de la ecuación (1) sólo en el caso en que la función $\psi(x)$ sea derivable, y $\varphi(x)$, derivable dos veces. Por esto queda claro que las funciones representadas en las figs. 11 y 12 no pueden ser soluciones de la ecuación (1), puesto que no son derivables dos veces en todas partes. Es más, se puede asegurar que si las funciones

[1]) Véase M. M. Lavréntiev, *Sobre los problemas incorrectos de la Física matemática*, Ed. de la sección de Siberia de la Acad. de Ciencias de la URSS, Novosibirsk, 1962; A. N. Tíjonov, *Resolución de los problemas planteados incorrectamente y método de regularización*, Discursos de la Acad. de Ciencias de la URSS, t. 151, № 3, págs. 501-504 (1963); «*Sobre la regularización de los problemas planteados en forma incorrecta*», ibid., t. 153, № 1, págs. 45-52 (1963); «*Sobre las ecuaciones no lineales de primera especie*», ibid. t. 161, № 5, págs. 1023-1027 (1965).

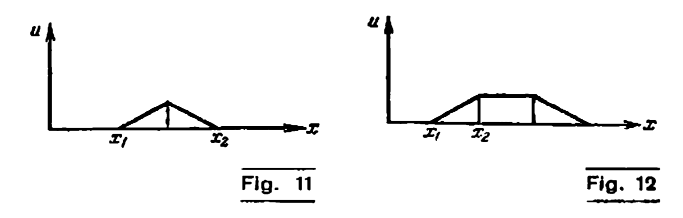


Fig. 11

Fig. 12

$\varphi(x)$ y $\psi(x)$ no tienen las derivadas necesarias, no existe solución de la ecuación de las oscilaciones que satisfaga a las condiciones (2). En efecto, repitiendo los razonamientos que nos permitieron obtener la fórmula (9), podemos asegurar que si existe solución de la ecuación de las oscilaciones, ésta debe ser representada mediante la fórmula (9). Pero si las funciones φ y ψ no son derivables un número suficiente de veces, la fórmula (9) determina una función que no satisface a la ecuación (1), es decir, no existe solución de este problema.

Sin embargo, si se cambian un tanto las condiciones iniciales, sustituyéndolas por funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ derivables, a estas funciones iniciales ya les corresponderá una solución de la ecuación (1). Obsérvese, además, que al demostrar el teorema del presente punto hemos demostrado, de hecho, que las funciones determinadas por la fórmula (9) dependen en forma continua de las funciones iniciales φ y ψ (independientemente de que estas funciones sean o no derivables). De este modo, si a ciertas funciones φ, ψ no le corresponde una solución de la ecuación de las oscilaciones que satisfaga a las condiciones (2), la función determinada por la fórmula (9) es el límite de las soluciones de la ecuación de las oscilaciones con condiciones iniciales un tanto «suavizadas».

Las funciones obtenidas mediante este paso al límite se denominan soluciones generalizadas. El concepto de solución generalizada juega un gran papel en la física, y fue introducido por S. L. Sóbolev[1]).

6. Semirrecta y método de las continuaciones. Consideremos el problema de la propagación de una onda en la semirrecta $x \geqslant 0$. Este problema tiene un valor particularmente importante en el estudio de los procesos de reflexión de las ondas en el extremo, y se plantea de la manera siguiente:

[1]) Para más detalles véase S. L. Sóbolev, *Ecuaciones de la Física matemática*, Ed. Gostejizdat, 1954, y también I. G. Petrovsky, *Lecciones sobre las ecuaciones en derivadas parciales*, Ed. Fizmatguiz, 1961.

hallar la solución de la ecuación de las oscilaciones

$$a^2u_{xx} = u_{tt} \text{ para } 0 < x < \infty,\ t > 0,$$

que satisfaga a la condición de frontera

$$u(0, t) = \mu(t) \text{ (o bien } u_x(0, t) = \nu(t)) \ (t \geqslant 0)$$

y a las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{array}\right\} (0 \leqslant x < \infty).$$

Estudiemos primeramente el caso de la condición de frontera homogénea

$$u(0, t) = 0 \quad (\text{o bien } u_x(0, t) = 0),$$

o sea, el problema sobre la propagación de una excitación inicial en una cuerda con extremo fijo $x = 0$ (o con extremo libre).

Destaquemos los dos lemas siguientes sobre las propiedades de las soluciones de las ecuaciones de las oscilaciones, determinadas en la recta infinita.

1. Si los datos iniciales en el problema de la propagación de las oscilaciones en la recta infinita (problema (1) — (2)) son funciones impares con respecto a cierto punto x_0, la solución correspondiente en este punto x_0 es igual a cero.

2. Si los datos iniciales en el problema sobre la propagación de las oscilaciones en la recta infinita (problema (1) — (2)) son funciones pares con respecto a cierto punto x_0, la derivada con respecto a x de la solución respectiva es igual a cero en este punto.

Demostremos el lema 1. Tomemos el origen de coordenadas en calidad de x_0, $x_0 = 0$. En este caso las condiciones de imparidad de los datos iniciales se escriben en la forma

$$\varphi(x) = -\varphi(-x); \ \psi(x) = -\psi(-x).$$

La función $u(x, t)$, determinada por la fórmula (9), para $x = 0$ y $t > 0$ es igual a

$$u(0, t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} \psi(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

puesto que el primer sumando es nulo, en virtud de la imparidad de $\varphi(x)$, y el segundo es igual a cero, ya que la integral de una función impar tomada entre límites simétricos con respecto al origen de coordenadas es siempre igual a cero.

El lema 2 se demuestra análogamente. Las condiciones de paridad de los datos iniciales tienen la forma

$$\varphi(x) = \varphi(-x); \ \psi(x) = \psi(-x).$$

Obsérvese que la derivada de una función par es una función impar:

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x).$$

De la fórmula (9) se sigue que

$$u_x(0, t) = \frac{\varphi'(at) + \varphi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a}[\psi(at) - \psi(-at)] = 0, \qquad t > 0,$$

puesto que el primer sumando es igual a cero en virtud de la imparidad de $\varphi'(x)$, y el segundo, en virtud de que $\psi(x)$ es par[1]).

La demostración que acabamos de hacer se basa, de hecho, en la fórmula de D'Alembert, y no está relacionada con la propiedad de que $u(x, t)$ es derivable dos veces. Con esto queda demostrado que el lema 1 es válido para funciones cualesquiera que sean representables mediante la fórmula de D'Alembert, y el lema 2, para funciones del mismo tipo con función $\psi(x)$ derivable, es decir, para las soluciones generalizadas del problema (1)—(2).

Mediante estos dos lemas se pueden resolver los siguientes problemas:

se pide hallar la solución de la ecuación (1) que satisfaga a las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{array}\right\} \qquad 0 < x < \infty, \qquad (2')$$

y a la condición de frontera

$$u(0, t) = 0, \qquad t > 0$$

(primer problema de contorno).

Consideremos las funciones $\Phi(x)$ y $\Psi(x)$ que son continuaciones impares de $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, las cuales figuran en la condición (2'):

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{para} \quad x > 0, \\ -\varphi(-x) & \text{para} \quad x < 0. \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{para} \quad x > 0, \\ -\psi(-x) & \text{para} \quad x < 0. \end{cases}$$

La función

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x + at) + \Phi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)\, d\alpha$$

[1]) Estos dos lemas son consecuencia de que si las condiciones iniciales son pares (o impares), también para $t > 0$ la función $u(x, t)$, determinada por la fórmula de D'Alembert, posee la misma propiedad (proponemos al lector demostrar esto). Geométricamente es evidente que una función continua impar y la derivada de una función par derivable son iguales a cero para $x = 0$.

está definida para todas las x y $t > 0$. En virtud del lema 1, es

$$u(0, t) = 0.$$

Además, esta función satisface, para $t = 0$ y $x > 0$, a las siguientes condiciones iniciales:

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \Psi(x) = \psi(x), \end{aligned}\right\} \quad x > 0.$$

De este modo, considerando la función obtenida $u(x, t)$ sólo para $x \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, obtenemos una función que satisface a todas las condiciones del problema planteado.

Volviendo a las funciones originales, podemos escribir

$$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \\ \qquad + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha \quad \text{para} \quad t < \dfrac{x}{a}, \quad x > 0, \\ \dfrac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \\ \qquad + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha \quad \text{para} \quad t > \dfrac{x}{a}, \quad x > 0. \end{cases} \tag{23}$$

En la región $t < \frac{x}{a}$, la influencia de las condiciones de frontera no se deja sentir, y la expresión para $u(x, t)$ coincide con la solución (9) para la recta infinita.

Análogamente, si para $x = 0$ tenemos un **extremo libre**

$$u_x(0, t) = 0,$$

tomando la prolongación par de las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{para} \quad x > 0, \\ \varphi(-x) & \text{para} \quad x < 0; \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{para} \quad x > 0, \\ \psi(-x) & \text{para} \quad x < 0, \end{cases}$$

se obtiene la solución de la ecuación de las oscilaciones

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)\, d\alpha,$$

o bien

$$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha \quad \text{para } t < \dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2} + \\ \qquad + \dfrac{1}{2a}\left\{\int\limits_{0}^{x+at} \psi(\alpha)\,d\alpha + \int\limits_{0}^{at-x} \psi(\alpha)\,d\alpha\right\} \quad \text{para } t > \dfrac{x}{a} \end{cases}$$

que satisface a las condiciones iniciales (2) y a la de frontera $u_x(0, t) = 0$ en la región $x \geqslant 0$.

En lo sucesivo, al resolver diferentes problemas, tendremos que utilizar con frecuencia el método de continuación a una región infinita de los datos iniciales, dados en cierta parte de esta región.

Por esto, formularemos una vez más los resultados obtenidos, en forma de las dos reglas siguientes.

Para resolver el problema en la semirrecta con condición de frontera $u(0, t) = 0$, hay que continuar los datos iniciales a toda la recta en forma impar.

Para resolver el problema en la semirrecta con condición de frontera $u_x(0, t) = 0$, hay que continuar los datos iniciales a toda la recta en forma par.

Veamos dos ejemplos. Supongamos que los datos iniciales en la semirrecta fija en $x = 0$, son diferentes de cero sólo en el intervalo (a, b), $0 < a < b$, en el cual la desviación inicial, dada por la función $\varphi(x)$, es un triángulo isósceles, y $\psi(x) = 0$. La solución de este problema se obtiene continuando los datos iniciales en forma impar a toda la recta. El proceso de propagación de las ondas está representado en la fig. 13. Al principio, el proceso ocurre igual que en la recta infinita. La desviación dada se divide en dos ondas, que se mueven en sentidos diferentes con velocidad constante. Esto continúa hasta que la semionda que va hacia la izquierda llega al punto $x = 0$ (fig. 13). En este momento por la izquierda ($x \leqslant 0$), en donde tenían lugar procesos análogos, llega al punto $x = 0$ la semionda con «fase opuesta». En los momentos subsiguientes, tiene lugar la reflexión de la semionda en el extremo fijo. Esto se representa detalladamente en la fig. 13. El perfil de la onda que se refleja se acorta, las desviaciones desaparecen, luego éstas aparecen con signo opuesto y, por fin, la semionda reflejada va hacia la derecha tras la semionda que partió en dicho sentido con la misma velocidad. De este modo, cuando una onda se refleja en el extremo fijo de una cuerda, su desviación cambia de signo.

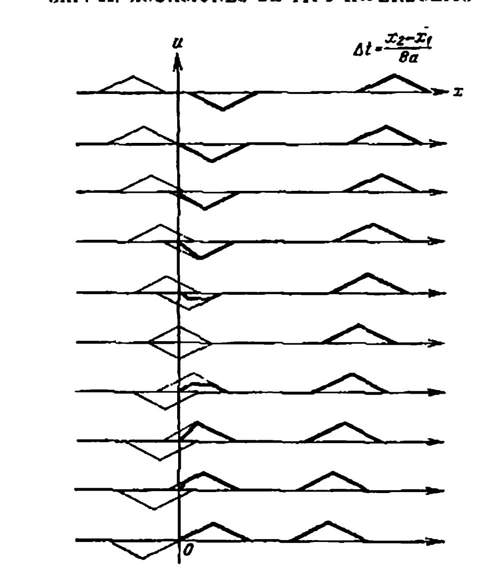


Fig. 13

Consideremos el segundo ejemplo. Supongamos que en la semirrecta $x \geqslant 0$, fija en $x = 0$, la desviación inicial es igual a cero en todas partes, y la velocidad inicial $\psi(x)$ es diferente de cero sólo en el intervalo (x_1, x_2) $(0 < x_1 < x_2)$, y en éste $\psi(x) = \text{const}$. Continuemos en forma impar los datos iniciales. De cada intervalo (x_1, x_2) y $(-x_1, -x_2)$ se propagan desviaciones semejantes a las representadas en la fig. 14. Como se ve en el dibujo, al comienzo en la región $x > 0$ el proceso transcurre igual que en la recta infinita. Luego tiene lugar la reflexión en el punto fijo y, al fin, la onda con perfil en forma de trapecio isósceles se mueve hacia la derecha con velocidad constante.

El estudio de la reflexión en un extremo libre se efectúa en forma análoga, sólo que los datos iniciales deben ser continuados en forma par, de modo que la reflexión de una onda en un extremo libre tendrá lugar no con fase cambiada, sino con la misma fase.

Hemos considerado los problemas con las condiciones de frontera homogéneas

$$u(0, t) = \mu(t) = 0,$$

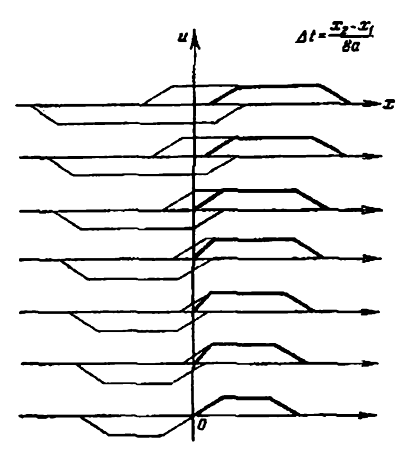


Fig. 14

o bien

$$u_x(0, t) = \nu(t) = 0.$$

En el caso general de condiciones de frontera inhomogéneas, la solución se representa en forma de suma, cada sumando de la cual satisface sólo a una de las condiciones planteadas (o a la de frontera, o a la inicial).

Ahora resolveremos la ecuación con condiciones iniciales nulas y con condición de frontera dada:

$$\bar{u}(x, 0) = 0, \quad \bar{u}_t(x, 0) = 0, \quad \bar{u}(0, t) = \mu(t), \quad t > 0.$$

Es evidente que el régimen de frontera generará una onda que se desplazará a lo largo de la cuerda hacia la derecha con velocidad a, lo cual nos indica la forma analítica de la solución:

$$\bar{u}(x, t) = f(x - at).$$

Determinemos la función f a partir de la condición de frontera

$$\bar{u}(0, t) = f(-at) = \mu(t),$$

de donde

$$f(z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right),$$

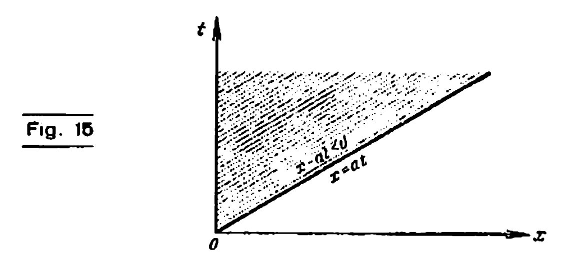


Fig. 15

de manera que

$$\bar{u}(x, t) = \mu\left(-\frac{x - at}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Sin embargo, esta función está definida sólo en la región $x - at \leqslant 0$, puesto que $\mu(t)$ está definida para $t \geqslant 0$. En la fig. 15 esta región se representa por la parte rayada del plano de fases.

Para hallar $\bar{u}(x, t)$ para todos los valores de los argumentos, continuemos la función $\mu(t)$ a los valores negativos de t, haciendo $\mu(t) = 0$ para $t < 0$. Entonces, la función

$$\bar{u}(x, t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

estará definida para todos los valores de los argumentos, y satisfará a las condiciones iniciales nulas.

La suma de esta función y de la función (23), definida al comienzo del presente punto, es la solución del primer problema de contorno para la ecuación homogénea de las oscilaciones. Para la cuerda semiacotada, se tiene:

$$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \\ \qquad + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha \quad \text{para} \quad t < \dfrac{x}{a}, \\ \mu\left(t - \dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \\ \qquad + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha)\, d\alpha \quad \text{para} \quad t > \dfrac{x}{a}. \end{cases} \tag{24}$$

Análogamente se puede determinar la solución del segundo problema de contorno. Para el tercer problema de contorno véase el p. 9, pág. 92.

Aquí nos limitaremos a la resolución del problema de contorno para la ecuación homogénea de las oscilaciones.

Para la resolución de la ecuación no homogénea véase el p. 9.

7. Problemas para un segmento acotado. Estudiemos los problemas de contorno para el segmento acotado $(0, l)$. Buscaremos la solución de la ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

que satisface a las condiciones de frontera

$$\left.\begin{array}{l} u(0, t) = \mu_1(t), \\ u(l, t) = \mu_2(t) \end{array}\right\} \quad t \geqslant 0$$

y a las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \end{array}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Consideremos previamente el caso de las condiciones de frontera homogéneas

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Buscaremos la solución del problema, en este caso, por el método de la continuación, suponiendo la posibilidad de la siguiente representación:

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha)\, d\alpha,$$

donde Φ y Ψ son funciones que debemos determinar. Las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} u(x, 0) = \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) = \Psi(x) = \psi(x) \end{array}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l$$

determinan los valores de Φ y Ψ en el intervalo $(0, l)$.

Para satisfacer a las condiciones de frontera nulas, exijamos que las funciones $\Phi(x)$ y $\Psi(x)$ sean impares con respecto a los puntos $x = 0$ y $x = l$:

$$\Phi(x) = -\Phi(-x), \quad \Phi(x) = -\Phi(2l - x),$$
$$\Psi(x) = -\Psi(-x), \quad \Psi(x) = -\Psi(2l - x).$$

Comparando estas igualdades, obtenemos:

$$\Phi(x') = \Phi(x' + 2l) \quad (x' = -x)$$

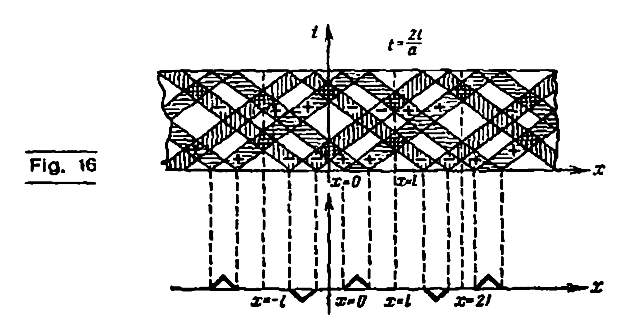


Fig. 16

y lo mismo para $\Psi(x)$, es decir, Φ y Ψ son funciones periódicas de período $2l$.

No es difícil de ver que las condiciones de imparidad con respecto al origen de coordenadas y las condiciones de periodicidad determinan las continuaciones de $\Phi(x)$ y $\Psi(x)$ a toda la recta $-\infty < x < \infty$. Sustituyéndolas en la fórmula (9), obtenemos la solución del problema.

En la fig. 16 están reunidos el plano de fases (x, t) y el plano (x, u), en el cual está dada la desviación inicial y su continuación. En el plano de fases se han rayado las bandas, dentro de las que la desviación es distinta de cero (véase la fig. 7). Los signos de más y menos dentro de estas bandas indican el signo (la fase) de la desviación (en forma de triángulo isósceles). Utilizando este dibujo, es fácil imaginarse el perfil de la desviación de la cuerda en cualquier momento t. Así, en el momento $t = \frac{2l}{a}$ obtenemos desviaciones que coinciden con las iniciales. De esta manera la función $u(x, t)$ será una función periódica con respecto a t con período $T = \frac{2l}{a}$ (véase la pág. 108).

Estudiemos ahora el problema de la propagación del régimen de frontera. Buscaremos la solución de la ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

con las condiciones iniciales nulas

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$$

y las condiciones de frontera

$$\left.\begin{array}{l} u(0, t)=\mu(t), \\ u(l, t)=0 \end{array}\right\} \quad t>0.$$

De los resultados del p. 6 se deduce que para $t<\frac{l}{a}$, la solución será la función

$$u(x, t)=\bar{\mu}\left(t-\frac{x}{a}\right), \text{ donde } \bar{\mu}(t)=\left\{\begin{array}{l} \mu(t), \ t>0, \\ 0, \ t<0. \end{array}\right.$$

Sin embargo, esta función no satisface a la condición de frontera

$$u(l, t)=0 \text{ para } t>\frac{l}{a}.$$

Tomemos la onda «reflejada», que va hacia la izquierda, y tiene para $x=l$ una desviación igual a $\bar{\mu}\left(t-\frac{l}{a}\right)$. Su expresión analítica está dada por la fórmula

$$\bar{\mu}\left(t-\frac{l}{a}-\frac{l-x}{a}\right)=\bar{\mu}\left(t-\frac{2l}{a}+\frac{x}{a}\right).$$

Es fácil de comprobar que la diferencia de dos ondas

$$\bar{\mu}\left(t-\frac{x}{a}\right)-\bar{\mu}\left(t-\frac{2l}{a}+\frac{x}{a}\right)$$

es la solución de la ecuación para $t<\frac{2l}{a}$.

Continuando este proceso, obtenemos la solución en forma de la serie

$$u(x, t)=\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t-\frac{2nl}{a}-\frac{x}{a}\right)-\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}\left(t-\frac{2nl}{a}+\frac{x}{a}\right), \qquad (25)$$

que contiene (para cada t fijo) sólo un número finito de términos distintos de cero, puesto que con cada nueva reflexión el argumento disminuye en $\frac{2l}{a}$, y la función $\bar{\mu}(t)=0$ para $t<0$. El cumplimiento de las condiciones de frontera se verifica directamente. En efecto, hagamos $x=0$ y separemos de la primera suma el primer sumando, para $n=0$, que es igual a $\mu(t)$. Los demás sumandos de ambas sumas, que corresponden a iguales valores

de n, se simplifican entre sí; esto demuestra que $u(0, t) = \mu(t)$.

Sustituyendo n por $n-1$ y cambiando, de acuerdo a esto, los límites de sumación, transformemos la primera suma a la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}\left(t-\frac{2nl}{a}+\frac{2l-x}{a}\right).$$

Haciendo ahora $x = l$, nos convencemos de que los sumandos de ambas sumas se simplifican entre sí [1]).

La fórmula (25) tiene un sentido físico sencillo. La función

$$\bar{\mu}\left(t-\frac{x}{a}\right)$$

representa la onda que se genera por el régimen de frontera para $x = 0$, independientemente de la influencia del extremo $x = l$, como si la cuerda fuese infinita $(0 < x < \infty)$. Los sumandos restantes son las reflexiones sucesivas en el punto fijo $x = l$ (segunda suma) y en el extremo $x = 0$ (primera suma).

Análogamente, la función

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t-\frac{(2n+1)l}{a}+\frac{x}{a}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t-\frac{(2n+1)l}{a}-\frac{x}{a}\right)$$

da la solución de la ecuación homogénea con condiciones iniciales nulas, $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$, y las condiciones de frontera $u(0, t) = 0$ y $u(l, t) = \mu(t)$. No nos detendremos en la demostración de la unicidad del problema considerado y la dependencia continua de la solución de las condiciones iniciales y de frontera.

8. Dispersión de las ondas. La ecuación de las oscilaciones de la cuerda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ admite una solución en forma de la onda $u = f(x \pm at)$, de forma arbitraria. La ecuación general de tipo hiperbólico con coeficientes constantes

$$\bar{u}_{tt} - a^2\bar{u}_{xx} + b_1\bar{u}_t + b_2\bar{u}_x + c\bar{u} = 0 \qquad (26)$$

---

[1]) Las condiciones iniciales también se verifican directamente, puesto que los argumentos de todas las funciones son negativos para $t = 0$, y la expresión (25) para $t = 0$ es igual a cero.

se reduce, mediante la sustitución indicada en el cap. I $\bar{u} = ue^{\lambda x+\mu t}$, donde $\mu = -0{,}5b_1$, $\lambda = -0{,}5b_2/a^2$, a la ecuación

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + cu = 0, \tag{27}$$

donde $c = \bar{c} + (b_1/2)^2 - (b_2/2a)^2$. Demostremos que la ecuación (27) no admite soluciones en forma de una onda arbitraria para $c \neq 0$. En efecto, sustituyendo $u = f(x - at)$ en (27), se halla $a^2 f'' - a^2 f'' + cf = 0$, de donde, en virtud de ser f arbitraria, se deduce que $c = 0$.

Un impulso o señal de cualquier forma puede ser representado, mediante el desarrollo en integral de Fourier, en forma de superposición de ondas armónicas de la forma

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)},$$

donde ω es la frecuencia, $k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda, y λ, la longitud de onda.

La velocidad con la que la fase de la onda $\alpha = \omega t - kx$ se desplaza en el espacio se llama velocidad de fase de la onda y es igual, evidentemente, a $v = \omega/k$. Si la velocidad de fase de una onda armónica depende de la frecuencia, se dice que hay dispersión de la onda. En este caso, las componentes armónicas de la señal se entremezclan, a resultas de lo cual el perfil de la señal se deforma.

Es evidente que si la ecuación no admite soluciones en forma de ondas de perfil arbitrario, la velocidad de fase de una onda armónica depende de la frecuencia, es decir, tiene lugar la dispersión.

Demostremos que para la ecuación (27) tiene lugar la dispersión para $c \neq 0$. Sustituyendo en (27) $u = e^{i(\omega t - kx)}$, obtenemos la ecuación que liga a ω y k:

$$\omega^2 - a^2 k^2 + c = 0.$$

De aquí se deduce que la velocidad de fase

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + c}}\, a$$

depende de la frecuencia. Bajo la condición $c = 0$, es decir, para la ecuación de las oscilaciones de la cuerda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $v = a$ no depende de la frecuencia, y no hay dispersión. La condición $c = 0$ se llama también condición de ausencia de deformación.

Como ejemplo, consideremos la ecuación telegráfica (véase el § 1, p. 4)

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + LG)\, i_t + GRi.$$

Haciendo $i = ue^{-\mu t}$, donde $\mu = 0{,}5\,(CR + GL)/CL$, obtenemos para u la ecuación

$$u_{xx} = CLu_{tt} + \bar{c}u,$$

donde $\bar{c} = -(CR - LG)^2/4$. De aquí se aprecia que para $CR \neq \neq LG$ la señal se transmite por el cable con deformaciones, puesto que tiene lugar la dispersión de las ondas. La condición

$$CR = LG, \quad \text{o bien} \quad \frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

se llama condición de ausencia de deformaciones en la línea. En este caso, la ecuación telegráfica admite una solución en forma de la onda amortiguada

$$i(x, t) = e^{-\gamma t} f(x - at), \quad \gamma = \frac{R}{L} = \frac{G}{C}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

donde f es una función arbitraria.

La ausencia de la deformación de las ondas en su propagación por el cable tiene una importancia fundamental para la comunicación telegráfica y telefónica en grandes distancias.

9. Ecuación integral de las oscilaciones. Al deducir la ecuación diferencial de las oscilaciones (5) en el § 1, partimos de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, la que nos dio la ecuación de las oscilaciones en la forma integral (3). Para pasar de la ecuación integral a la diferencial, supusimos que la función $u(x, t)$ tenía derivadas segundas. Cada hipótesis que se hace sobre la limitación de la clase de las funciones consideradas mediante cierta propiedad, significa renunciar a estudiar las funciones que no poseen la propiedad considerada. De esto modo, al pasar de la ecuación integral de las oscilaciones a la diferencial, excluimos de la consideración los procesos oscilatorios que no satisfacen a la condición de ser derivables dos veces.

Mostremos que toda la teoría se puede desarrollar en la clase de las funciones continuas y derivables a trozos, partiendo de la ecuación integral de las oscilaciones

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t_1}\right] \rho\, d\xi =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_2} - \left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_1}\right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F\, d\xi\, d\tau. \quad (28)$$

A esta ecuación se le puede dar la forma siguiente. Consideremos en el plano (x, t) la región G, delimitada por la curva C lisa a trozos[1]) y demostremos

[1]) Es decir, la ecuación paramétrica de la curva es derivable a trozos. (*N. del T.*)

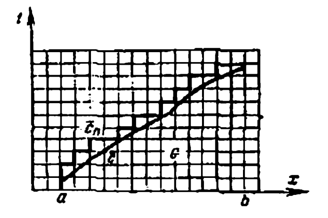


Fig. 17

que para esta región tiene lugar la relación integral

$$\int_C \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx + k \frac{\partial u}{\partial x} dt\right) + \iint_G F\, dx\, dt = 0. \tag{29}$$

Para un medio homogéneo, esta fórmula toma la forma

$$\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt\right) + \iint_G f\, dx\, dt = 0 \left(f = \frac{F}{\rho}\right). \tag{29'}$$

Si la curva C es el contorno de un rectángulo de lados paralelos a los ejes de coordenadas, la fórmula (29) coincide con la (28). Si la curva C está formada por trozos paralelos a los ejes, la región G se puede representar como la suma de rectángulos. Sumando las integrales de contorno que corresponden a cada sumando, obtenemos que los sumandos que responden a las fronteras internas se simplifican, puesto que la integración se efectúa en sentidos opuestos, y los sumandos restantes dan la fórmula (29). Supongamos ahora que la curva C contiene arcos $\bar{C}$ que no son paralelos a los ejes ni son líneas de discontinuidad del integrando. Tomemos una red de lados paralelos a los ejes coordenados y tomemos las casillas de la red que se intersecan con la región G. Denotemos por G^* el conjunto de estas casillas, y por C^*, la frontera de la región G^*. La fórmula (29) es aplicable a G^*. Pasando al límite cuando las proporciones de la red disminuyen, no es difícil cerciorarse de la justeza de la fórmula (29) para la curva límite C.

En efecto, el primer sumando de la fórmula (29), aplicado a la región G^*, está formado por sumandos del tipo

$$\int_{\bar{C}_n} \Phi(x, t)\, dx, \quad \text{o bien} \quad \int_{\bar{C}_n} \Phi(x, t)\, dt,$$

donde $\Phi(x, t)$ es una función continua, y $\bar{C}_n$, el arco del contorno C^* que aproxima al arco $\bar{C}$ (fig. 17).

Sea $t = t_n(x)$ la ecuación de la curva $\overline{C}_n$ y $t = t(x)$, la de la curva $\overline{C}$. Es evidente que $t_n(x)$ converge uniformemente hacia $t(x)$, y que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \Phi[x, t_n(x)]\,dx = \int_a^b \Phi[x, t(x)]\,dx,$$

lo que demuestra la legitimidad del paso al límite[1].

Si la curva C contiene arcos que son líneas de discontinuidad del integrando, la fórmula (29) conserva su validez, si se toma como valor del integrando su valor límite desde el interior de la región G. De esta manera, queda demostrada la justeza de la fórmula integral (29).

Consideremos el problema siguiente:

hallar la función $u(x, t)$, determinada y lisa a trozos en la región $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, que satisface a la ecuación

$$\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt\right) + \iint_G f(x, t)\,dx\,dt = 0 \qquad (29')$$

y a las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u_t(x, 0) = \psi(x),$$

donde $\varphi(x)$ es una función lisa a trozos, y $\psi(x)$ y $f(x, t)$ son continuas a trozos. Aquí C es un contorno arbitrario liso a trozos, que se halla en la región $t \geqslant 0$. Demostremos que este problema tiene solución única, la cual se determina por la fórmula de D'Alembert.

Supongamos que la función $u(x, t)$ es la solución de nuestro problema. Consideremos el triángulo ABM (fig. 18) que se apoya en el eje $t = 0$, con vértice en el punto $M(x, t)$, con lados que son segmentos de las características $x - at = \text{const}$ y $x + at = \text{const}$, y apliquémosle la fórmula (29'). A lo largo del segmento AM tiene lugar la igualdad $\frac{dx}{dt} = a$, de modo que

$$\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt = a\left(\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) = a\,du.$$

A lo largo del segmento MB tiene lugar la igualdad $\frac{dx}{dt} = -a$, de forma que

$$\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt = -a\left(\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right) = -a\,du.$$

Por lo tanto, la expresión bajo el signo integral a lo largo de las características es una diferencial total. Efectuando la integración a lo largo de los segmentos BM y MA, obtenemos:

$$\int_B^M \left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt\right) = -a[u(M) - u(B)],$$

$$\int_M^A \left(\frac{\partial u}{\partial t}dx + a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt\right) = a[u(A) - u(M)],$$

---

[1]) Como $dx = 0$ en los segmentos verticales de la quebrada $\overline{C}_n$, en esta fórmula $t = t_n(x)$ es la ecuación de los segmentos horizontales de la curva $\overline{C}_n$.

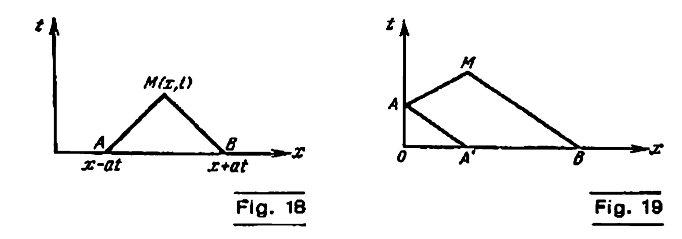


Fig. 18

Fig. 19

de manera que la fórmula (29′) toma la forma:

$$u(M)=\frac{u(B)+u(A)}{2}+\frac{1}{2a}\int_A^B \frac{\partial u}{\partial t}\,dx+\frac{1}{2a}\iint_{ABM} f\,dx\,dt,$$

o bien

$$u(x,\ t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\ \tau)\,d\xi. \qquad (30)$$

De esto modo, si la solución del problema planteado existe, ésta se determina unívocamente por sus valores iniciales. En el caso de una ecuación homogénea ($f=0$), esta fórmula coincide con la de D'Alembert. De aquí se deduce el teorema de unicidad para el problema considerado.

No es difícil de comprobar, mediante sustitución directa, que una función del tipo

$$u(x,\ t)=f_1(x+at)+f_2(x-at)+\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_3(\xi,\ \tau)\,d\xi,$$

donde f_1 y f_2 son funciones lisas a trozos, y f_3 es una función continua a trozos, satisface a la ecuación (28) y, por consiguiente, a la (29′). Esto demuestra el teorema de existencia. Las soluciones de los problemas considerados en el p. 3 como ejemplos, son funciones lisas a trozos y se abarcan por la teoría expuesta.

Consideremos ahora el primer problema de contorno en la semirrecta. Buscaremos la solución del problema (29) en cierto punto $M(x,\ t)$ para $t>\frac{x}{a}$ (fig. 19), ya que en la región $t<\frac{x}{a}$ (debajo de la característica $x=at$) la influencia del régimen de frontera es nula, y la solución se determina por la fórmula (30). Apliquemos la fórmula (29′) al cuadrilátero $MAA'B$, en el cual MA, MB y AA' son segmentos de características. Efectuando la integración a lo largo de las características MA, AA' y BM, se obtiene:

$$2au(M)=2au(A)+au(B)-au(A')+\int_A^B \frac{\partial u}{\partial t}\,dx+\iint_{MAA'B} f\,dx\,dt.$$

Sustituyendo aquí las coordenadas de los puntos M, A, B y A', tendremos:

$$u(x, t) = u\left(0, t - \frac{x}{a}\right) + \frac{u(x+at, 0) - u(at-x, 0)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} dx + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi,$$

o bien

$$u(x, t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\, d\xi \quad \left(t > \frac{x}{a}\right). \qquad (31)$$

De (31) se sigue directamente la unicidad de la solución del problema considerado.

Para $f = 0$ esta fórmula, como no es difícil observar, coincide con la (24) del § 2, p. 6. Análogamente se estudia también el segundo problema de contorno, así como también los problemas para el segmento acotado.

Al estudiar el primer problema de contorno, hemos visto que la formulación de las dos condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

y la condición de frontera

$$u(0, t) = \mu(t)$$

es suficiente para la determinación completa de la solución. De aquí se deduce que debe existir una relación que ligue las funciones φ, ψ, μ y ν, donde $\nu(t) = u_x(0, t)$. Derivando la fórmula (31) con respecto a x y haciendo $x = 0$, se obtiene:

$$\nu(t) = \frac{1}{a}\{\psi(at) - [\mu'(t) - a\varphi'(at)]\}, \qquad (32)$$

donde se hizo $f = 0$ para mayor sencillez. Utilizando la fórmula (32) se puede, por ejemplo, reducir el tercer problema de contorno al primero.

10. Propagación de las discontinuidades a lo largo de las características. Estudiemos ahora las discontinuidades de soluciones arbitrarias de la ecuación (29). Demostremos que las líneas de discontinuidad de funciones cualesquiera $u(x, t)$ que satisfagan a la ecuación (29), pueden ser sólo líneas de las familias de características

$$x - at = \text{const}, \quad x + at = \text{const}.$$

En efecto, supongamos que cierta curva derivable, que se determina por la ecuación

$$x = x(t),$$

es línea de discontinuidad de las derivadas de una función $u(x, t)$ continua arbitraria, derivable a trozos. Supongamos, para fijar ideas, que $x(t)$ es

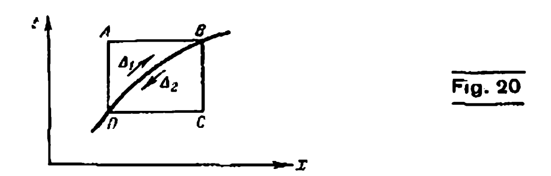


Fig. 20

una función creciente. Apliquemos la fórmula (29') al rectángulo $ABCD$ fig. 20):

$$\int\limits_{BA+AD} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dx+a^2\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right)+\int\limits_{DC+CB}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dx+a^2\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right)=0,$$

así como también a los triángulos curvilíneos $\Delta_1=BAD$ y $\Delta_2=BDC$:

$$\int\limits_{BA+AD}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dx+a^2\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right)+\int\limits_{DB}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,x'+a^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1 dt=0,$$

$$\int\limits_{DC+CB}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,dx+a^2\frac{\partial u}{\partial x}\,dt\right)-\int\limits_{DB}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,x'+a^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 dt=0,$$

donde los paréntesis $(\quad)_{1,2}$ indican que hay que tomar los valores límite desde dentro de los triángulos Δ_1 y Δ_2. Restando de la suma de las últimas dos igualdades la precedente, se obtiene:

$$\int\limits_{DB}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,x'+a^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1-\left(\frac{\partial u}{\partial t}\,x'+a^2\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2\right\}dt=0,$$

o, en virtud de que el arco DB es arbitrariamente pequeño,

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]x'+a^2\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=0, \tag{33}$$

donde, como de costumbre, mediante corchetes se indica la magnitud de la discontinuidad de la función:

$$[f]=f_2-f_1.$$

Tomemos la derivada respecto a t del valor de la función $u(x, t)$ a lo largo de la línea de discontinuidad de las derivadas:

$$\frac{d}{dt}\,u(x(t),\,t)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i x'+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i \qquad (i=1,\ 2);$$

como valores de las derivadas se pueden tomar los valores límite tanto desde Δ_1 como desde Δ_2. La diferencia de los segundos miembros para $i=1$ e $i=2$ da:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]+x'\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=0.$$

Comparando esta igualdad con la (33) y suponiendo que por lo menos una de las discontinuidades $\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]$, $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]$ es distinta de cero, se aprecia que estas igualdades se cumplen simultáneamente si el determinante de este sistema es igual a cero:

$$\begin{vmatrix} x' & a^2 \\ 1 & x' \end{vmatrix} = (x')^2 - a^2 = 0,$$

o bien

$$x = \pm at - \text{const}.$$

De esta manera, las líneas de discontinuidad de las derivadas de la solución de la ecuación de las oscilaciones son características.

EJERCICIOS

1. Dibujar el perfil de la cuerda para distintos momentos de tiempo en los casos siguientes:

I. **Cuerda no acotada** $(-\infty < x < \infty)$.

a) la velocidad inicial es igual a cero ($\psi(x) = 0$), y el perfil inicial de la cuerda está dado en forma de la fig. 21;

b) la desviación inicial es igual a cero, y la velocidad inicial tiene un valor constante, $u_t(x, 0) = \psi_0$ en el segmento de la cuerda (x_1, x_2) y es igual a cero fuera de este segmento;

c) las condiciones iniciales tienen la forma

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < c, \\ \dfrac{h}{2c^2} x(2c - x) & \text{para } c < x < 2c, \\ 0 & \text{para } x > 2c. \end{cases}$$

II. **Cuerda semiacotada** $(0 \leqslant x \leqslant \infty)$.

d) la velocidad inicial es igual a cero ($\psi(x) = 0$), y la desviación inicial tiene la forma del triángulo representado en la fig. 21. El extremo de la cuerda está fijo;

e) el mismo problema para la cuerda con el extremo libre $x = 0$;

f) las condiciones iniciales tienen la forma

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < x < c, \\ \psi_0 = \text{const} & \text{para } c < x < 2c, \\ 0 & \text{para } x > 2c; \end{cases}$$

el extremo de la cuerda $x = 0$ está fijo;

g) el mismo problema para la cuerda con el extremo libre $x = 0$.

El perfil de la cuerda para todos los problemas a) — g) debe dibujarse para los momentos de tiempo

$$t_0 = 0, \quad t_k = \frac{c}{8a} k \quad (k = 1, 2, \ldots, 8).$$

Indicar para los problemas a) — g), en el plano de fases (x, t), las zonas que corresponden a diferentes etapas del proceso.

2. Hallar la solución del problema 1 a) para todos los valores de las variables x y t (las fórmulas que expresan la función $u(x, t)$ son diferentes para distintas zonas del plano de fases).

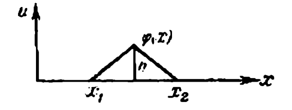


Fig. 21

3. Determinar la desviación en cierto punto x_0, t_0, utilizando el plano de fases (x, t) y el plano (x, u), en el cual (fig. 21) están dadas las desviaciones iniciales ($\psi = 0$), tanto para el caso de la cuerda no acotada, como para el de la cuerda semiacotada con extremo fijo (o libre).

4. En el comienzo de un tubo cilíndrico largo, lleno de gas, hay un pistón que se mueve según una ley arbitraria $x = f(t)$, con velocidad $v = f'(t) < a$. La desviación inicial y la velocidad de las partículas del gas son iguales a cero. Hallar el desplazamiento del gas en el corte de abscisa x. Considerar el caso en que el pistón se mueve con velocidad constante $v < a$. ¿Qué se puede decir sobre la solución del problema, si a partir de cierto momento la velocidad del pistón es $v > a$? (véase el Apéndice 5 del cap. II).

5. Supongamos que por una cuerda no acotada corre una onda $u(x, t) = f(x - at)$. Tomar el estado de la cuerda en el momento $t = 0$ como inicial y resolver la ecuación de las oscilaciones bajo las condiciones iniciales respectivas. Compárese con el ejercicio 1 a).

6. Se ha obtenido una barra elástica ilimitada, uniendo en el punto $x = 0$ dos barras con las características

$$k_1, \rho_1, a_1 = \sqrt{\frac{k_1}{\rho_1}} \quad \text{para } x < 0,$$

$$k_2, \rho_2, a_2 = \sqrt{\frac{k_2}{\rho_2}} \quad \text{para } x > 0.$$

a) Supongamos que desde la región $x < 0$ corre la onda

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right),$$

donde f es una función dada. Hallar los coeficientes de reflexión y de refracción de la onda al pasar por el punto de unión ($x = 0$). Establecer bajo qué condiciones no hay onda reflejada.

b) Resolver un problema análogo, si se da la desviación local inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < x_1, \\ \varphi(x) & \text{para } x_1 < x < x_2 < 0, \\ 0 & \text{para } x > x_2, \end{cases}$$

y si la velocidad inicial es igual a cero.

7. Supongamos que en cierto punto de la cuerda $x = x_0$ se ha colgado un peso de masa M, y que desde la región $x < 0$ corre la onda

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Hallar las ondas refractada y reflejada.

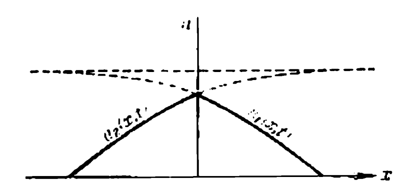


Fig. 22

8. Un tubo semiacotado ($x > 0$), lleno de gas ideal, tiene en el extremo $x = 0$ un pistón que se mueve libremente, de masa M. En el momento de tiempo $t = 0$ al pistón se le imprime una velocidad inicial v_0 mediante un golpe. Hallar el proceso de propagación de la onda en el gas, si se sabe que las desviaciones iniciales y la velocidad inicial de las partículas del gas son iguales a cero.

Indicación. Considerar la solución de la ecuación de las oscilaciones en la región $x > 0$. Utilizar la condición de frontera

$$Mu_{tt}(0, t) = S\gamma p_0 u_x(0, t)$$

(p_0 es la presión inicial del gas, S, la superficie del corte transversal del tubo, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ y las condiciones iniciales en la frontera $u(0, 0) = 0$, $u_t(0, 0) = v_0$.

9. Una cuerda infinita, que tiene en el punto $x = 0$ una masa concentrada M, se halla en estado de equilibrio. En el momento inicial de tiempo $t = 0$ se le imprime a la masa una velocidad inicial v_0 golpeando con un martillito. Demostrar que en el momento de tiempo $t > 0$ la cuerda tiene la forma indicada en la fig. 22, donde $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ se determinan por las fórmulas

$$u_1(x, t) = \begin{cases} \dfrac{Mav_0}{2T}\left[1 - e^{\frac{2T}{Ma^2}(x-at)}\right] & \text{para } x - at < 0 \text{ (onda directa)}, \\ 0 & \text{para } x - at > 0; \end{cases}$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \dfrac{Mav_0}{2T}\left[1 - e^{-\frac{2T}{Ma^2}(x+at)}\right] & \text{para } x - at < 0, \text{ (onda inversa)}, \\ 0 & \text{para } x - at > 0. \end{cases}$$

Indicación. Utilizar la condición

$$M\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(0, t) = M\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(0, t) = T\frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) - T\frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t)$$

10. Resolver el problema de la propagación de las oscilaciones eléctricas en un cable infinito bajo la condición

$$\frac{G}{C} = \frac{R}{L}$$

y bajo condiciones iniciales arbitrarias.

11.* Hallar la solución de la ecuación integral de las oscilaciones para una cuerda semiacotada con condiciones de frontera de tercera especie (véase el p. 9).

12. En el extremo $x=0$ de una barra semiacotada se ha asegurado una membrana, que ejerce una resistencia a las oscilaciones longitudinales de la barra proporcional a la velocidad $u_t(0, t)$. Hallar el proceso oscilatorio, si se dan las desviaciones iniciales y si $u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$.

§ 3. METODO DE SEPARACION DE LAS VARIABLES

1. Ecuación de las oscilaciones libres de una cuerda. *El método de separación de las variables*, o *método de Fourier*, es uno de los métodos más generalizados de resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Expondremos este método para el problema sobre las oscilaciones de una cuerda fija en sus extremos. Estudiaremos la resolución del problema indicado con el mayor detalle, y en el desarrollo ulterior del curso nos referiremos a este parágrafo, omitiendo la repetición de las demostraciones.

De este modo, buscaremos la solución de la ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \tag{1}$$

que satisface a las condiciones de frontera homogéneas

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{2}$$

y a las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

La ecuación (1) es lineal y homogénea; por esto, la suma de soluciones particulares es también solución de esta ecuación. Si se tiene un número de soluciones particulares suficientemente grande, se puede probar, sumándolas con ciertos coeficientes, hallar la solución buscada.

Plantearemos el *problema auxiliar fundamental*:

hallar la solución de la ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

que no sea idénticamente nula, satisfaga a las condiciones de frontera homogéneas

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

y se represente en forma del producto

$$u(x, t) = X(x)\, T(t), \tag{5}$$

donde $X(x)$ es una función sólo de la variable x, y $T(t)$, una función sólo de la variable t.

Poniendo la forma supuesta de la solución de (5) en la ecuación (1), se obtiene:

$$X'' T = \frac{1}{a^2} T'' X,$$

o bien, luego de dividir entre XT,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{6}$$

Para que la función (5) sea solución de la ecuación (1), la igualdad (6) debe satisfacerse idénticamente, es decir, para cualquier valor de las variables independientes $0 < x < l$, $t > 0$. El segundo miembro de la igualdad (6) es una función sólo de la variable t, y el primero, sólo de x. Fijando, por ejemplo, cierto valor de x y variando t (o al revés), se obtiene que ambos miembros de la igualdad (6) se mantienen constantes al variar sus argumentos:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \tag{7}$$

donde λ es una constante, que se toma con signo menos para comodidad de los razonamientos subsiguientes, sin hacer con esto ninguna suposición sobre su signo.

De la relación (7) se obtienen las ecuaciones diferenciales ordinarias para la determinación de las funciones $X(x)$ y $T(t)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(x) \not\equiv 0, \tag{8}$$

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad T(t) \not\equiv 0. \tag{9}$$

Las condiciones de frontera (4) dan:

$$u(0, t) = X(0)\, T(t) = 0,$$
$$u(l, t) = X(l)\, T(t) = 0.$$

De aquí se deduce que la función $X(x)$ debe satisfacer a las condiciones complementarias

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{10}$$

puesto que si no tendríamos que

$$T(t) \equiv 0 \quad \text{y} \quad u(x, t) \equiv 0,$$

mientras que el problema consiste en hallar la solución no trivial. Para la función $T(t)$ no hay ninguna condición complementaria en el problema auxiliar fundamental.

De este modo, con respecto a la determinación de la función $X(x)$ se obtiene el *problema* más sencillo *de los valores propios*:

hallar los valores del parámetro λ, para los cuales existen soluciones no triviales del problema:

$$\left.\begin{array}{c} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{array}\right\} \tag{11}$$

así como también hallar dichas soluciones. Tales valores del parámetro λ se llaman valores propios, y las soluciones no triviales que les corresponden, funciones propias del problema (11). El problema enunciado de este modo se llama a menudo *problema de Sturm-Liouville.*

Consideremos por separado los casos en que el parámetro λ es negativo, igual a cero o positivo.

1. Para $\lambda < 0$ el problema no posee soluciones no triviales. En efecto, la solución general de la ecuación (8) tiene la forma

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}.$$

Las condiciones de frontera dan:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0;$$

$$X(l) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \quad (\alpha = l\sqrt{-\lambda}),$$

es decir,

$$C_1 = -C_2 \quad \text{y} \quad C_1 (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0.$$

Pero, en el caso considerado, α es real y positivo, de forma que $e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$. Por esto,

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

y, por consiguiente,

$$X(x) \equiv 0.$$

2. Para $\lambda = 0$ tampoco existen soluciones no triviales. Efectivamente, en este caso la solución general de la ecuación (8) tiene la forma

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Las condiciones de frontera dan:

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0,$$
$$X(l) = C_1 l = 0,$$

es decir, $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$ y, por lo tanto,

$$X(x) \equiv 0.$$

3. Para $\lambda > 0$, la solución general de la ecuación puede escribirse en la forma

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda} x + D_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} x.$$

Las condiciones de frontera dan:

$$X(0) = D_1 = 0,$$
$$X(l) = D_2 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda} l = 0.$$

Si $X(x)$ no es idénticamente nulo, entonces $D_2 \neq 0$; por esto

$$\operatorname{sen} \sqrt{\lambda} l = 0, \tag{12}$$

o bien

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

donde n es un entero arbitrario. En consecuencia, las soluciones no triviales del problema (11) son posibles sólo para los valores

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

A estos valores propios les corresponden las funciones propias

$$X_n(x) = D_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

donde D_n es una constante arbitraria.

De esta manera, sólo para valores de λ iguales a

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \tag{13}$$

existen soluciones no triviales del problema (11):

$$X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \tag{14}$$

que se determinan salvo un factor constante, que hemos elegido igual a la unidad. A estos mismos valores λ_n les corresponden

las soluciones de la ecuación (9)

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at, \qquad (15)$$

donde A_n y B_n son constantes arbitrarias.

Volviendo al problema (1) — (3), concluimos que las funciones

$$u_n(x, t) = X_n(x)\, T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \qquad (16)$$

son soluciones particulares de la ecuación (1) que satisfacen a las condiciones de frontera (4) y son representables en forma del producto (5) de dos funciones, una de las cuales depende sólo de x, y la otra, de t. Estas soluciones pueden satisfacer a las condiciones iniciales (3) de nuestro problema inicial sólo para casos particulares de las funciones iniciales $\varphi(x)$ y $\psi(x)$.

Consideremos la resolución del problema (1) — (3) en el caso general. Debido a la linealidad y homogeneidad de la ecuación (1), la suma de las soluciones particulares

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \qquad (17)$$

también satisface a esta ecuación y a las condiciones de frontera (2). En esto nos detendremos con más detalle en breve (véase el p. 3 del presente parágrafo). Las condiciones iniciales permiten determinar A_n y B_n. Exijamos que la función (17) satisfaga a las condiciones (3):

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) = \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \\ u_t(x, 0) = \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} a B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

De la teoría de las series de Fourier es sabido que una función arbitraria continua a trozos y derivable a trozos $f(x)$, dada en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant l$, se desarrolla en la serie de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \qquad (19)$$

donde[1])

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi. \tag{20}$$

Si las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ satisfacen a las condiciones de desarrollo en serie de Fourier, entonces

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n}{l}x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi, \tag{21}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n}{l}x, \quad \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi. \tag{22}$$

La comparación de estas series con las fórmulas (18) muestra que para que se cumplan las condiciones iniciales hay que hacer

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a}\psi_n, \tag{23}$$

con lo cual se determina totalmente la función (17) que da la solución del problema investigado.

Hemos determinado la solución en forma de la serie infinita (17). Si esta serie diverge o la función que ésta determina no es derivable, ella no puede, claro está, representar la solución de nuestra ecuación diferencial.

---

[1]) Generalmente se estudian las funciones periódicas con período $2l$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n}{l}x\right),$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} F(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(\xi)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi.$$

Si la función $F(x)$ es impar, entonces $a_n = 0$, de manera que

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n}{l}x;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(\xi)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi = \frac{2}{l}\int_0^l F(\xi)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi.$$

Si la función $F(x)$ está dada sólo en el intervalo $(0, l)$, podemos continuarla en forma impar y efectuar el desarrollo en el intervalo desde $-l$ hasta $+l$, lo que nos conduce a las fórmulas (19) y (20). (Véase B. M. Budak, S. V. Fomín, *Integrales Múltiples y Series*, Ed. «Naúka», 1965.)

En el presente punto nos limitaremos a la determinación formal de la solución. El estudio de las condiciones bajo las cuales la serie (17) converge y representa la solución, será efectuada en el p. 3.

2. Interpretación de la solución. Interpretemos ahora la solución obtenida. La función $u_n(x, t)$ puede representarse en la forma

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at\right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x =$$

$$= \alpha_n \cos \frac{\pi n}{l} a (t + \delta_n) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \quad (24)$$

donde

$$\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \frac{\pi n}{l} a\delta_n = -\operatorname{arc\,tg} \frac{B_n}{A_n}. \quad (25)$$

Cada punto de la cuerda x_0 efectúa las oscilaciones armónicas

$$u_n(x_0, t) = \alpha_n \cos \frac{\pi n}{l} a (t + \delta_n) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x_0$$

con amplitud

$$\alpha_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x_0.$$

El movimiento de una cuerda de este tipo se denomina *onda estacionaria*. Los puntos $x = m \frac{l}{n}$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$, en los cuales $\operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x = 0$, quedan inmóviles durante todo el proceso y se llaman *nodos* de la onda estacionaria $u_n(x, t)$. Los puntos $x = \frac{2m+1}{2n} l$ $(m = 0, 1, \ldots, n-1)$, en los cuales $\operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x = \pm 1$, oscilan con la amplitud máxima α_n, y se llaman *vientres* de la onda estacionaria.

El perfil de una onda estacionaria es en todo momento una sinusoide:

$$u_n(x, t) = C_n(t) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

donde

$$C_n(t) = \alpha_n \cos \omega_n (t + \delta_n) \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a\right).$$

En el momento de tiempo t, en el cual $\cos \omega_n (t + \delta_n) = \pm 1$, las desviaciones alcanzan sus valores máximos, y la velocidad del movimiento es nula. En los momentos de tiempo t, en los cuales $\cos \omega_n (t + \delta_n) = 0$, la desviación es igual a cero, y la velocidad del movimiento es máxima. Las frecuencias de las oscilaciones de todos los puntos de la cuerda coinciden, y son iguales a

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} a. \tag{26}$$

Las frecuencias ω_n se llaman *frecuencias propias* de las oscilaciones de la cuerda. Para las oscilaciones transversales de la cuerda $a^2 = \frac{T}{\rho}$ y, por lo tanto,

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{27}$$

La energía de la onda estacionaria n-ésima (n-ésima *armónica*) para el caso de las oscilaciones transversales de la cuerda es igual a

$$E_n = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right] dx =$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2} \int_0^l \left[\rho \omega_n^2 \operatorname{sen}^2 \omega_n (t + \delta_n) \operatorname{sen}^2 \frac{\pi n}{l} x + \right.$$

$$\left. + T \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos^2 \omega_n (t + \delta_n) \cos^2 \frac{\pi n}{l} x\right] dx =$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2} \frac{l}{2} \left[\rho \omega_n^2 \operatorname{sen}^2 \omega_n (t + \delta_n) + T \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos^2 \omega_n (t + \delta_n)\right], \tag{28}$$

puesto que

$$\int_0^l \operatorname{sen}^2 \frac{\pi n}{l} x \, dx = \int_0^l \cos^2 \frac{\pi n}{l} x \, dx = \frac{l}{2}.$$

Utilizando la expresión para α_n, ω_n, así como también la igualdad $T = a^2\rho$, obtenemos:

$$E_n = \frac{\rho \alpha_n^2 \omega_n^2}{4} l = \omega_n^2 M \cdot \frac{A_n^2 + B_n^2}{4}, \qquad (29)$$

donde $M = l\rho$ es la masa de la cuerda.

Las oscilaciones de una cuerda son captadas generalmente por el sonido que ésta genera. Sin detenernos en el proceso de propagación de las oscilaciones en el aire y de percepción de las oscilaciones acústicas por nuestro oído, se puede decir que el sonido de una cuerda es la superposición de «*tonos simples*», que corresponden a las ondas estacionarias, en las cuales se descompone la oscilación. Esta descomposición del sonido en tonos simples no es una operación de carácter solamente matemático. La obtención de los tonos simples se puede efectuar por vía experimental mediante resonadores.

La altura del tono depende de la frecuencia de las oscilaciones que le corresponden. La fuerza del tono se determina por su energía y, por consiguiente, por su amplitud. El tono más bajo que puede emitir una cuerda se determina por la frecuencia propia más baja $\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$, y se llama *tono principal* de la cuerda. Los demás tonos, que corresponden a frecuencias múltiplos de ω_1, se llaman armónicos (*sobretonos*). El timbre del sonido depende de los armónicos que haya conjuntamente con el tono principal, y de la distribución de la energía entre éstos.

El tono más bajo de la cuerda y su timbre dependen del método de excitación de las oscilaciones. En efecto, el método de generación de las oscilaciones determina las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \qquad (3)$$

mediante las cuales se expresan los coeficientes A_n y B_n. Si $A_1 = B_1 = 0$, el tono más bajo será el que corresponda a la frecuencia ω_n, donde n es el mínimo número para el que A_n ó B_n son diferentes de cero.

Por lo común, la cuerda da un mismo sonido. En efecto, hagamos oscilar la cuerda tirándola hacia un lado y soltándola sin velocidad inicial. En este caso

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x) > 0$$

y

$$A_1 = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi) \operatorname{sen}\frac{\pi}{l}\xi \, d\xi > 0,$$

puesto que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{l}\xi > 0.$$

Los demás coeficientes son, en general, mucho menores que A_1, puesto que la función $\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi$ es de signo variable para $n \geqslant 2$. En particular, si $\varphi(x)$ es simétrica con respecto al centro de la cuerda, $A_2 = 0$. De este modo, si hacemos oscilar una cuerda desplazándola hacia un lado ($\varphi(x) > 0$), el tono más bajo será el tono principal de la cuerda, cuya energía, en general, es mayor que la de los demás armónicos.

También se puede hacer oscilar una cuerda por otros medios. Por ejemplo, si la función inicial es impar con respecto al centro de la cuerda, entonces

$$A_1 = 0,$$

y el tono más bajo corresponde a la frecuencia

$$\omega = \omega_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Si se toca la cuerda exactamente en el centro, su sonido cambia notablemente, y ésta pasa a sonar a una octava de su tono. Este método de cambiar el tono se aplica con frecuencia al tocar el violín, la guitarra y otros instrumentos de cuerda, y se denomina flageolet. Desde el punto de vista de la teoría de las oscilaciones de las cuerdas, este fenómeno queda completamente claro. En el momento de tocar la cuerda en su centro, eliminamos las ondas estacionarias que tienen vientres en este punto, y conservamos sólo los armónicos que poseen nodos en dicho punto. De esta manera, se quedan sólo los armónicos pares, y la frecuencia más baja será

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Si tocamos la cuerda a una distancia de 1/3 de su longitud a partir de su extremo, la altura del tono fundamental aumenta tres veces, puesto que en este caso se conservan sólo los armónicos que tienen nodos en el punto $x = \frac{l}{3}$.

Las fórmulas

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \text{y} \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{T}}, \qquad (30)$$

que determinan la frecuencia y el período de la oscilación fundamental respectivamente, explican las siguientes leyes de las oscilaciones de las cuerdas, que fueron descubiertas por primera vez empíricamente (leyes de Mersenne).

1. Para las cuerdas de igual densidad e igual tensión, el período de oscilaciones es proporcional a su longitud.

2. Si la longitud de la cuerda es fija, el período varía en forma inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la tensión.

3. Si la longitud y la tensión están fijas, el período varía proporcionalmente a la raíz cuadrada de la densidad lineal de la cuerda.

Estas reglas se comprueban fácilmente en un monocordio.

En el presente punto hemos considerado las ondas estacionarias que surgen en las oscilaciones de una cuerda con extremos fijos. El problema sobre la existencia de una solución del tipo

$$u(x, t) = X(x)\,T(t)$$

es equivalente al problema de la existencia de ondas estacionarias, puesto que los perfiles de esta solución son proporcionales para distintos momentos de tiempo.

3. Representación de oscilaciones cualesquiera en forma de superposición de ondas estacionarias. En el punto 1 hemos estudiado el problema de las oscilaciones libres de una cuerda fija en sus extremos, y hemos demostrado la existencia de soluciones particulares en forma de ondas estacionarias. También fue dado el esquema formal de representación de una oscilación arbitraria en forma de una suma infinita de ondas estacionarias. En el presente punto daremos una fundamentación de la representación de una solución arbitraria como superposición de ondas estacionarias. En primer término, estudiaremos la generalización del principio de superposición, bien conocido para las sumas finitas, al caso de series infinitas.

Sea $L(u)$ un operador diferencial lineal, de forma que $L(u)$ es igual a la suma de ciertas derivadas de la función (ordinarias o parciales) con coeficientes que son funciones de las variables independientes.

Demostremos el lema (*principio generalizado de superposición*):

Si las funciones u_i ($i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$) son soluciones particulares de la ecuación diferencial lineal homogénea $L(u) = 0$ (ordinaria o en derivadas parciales), la serie $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ es también solución de esta ecuación, si el cálculo de las derivadas de u que figuran en la ecuación $L(u) = 0$ se puede efectuar mediante la derivación término a término de la serie.

En efecto, si las derivadas de u que figuran en la ecuación $L(u) = 0$ pueden ser calculadas derivando la serie término a término, entonces tendremos, en virtud de la linealidad de la ecuación,

$$L(u) = L\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i) = 0,$$

puesto que las series convergentes pueden sumarse término a término. Con esto queda demostrado que la función u satisface a la ecuación. Como condición suficiente para la legitimidad de la derivación término a término de la serie, utilizaremos todo el tiempo la condición de convergencia uniforme de la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i), \tag{31}$$

que se obtiene después de la derivación[1]).

Volvamos ahora a nuestro problema de frontera. Ante todo, debemos demostrar la continuidad de la función

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}at\right)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x, \tag{32}$$

de donde se seguirá que $u(x, t)$ tiende en forma continua hacia sus valores iniciales y de frontera. Para esto, es suficiente demostrar la convergencia uniforme de la serie de $u(x, t)$, ya que el término general de esta serie es una función continua, y una serie de funciones continuas que converge uniformemente determina una función continua. Aplicando la desigualdad

$$|u_n(x, t)| \leqslant |A_n| + |B_n|,$$

se concluye que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) \tag{33}$$

es mayorante para la serie (32). Si la serie mayorante (33) converge, la serie (32) convergerá uniformemente, es decir, la función $u(x, t)$ será continua.

Para probar que $u_t(x, t)$ tiende en forma continua a sus valores iniciales, hay que demostrar la continuidad de esta función, para lo cual es suficiente demostrar la convergencia uniforme de

---

[1]) Véase V. I. Smirnov, *Curso de Matemáticas Superiores*, t. II, Ed. «Naúka», 1965; B. M. Budak, S. V. Fomin, *Integrales Múltiples y Series*, ed. «Naúka», 1965.

la serie

$$u_t(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a \frac{\pi n}{l} \left(-A_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at + B_n \cos \frac{\pi n}{l} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \quad (34)$$

o bien la convergencia de la serie mayorante

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n (|A_n| + |B_n|). \quad (35)$$

Por último, para demostrar que la función $u(x, t)$ satisface a la ecuación, es decir, que se puede aplicar el principio generalizado de superposición, es suficiente demostrar la posibilidad de derivar dos veces la serie para $u(x, t)$ término a término, para lo cual, a su vez, es suficiente demostrar la convergencia uniforme de las series

$$u_{xx} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_{tt} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} =$$

$$= -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

a las cuales les corresponde, sin tomar en cuenta los factores de proporcionalidad, una serie mayorante común:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (|A_n| + |B_n|). \quad (36)$$

Como

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a} \psi_n,$$

donde

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \, dx, \quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \, dx,$$

nuestro problema se reduce a la demostración de la convergencia de las series

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k\,|\varphi_n| \quad (k=0,\,1,\,2),\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k\,|\psi_n| \quad (k=-1,\,0,\,1).\end{array}\right\} \tag{37}$$

Con este fin, aplicaremos las conocidas[1]) propiedades de las series de Fourier.

Si una función $F(x)$, periódica con período $2l$, posee k derivadas continuas, y la derivada $(k+1)$-ésima es continua a trozos, la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k\,(|a_n|+|b_n|), \tag{38}$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier, converge. Si se trata del desarrollo en serie de $\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x$ de la función $f(x)$, dada sólo en el intervalo $(0,\,l)$, es necesario que las condiciones anteriores se cumplan para la función $F(x)$, que se obtiene al continuar en forma impar $f(x)$. En particular, para la continuidad de $F(x)$ es necesario que $f(0)=0$, puesto que en caso contrario al efectuar la continuación impar se obtendría una discontinuidad en el punto $x=0$; análogamente, en el punto $x=l$ debe ser $f(l)=0$, puesto que la función continuada debe ser continua y periódica, con período $2l$. La continuidad de la derivada primera para $x=0$, $x=l$, se obtiene automáticamente al efectuar la continuación impar. En general, para la continuidad de las derivadas pares de la función continuada hay que exigir que

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(l)=0 \quad (k=0,\,2,\,4,\,\ldots,\,2n). \tag{39}$$

La continuidad de las derivadas impares tiene lugar sin exigencias complementarias.

De esta manera, para la convergencia de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k\,|\varphi_n| \quad (k=0,\,1,\,2),$$

es suficiente exigir que la desviación inicial $\varphi(x)$ satisfaga a las siguientes condiciones.

[1]) Véase, por ejemplo, V. I. Smirnov, *Curso de Matemáticas Superiores*, t. II, ed. «Naúka», 1965; B. M. Budak, S. V. Fomín, *Integrales Múltiples y Series*, ed. «Naúka», 1965.

1° Las derivadas de la función $\varphi(x)$ hasta de segundo orden inclusive son continuas; la derivada tercera es continua a trozos y, además,

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0; \quad \varphi''(0)=\varphi''(l)=0. \tag{40}$$

Para la convergencia de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \quad (k=-1, 0, 1),$$

hay que imponerle a la velocidad inicial $\psi(x)$ las condiciones:

2° La función $\psi(x)$ posee derivada continua, derivada segunda continua a trozos y, además,

$$\psi(0)=\psi(l)=0. \tag{41}$$

De esta forma, hemos demostrado que cualquier oscilación $u(x, t)$, si las funciones iniciales $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ satisfacen a las condiciones 1° y 2°, se representa en forma de superposición de ondas estacionarias. Las condiciones 1° y 2° son condiciones suficientes, ligadas a los métodos de demostración que hemos aplicado.

Un problema análogo hemos resuelto en el p. 5 del § 2 mediante el método de la propagación de ondas:

$$u(x, t)=\frac{\Phi(x-at)+\Phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)\,d\alpha, \tag{42}$$

dondo las funciones Φ y Ψ son continuaciones impares con respecto a 0 y l de las funciones iniciales $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, dadas en el segmento $(0, l)$. Las funciones Φ y Ψ, como fue demostrado, son periódicas con período $2l$, y por esto pueden ser representadas mediante las series

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x, \quad \Psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x,$$

donde φ_n y ψ_n son los coeficientes de Fourier de las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$. Sustituyendo estas series en la fórmula (42) y aplicando el teorema sobre el seno y el coseno de una suma y de una diferencia, se obtiene la expresión

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n \cos\frac{\pi n}{l}at+\frac{l}{\pi na}\psi_n \operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}at\right)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x, \tag{43}$$

que coincide con la representación dada por el método de separación de las variables.

En consecuencia, la fórmula (43) tiene lugar bajo las mismas hipótesis que la (42) (véase el p. 1 del § 3), la cual fue obtenida bajo la suposición de que la función $\Phi(x)$ poseía derivada segunda continua, y la función $\Psi(x)$, derivada primera continua.

Volviendo a las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, debemos exigir, además de las condiciones de derivabilidad, el cumplimiento de las condiciones

$$\begin{gathered} \varphi(0)=\varphi(l)=0, \quad \psi(0)=\psi(l)=0, \\ \varphi''(0)=\varphi''(l)=0. \end{gathered} \tag{44}$$

De este modo, las condiciones 1° y 2°, que son suficientes para fundamentar el método de separación de las variables, dependen del método de demostración, y contienen condiciones complementarias en comparación con las condiciones que aseguran la existencia de la solución.

Al fundamentar la posibilidad de representar la solución como el resultado de la superposición de ondas estacionarias, hemos expuesto el primer método de demostración de la convergencia de las series, por cuanto éste no está ligado a la forma especial (42), aplicable sólo a la ecuación más simple de las oscilaciones, y puede ser generalizado sin dificultad a muchos otros problemas, a pesar de que este método requiere exigencias más fuertes a las funciones iniciales.

4. Ecuaciones no homogéneas. Consideremos la ecuación no homogénea de las oscilaciones

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), \quad a^2=\frac{k}{\rho}, \quad 0<x<l \tag{45}$$

con las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u(x,0)&=\varphi(x), \\ u_t(x,0)&=\psi(x), \end{aligned}\right\} \quad 0\leqslant x\leqslant l \tag{46}$$

y las condiciones de frontera homogéneas

$$\left.\begin{aligned} u(0,t)&=0, \\ u(l,t)&=0, \end{aligned}\right\} \quad t>0. \tag{47}$$

Buscaremos la solución del problema en forma del desarrollo en serie de Fourier con respecto a x

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x, \tag{48}$$

considerando a t como un parámetro. Para hallar $u(x,t)$, hay que determinar las funciones $u_n(t)$. Representemos a la función $f(x,t)$ y a las condiciones iniciales en forma de series de Fourier:

$$\left.\begin{aligned} f(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x, \quad f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,t)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi; \\ \varphi(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x, \quad \varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi; \\ \psi(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x, \quad \psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Sustituyendo la forma supuesta de la solución (48) en la ecuación inicial (45)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \left\{ -a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) - \ddot{u}_n(t) + f_n(t) \right\} = 0,$$

apreciamos que ésta se satisfará si todos los coeficientes del desarrollo son iguales a cero, es decir, si

$$\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 u_n(t) = f_n(t). \qquad (50)$$

Hemos obtenido una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes constantes para la determinación de $u_n(t)$. Las condiciones iniciales nos dan:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

de donde se deduce que

$$\left.\begin{aligned} u_n(0) &= \varphi_n, \\ \dot{u}_n(0) &= \psi_n. \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Estas condiciones complementarias determinan totalmente la solución de la ecuación (50). La función $u_n(t)$ se puede representar en la forma

$$u_n(t) = u_n^{(I)}(t) + u_n^{(II)}(t),$$

donde

$$u_n^{(I)}(t) = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} a(t - \tau) \cdot f_n(\tau)\, d\tau \qquad (52)$$

es la solución de la ecuación no homogénea con condiciones iniciales nulas[1] y

$$u_n^{(II)}(t) = \varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at \qquad (53)$$

es la solución de la ecuación homogénea con las condiciones iniciales dadas. De esta manera, la solución buscada se escribe en

[1] Esto puede comprobarse directamente. La fórmula (52) puede ser obtenida por el método de variación de las constantes. Véase también la letra pequeña al final del presente punto.

la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot f_n(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x. \qquad (54)$$

La segunda suma es la solución del problema de las oscilaciones libres de una cuerda bajo las condiciones iniciales dadas, y ya la hemos investigado antes con suficiente detalle. Estudiemos la primera suma, que representa las oscilaciones forzadas de la cuerda bajo la acción de la fuerza externa con condiciones iniciales nulas. Aplicando la expresión (49) para $f_n(t)$, se halla:

$$u^{(I)}(x, t) = \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \right\} \times$$

$$\times f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \qquad (55)$$

donde

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{1}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi. \qquad (56)$$

Esclareceremos el sentido físico de la expresión obtenida. Supongamos que la función $f(\xi, \tau)$ es diferente de cero en un entorno suficientemente pequeño del punto $M_0(\xi_0, \tau_0)$:

$$\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + \Delta\tau.$$

La función $\rho f(\xi, \tau)$ es la densidad de la fuerza que actúa; la fuerza que está aplicada al intervalo $(\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi)$ es igual a

$$F(\tau) = \rho \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi, \tau)\, d\xi,$$

e

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} F(\tau)\, d\tau = \rho \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau$$

es el impulso de esta fuerza durante el tiempo $\Delta\tau$. Si se aplica el teorema del valor medio a la expresión

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau,$$

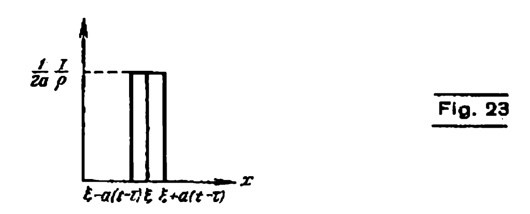


Fig. 23

se obtiene

$$u(x, t) = G(x, \bar{\xi}, t-\bar{\tau}) \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \qquad (57)$$

donde

$$\xi_0 \leqslant \bar{\xi} \leqslant \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 \leqslant \bar{\tau} \leqslant \tau_0 + \Delta\tau.$$

Pasando al límite en la fórmula (57) cuando $\Delta\xi \to 0$ y $\Delta\tau \to 0$, obtenemos la función

$$u(x, t) = G(x, \xi_0, t-\tau_0)\frac{I}{\rho}, \qquad (58)$$

que se puede interpretar como la influencia de un impulso instantáneo concentrado de potencia I.

Si se conoce la función $\frac{I}{\rho} G(x, \xi, t-\tau)$, que es la acción de un impulso unitario concentrado, queda claro de inmediato que la acción de una fuerza $f(x, t)$, distribuida en forma continua, debe representarse mediante la fórmula

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \qquad (59)$$

que coincide con la (55), obtenida más arriba.

La función de influencia del impulso concentrado para la recta infinita fue estudiada en el parágrafo anterior. Recordemos que ésta es una función constante a trozos igual a $\frac{1}{2a}\frac{I}{\rho}$ dentro del ángulo superior característico del punto (ξ, τ), y a cero fuera de este ángulo. La función de influencia del impulso concentrado para una cuerda fija $(0, l)$, puede ser obtenida partiendo de la función de influencia para la cuerda infinita, mediante la continuación impar con respecto a los puntos $x = 0$ y $x = l$.

Consideremos un momento de tiempo t, suficientemente próximo a τ, cuando la influencia de la reflexión de los extremos $x = 0$ y $x = l$ aún no se deja sentir. Para este momento, la función de influencia está representada por la gráfica de la fig. 23.

Desarrollemos esta función (haciendo $I = \rho$) en serie de Fourier por sen $\frac{\pi n}{l}x$; los coeficientes de Fourier serán iguales a

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l G(\alpha, \xi, t-\tau)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\alpha\, d\alpha = \frac{1}{al}\int_{\xi-a(t-\tau)}^{\xi+a(t-\tau)}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\alpha\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{a\pi n}\left\{\cos\frac{\pi n}{l}[\xi - a(t-\tau)] - \cos\frac{\pi n}{l}[\xi + a(t-\tau)]\right\} =$$

$$= \frac{2}{a\pi n}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}a(t-\tau).$$

De aquí se obtiene la fórmula

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi, \qquad (60)$$

que coincide con la (56), hallada por el método de separación de las variables.

Para los valores de t, en los cuales comienza a dejarse sentir la influencia de los extremos fijos, la construcción de la función de influencia mediante las características es engorrosa; la representación en forma de serie de Fourier, en cambio, se mantiene válida también para este caso.

Nos limitaremos a este esquema formal de la solución que hemos dado, sin estudiar las condiciones de aplicación de la fórmula obtenida.

Consideremos la ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes

$$L(u) = u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}u^{(1)} + p_n u = f(t) \qquad (1^*)$$

$$\left(u^{(i)} = \frac{d^i u}{dt^i}\right)$$

y con las condiciones iniciales

$$u^{(i)}(0) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \qquad (2^*)$$

Su solución se da por la fórmula

$$u(t) = \int_0^t U(t-\tau)f(\tau)\,d\tau, \qquad (3^*)$$

donde $U(t)$ es la solución de la ecuación homogénea

$$L(U) = 0$$

con condiciones iniciales

$$U^{(i)}(0) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-2), \; U^{(n-1)}(0) = 1. \qquad (4^*)$$

En efecto, calculando las derivadas de $u(t)$ mediante la derivación de los segundos miembros con respecto a t, hallamos:

$$\left.\begin{aligned} u^{(1)}(t) &= \int_0^t U^{(1)}(t-\tau) f(\tau)\,d\tau + U(0) f(t) \quad [U(0)=0], \\ u^{(2)}(t) &= \int_0^t U^{(2)}(t-\tau) f(\tau)\,d\tau + U^{(1)}(0) f(t) \quad [U^{(1)}(0)=0], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u^{(n-1)}(t) &= \int_0^t U^{(n-1)}(t-\tau) f(\tau)\,d\tau + U^{(n-2)}(0) f(t)\, [U^{(n-2)}(0)=0], \\ u^{(n)}(t) &= \int_0^t U^{(n)}(t-\tau) f(\tau)\,d\tau + U^{(n-1)}(0) f(t) \quad [U^{(n-1)}(0)=1]. \end{aligned}\right\} \quad (5^*)$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación (1*), se obtiene:

$$L(u) = \int_0^t L[U(t-\tau)] f(\tau)\,d\tau + f(t) = f(t),$$

es decir, la ecuación se satisface. Es evidente que las condiciones iniciales (2*) también se cumplen.

No es difícil dar una interpretación física directa de la función $U(t)$ y de la fórmula (3*). Comúnmente la función $u(t)$ es el desplazamiento de cierto sistema, y $f(t)$, la fuerza que actúa sobre dicho sistema. Supongamos que para $t < 0$ nuestro sistema se hallaba en estado de reposo, y que su desplazamiento se origina por la función $f_\varepsilon(t)$ $(\geqslant 0)$, diferente de cero sólo en el intervalo de tiempo $0 < t < \varepsilon$. Designemos el impulso de esta fuerza mediante

$$I = \int_0^t f_\varepsilon(\tau)\,d\tau.$$

Denotemos por $u_\varepsilon(t)$ a la función que corresponde a $f_\varepsilon(t)$, considerando a ε como un parámetro, y haciendo $I = 1$. No es difícil comprobar que para $\varepsilon \to 0$ existe el $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t)$, que no depende de la elección de $f_\varepsilon(t)$, y que este límite es igual a la función $U(t)$, definida más arriba:

$$U(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t),$$

si hacemos $U(t) \equiv 0$ para $t < 0$. De esta manera, es natural llamar a la función $U(t)$ función de influencia del impulso instantáneo.

En efecto, considerando la fórmula (3*) y aplicando el teorema del valor medio, se obtiene:

$$u_\varepsilon(t) = U(t-\tau_\varepsilon^*) \int_0^\varepsilon f_\varepsilon(\tau)\,d\tau = U(t-\tau_\varepsilon^*) \quad (0 \leqslant \tau_\varepsilon^* < \varepsilon < t).$$

Pasando al límite para $\varepsilon \to 0$, se observa que existe el límite

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} U(t-\tau_\varepsilon^*) = U(t),$$

lo cual demuestra nuestra afirmación.

Pasemos ahora a la representación de la solución de la ecuación no homogénea mediante $U(t)$, la función de influencia del impulso instantáneo. Dividiendo el intervalo $(0, t)$ con los puntos τ_i en partes iguales

$$\Delta t = \frac{t}{m},$$

representemos a la función $f(t)$ en la forma

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t),$$

donde

$$f_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < \tau_i \text{ y } t \geqslant \tau_{i+1}, \\ f(t) & \text{para } \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}. \end{cases}$$

Entonces la función $u(t)$ es igual a

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t),$$

donde $u_i(t)$ son las soluciones de la ecuación $L(u_i) = f_i$ con condiciones iniciales nulas.

Si m es suficientemente grande, se puede considerar a $u_i(t)$ como la función de influencia de un impulso instantáneo de intensidad

$$I = f_i(\tau_i)\Delta\tau = f(\tau_i)\Delta\tau,$$

de modo que

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} U(t-\tau_i) f(\tau_i)\Delta\tau \xrightarrow[\Delta\tau\to 0]{} \int_0^t U(t-\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

es decir, se obtiene la fórmula

$$u(t) = \int_0^t U(t-\tau) f(\tau)\, d\tau,$$

que demuestra que la influencia de una fuerza que actúa en forma continua se puede representar como la superposición de las influencias de los impulsos instantáneos.

En el caso considerado más arriba, $u_n^{(I)}$ satisface a la ecuación (50) y a las condiciones $u_n(0) = \dot{u}_n(0) = 0$. Para la función de influencia $U(t)$, tenemos:

$$\ddot{U} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 U = 0, \quad U(0) = 0, \quad \dot{U}(0) = 1,$$

de manera que

$$U(t) = \frac{l}{\pi n a} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at.$$

De aquí y de (3*) se obtiene la fórmula (52):

$$u_n^{(1)}(t) = \int_0^t U(t-\tau) f_n(\tau) d\tau = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) f_n(\tau) d\tau.$$

La representación integral (3*), obtenida más arriba, de la solución de la ecuación diferencial ordinaria (1*) tiene, como acabamos de ver, el mismo sentido físico que la fórmula (59), la cual da la representación integral de la solución de la ecuación no homogénea de las oscilaciones.

5. Primer problema general de contorno. Consideremos el *primer problema general de contorno* para la ecuación de las oscilaciones:

hallar la solución de la ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \tag{45}$$

con las condiciones complementarias

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned}\right\} \quad t \geqslant 0. \tag{47'}$$

Introduzcamos una nueva función incógnita $v(x, t)$, haciendo:

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t),$$

de manera que $v(x, t)$ es la desviación de la función $u(x, t)$ de cierta función conocida $U(x, t)$.

Esta función $v(x, t)$ se determinará como la solución de la ecuación

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_{tt} - a^2 U_{xx}]$$

con las condiciones complementarias

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \bar{\varphi}(x), & \bar{\varphi}(x) &= \varphi(x) - U(x, 0), \\ v_t(x, 0) &= \bar{\psi}(x); & \bar{\psi}(x) &= \psi(x) - U_t(x, 0); \\ v(0, t) &= \bar{\mu}_1(t), & \bar{\mu}_1(t) &= \mu_1(t) - U(0, t), \\ v(l, t) &= \bar{\mu}_2(t), & \bar{\mu}_2(t) &= \mu_2(t) - U(l, t). \end{aligned}$$

Escojamos la función auxiliar $U(x, t)$ de forma que sea

$$\bar{\mu}_1(t) = 0 \quad \text{y} \quad \bar{\mu}_2(t) = 0;$$

para esto es suficiente hacer

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Con esto, hemos reducido el problema general de contorno para la función $u(x, t)$ al problema de contorno para la función $v(x, t)$ con condiciones de frontera nulas. El método de resolución de este problema fue expuesto más arriba (véase el p. 4).

6. Problemas de contorno con segundos miembros estacionarios. Una clase muy importante de problemas son los problemas de contorno con segundos miembros estacionarios, cuando las condiciones de contorno y el segundo miembro de la ecuación no dependen del tiempo:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \tag{45'}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= u_1, \quad u_1 = \text{const}, \\ u(l, t) &= u_2, \quad u_2 = \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{47'}$$

En este caso, es natural buscar la solución en forma de la suma

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

donde $\bar{u}(x)$ es el estado estacionario (flexión estática) de la cuerda, que se determina por las condiciones

$$a^2\bar{u}''(x) + f_0(x) = 0,$$

$$\bar{u}(0) = u_1,$$

$$\bar{u}(l) = u_2,$$

y $v(x, t)$, la desviación del estado estacionario. No es difícil observar que la función $\bar{u}(x)$ es igual a

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} + \frac{x}{l}\int_0^l d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2}\, d\xi_2 - \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2}\, d\xi_2.$$

En particular, si $f_0 = \text{const}$, entonces

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} + \frac{f_0}{2a^2}(lx - x^2).$$

La función $v(x, t)$ satisface, evidentemente, a la ecuación homogénea

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

con las condiciones de frontera homogéneas

$$v(0, t) = 0,$$
$$v(l, t) = 0$$

y las condiciones iniciales

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - \bar{u}(x),$$
$$v_t(x, 0) = \psi(x).$$

De este modo, v es la solución del problema de contorno más simple, que ya hemos estudiado en el p. 1 del presente parágrafo.

Al deducir la ecuación de las oscilaciones de la cuerda, así como también en varios otros casos, no hemos tenido en cuenta la acción de la fuerza de la gravedad. De lo que acabamos de exponer se deduce que en lugar de considerar explícitamente la fuerza de la gravedad (y, en general, fuerzas que no dependan del tiempo), es suficiente tomar la desviación del estado estacionario.

Resolvamos un problema sencillo de este tipo, bajo condiciones iniciales nulas:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \tag{45''}$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \tag{46'}$$
$$u(0, t) = u_1, \quad u(l, t) = u_2. \tag{47''}$$

En este caso para la función $v(x, t)$ se obtiene el problema

$$v_{tt} = a^2 v_{xx},$$
$$v(x, 0) = \varphi(x) = -\bar{u}(x), \quad v_t(x, 0) = 0,$$
$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0,$$

No es difícil demostrar que para la resolución de este problema no hay necesidad de utilizar la expresión analítica de $\bar{u}(x)$.

La expresión para $v(x, t)$, según la fórmula (17), tiene la forma

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a \sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \operatorname{sen} a \sqrt{\lambda_n}\, t)\, X_n(x),$$

donde

$$X_n(x) = \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, x \quad \left(\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l}\right)$$

es la función propia del problema de contorno siguiente:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$
$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{10}$$

De las condiciones iniciales deducimos que

$$B_n = 0$$

y

$$A_n = -\frac{2}{l}\int_0^l \bar{u}(x)\,X_n(x)\,dx.$$

Para calcular esta integral, resulta muy cómodo el método siguiente. Aplicando la ecuación (8), se halla:

$$X_n(x) = -\frac{1}{\lambda_n}X_n''(x).$$

Sustituyendo esta expresión en la formula de A_n e integrando por partes dos veces, se obtiene:

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n}\int_0^l \bar{u}(x)\,X_n''(x)\,dx = \frac{2}{l\lambda_n}\left\{\bar{u}X_n'(x)\,\Big|_0^l - \bar{u}'\,X_n\,\Big|_0^l + \int_0^l \bar{u}''X_n(x)\,dx\right\},$$

de donde, considerando la ecuación y las condiciones de frontera para $\bar{u}(x)$, se halla:

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n}\left[u_2X_n'(l) - u_1X_n'(0) - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2}\,X_n(x)\,dx\right],$$

o bien

$$A_n = \frac{2}{\pi n}\left[u_2(-1)^n - u_1 - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2}\,X_n(x)\,dx\right].$$

En particular, para la ecuación homogénea ($f_0(x) = 0$) se tiene:

$$A_n = \frac{2}{\pi n}\,[u_2(-1)^n - u_1].$$

Por este método resulta cómodo calcular los coeficientes de Fourier para las condiciones de frontera de segunda y tercera especie, así como también en el caso del problema de contorno para la cuerda no homogénea

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX}{dx}\right] + \lambda\rho(x)\,X = 0,$$

si se conocen las funciones propias y los valores propios.

7. Problemas sin condiciones iniciales. Como fue demostrado más arriba, el problema sobre las oscilaciones de una cuerda con régimen de frontera dado puede ser reducido a la resolución de una ecuación no homogénea con condiciones de frontera nulas.

Sin embargo, este método con frecuencia complica la resolución del problema, la que puede ser hallada directamente.

Al estudiar la influencia del régimen de frontera, es importante hallar alguna solución particular (de la ecuación homogénea) que satisfaga a las condiciones de frontera dadas, puesto que el cálculo de la corrección de los datos iniciales se reduce a la resolución de la misma ecuación con condiciones de frontera nulas.

Una clase muy importante de problemas sobre la propagación del régimen de frontera son los «problemas sin condiciones iniciales».

Si el régimen de frontera actúa durante un tiempo suficientemente grande, gracias al rozamiento, que existe en todo sistema físico real, la influencia de los datos iniciales disminuye con el transcurso del tiempo. De este modo, llegamos en forma natural al *problema sin condiciones iniciales* (1):

$$\left.\begin{array}{l} \text{hallar la solución de la ecuación} \\ u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t \quad (\alpha > 0), \quad 0 < x < l, \quad t > -\infty \qquad (61) \\ \text{con las condiciones de frontera dadas:} \\ \qquad u(0, t) = \mu_1(t), \\ \qquad u(l, t) = \mu_2(t). \end{array}\right\} \quad (I_\alpha)$$

A este problema lo llamaremos problema (I_α).

El sumando αu_t del segundo miembro de la ecuación corresponde a un rozamiento proporcional a la velocidad.

Estudiemos primeramente el problema sobre la propagación del régimen de frontera periódico:

$$u(l, t) = A \cos \omega t \text{ (o bien } u(l, t) = B \operatorname{sen} \omega t), \qquad (62)$$

$$u(0, t) = 0. \qquad (63)$$

Para las exposiciones ulteriores, nos será más cómodo escribir la condición de frontera en la forma compleja

$$u(l, t) = Ae^{i\omega t}. \qquad (64)$$

Si

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + iu^{(2)}(x, t)$$

satisface a la ecuación (61) con las condiciones de frontera (62) y (64), entonces $u^{(1)}(x, t)$ y $u^{(2)}(x, t)$—sus partes real e imaginaria—satisfacen por separado a la misma ecuación (debido a su linealidad), a la condición (63) y a las condiciones de frontera para $x = l$

$$u^{(1)}(l, t) = A \cos \omega t,$$

$$u^{(2)}(l, t) = A \operatorname{sen} \omega t.$$

Hallemos, pues, la solución del problema

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} - \alpha u_t, \\ u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= A e^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

Haciendo

$$u(x, t) = X(x) e^{i\omega t}$$

y sustituyendo esta expresión en la ecuación, obtenemos, para la función $X(x)$, el siguiente problema:

$$X'' + k^2 X = 0 \quad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} - i\alpha\frac{\omega}{a^2}\right), \qquad (66)$$

$$X(0) = 0, \qquad (67)$$

$$X(l) = A. \qquad (68)$$

De la ecuación (66) y de la condición de frontera (67) se halla:

$$X(x) = C \operatorname{sen} kx.$$

La condición para $x = l$ da:

$$C = \frac{A}{\operatorname{sen} kl}, \qquad (69)$$

de manera que

$$X(x) = A\frac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} kl} = X_1(x) + i X_2(x), \qquad (70)$$

donde $X_1(x)$ y $X_2(x)$ son las partes real e imaginaria de $X(x)$.

La solución buscada se puede representar en la forma

$$u(x, t) = [X_1(x) + iX_2(x)] e^{i\omega t} = u^{(1)}(x, t) + u^{(2)}(x, t),$$

donde

$$u^{(1)}(x, t) = X_1(x)\cos\omega t - X_2(x)\operatorname{sen}\omega t,$$

$$u^{(2)}(x, t) = X_1(x)\operatorname{sen}\omega t + X_2(x)\cos\omega t.$$

Pasando al límite cuando $\alpha \to 0$, se halla que

$$\bar{k} = \lim_{\alpha\to 0} k = \frac{\omega}{a} \qquad (71)$$

y

$$\bar{u}^{(1)}(x,t)=\lim_{\alpha\to 0} u^{(1)}(x,t)=A\frac{\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}x}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}l}\cos\omega t, \tag{72}$$

$$\bar{u}^{(2)}(x,t)=\lim_{\alpha\to 0} u^{(2)}(x,t)=A\frac{\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}x}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}l}\operatorname{sen}\omega t. \tag{73}$$

Consideremos el problema siguiente:

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt}=a^2u_{xx}, \quad 0<x<l, \quad t>-\infty;\\ &u(0,t)=\mu_1(t), \quad t>-\infty;\\ &u(l,t)=\mu_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{I_0}$$

que denominaremos problema (I_0). Es evidente que $\bar{u}^{(1)}(x,t)$ y $\bar{u}^{(2)}(x,t)$ son soluciones del problema (I_0) bajo las condiciones de frontera

$$\bar{u}^{(1)}(0,t)=0, \qquad \bar{u}^{(1)}(l,t)=A\cos\omega t,$$
$$\bar{u}^{(2)}(0,t)=0, \qquad \bar{u}^{(2)}(l,t)=A\operatorname{sen}\omega t.$$

La solución del problema para $\alpha=0$ no siempre existe. Si la frecuencia de las oscilaciones forzadas ω coincide con la frecuencia propia ω_n de las oscilaciones de la cuerda con extremos fijos,

$$\omega=\omega_n=\frac{\pi n}{l}a,$$

el denominador en las fórmulas para $\bar{u}^{(1)}$ y $\bar{u}^{(2)}$ se anula, y no existe solución del problema sin condiciones iniciales.

Esto tiene un sentido físico sencillo: para $\omega=\omega_n$ hay resonancia, es decir, no existe el régimen permanente. La amplitud, a partir de cierto momento $t=t_0$, crece indefinidamente.

Si hay rozamiento ($\alpha\neq 0$), el régimen permanente es posible para cualquier ω, puesto que sen $kl\neq 0$, si k es complejo.

Si $f(t)$ es una función periódica que se puede representar en forma de la serie

$$f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\omega nt+B_n\operatorname{sen}\omega nt), \tag{74}$$

donde ω es la frecuencia mínima, A_n y B_n son los coeficientes de Fourier, la solución del problema para el caso $\alpha = 0$ toma la forma

$$\bar{u}(x, t) = \frac{A_0}{2l} x + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega n t + B_n \operatorname{sen} \omega n t) \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega n}{a} x}{\operatorname{sen} \frac{\omega n}{a} l},$$

siempre que ni una de las frecuencias ωn coincida con las frecuencias propias de la cuerda fija.

Si, en cambio, $f(t)$ no es una función periódica, desarrollándola en la integral de Fourier se puede obtener mediante un método analogo la solución en forma integral.

Obsérvese que la solución del problema sin condiciones iniciales para $\alpha = 0$ no se determina unívocamente si no se agregan algunas condiciones complementarias. En efecto, sumándole a cualquier solución de este problema una combinación arbitraria de ondas estacionarias

$$\sum \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} at \right) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

donde A_n y B_n son constantes arbitrarias, se aprecia que esta suma satisfará a la misma ecuación con las mismas condiciones de frontera.

Para obtener una solución única del problema (I_α) para $\alpha = 0$, introduzcamos la condición complementaria de la «desaparición del rozamiento»:

Diremos que la solución del problema (I_0) satisface a la condición de «desaparición del rozamiento», si ésta es solución del problema (I_α) cuando $\alpha \to 0$.

Análogamente se resuelve el problema, si el extremo $x = l$ está fijo, y para $x = 0$ se ha dado un régimen de frontera.

La solución del problema general sin condiciones iniciales

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

se halla en forma de suma de dos sumandos, para cada uno de los cuales es no homogénea sólo una de las condiciones de frontera.

Demostremos la unicidad de la solución acotada del problema sin condiciones iniciales para la ecuación (61). Supondremos que la solución es continua, así como también sus derivadas segundas, en la región $0 \leqslant x \leqslant l$, $-\infty < t < t_0$, si las condiciones de frontera

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

están definidas en la región $-\infty < t < t_0$.

Sean $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ dos soluciones acotadas del problema considerado (I_α),

$$|u_1| < M, \quad |u_2| < M,$$

donde $M > 0$ es un cierto número.

La diferencia de estas funciones

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

es acotada ($|v| < 2M$), satisface a la ecuación (61) y a las condiciones de frontera homogéneas

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

Los coeficientes de Fourier de la función v

$$v_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l v(x, t) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \, dx$$

satisfacen, evidentemente, a la ecuación

$$\ddot{v}_n + \alpha \dot{v}_n + \omega_n^2 v_n = 0 \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a\right), \qquad (*)$$

puesto que las derivadas segundas de la función $v(x, t)$ son continuas para $0 \leqslant x \leqslant l$.

La solución general de la ecuación (*) es de la forma

$$v_n(t) = A_n e^{q_n^{(1)} t} + B_n e^{q_n^{(2)} t}, \qquad (**)$$

donde $q_n^{(1)}$ y $q_n^{(2)}$ son las raíces de la ecuación característica, iguales a

$$q_n^{(1)} = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2},$$

$$q_n^{(2)} = -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2} \quad (\alpha > 0).$$

Como $\alpha > 0$, entonces $\operatorname{Re} q_n^{(1,2)} < 0$. Por lo tanto, la solución (**) de la ecuación (*) será acotada para $t \to -\infty$ sólo para $A_n = 0$ y $B_n = 0$, es decir, $v_n(t) \equiv 0$ para todo n.

De este modo,

$$v(x, t) \equiv 0, \text{ y } u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

8. **Fuerza concentrada.** Estudiemos el problema de las oscilaciones de una cuerda bajo la acción de una fuerza concentrada, aplicada al punto $x = x_0$. Si la fuerza está distribuida en cierto intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, la solución se determina por la fórmula (55). Efectuando el paso al límite cuando $\varepsilon \to 0$, se puede obtener la solución del problema planteado.

Por otro lado, al deducir la ecuación de las oscilaciones hemos visto (véase (8) del p. 1 del § 1) que en el punto x_0, al que se le ha aplicado una fuerza concentrada, tiene lugar una discontinuidad de la derivada primera, mientras que la propia función se mantiene continua. La solución del problema $u(x, t)$ de las oscilaciones de una cuerda bajo la acción de una fuerza concen-

trada en el punto x_0, puede ser representada mediante dos funciones diferentes:

$$\left.\begin{array}{ll} u(x, t) = u_1(x, t) & \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ u(x, t) = u_2(x, t) & \text{para} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{array}\right\} \tag{75}$$

Estas funciones deben satisfacer a la ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \text{ para } x \neq x_0, \tag{76}$$

a las condiciones de frontera e iniciales

$$\left.\begin{array}{ll} u_1(0, t) = 0, & u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_2(l, t) = 0; & u_t(x, 0) = \psi(x) \end{array}\right\} \tag{77}$$

y a las condiciones de conjunción en el punto $x = x_0$ (véase (8) del § 1), que consisten en la condición de continuidad de la función $u(x, t)$

$$u_1(x_0, t) = u_2(x_0, t) \tag{78}$$

y en la condición que relaciona la magnitud del salto de la derivada con la fuerza $f(t)$, concentrada en el punto x_0:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_0-0}^{x_0+0} = \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_0, t) - \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_0, t) = -\frac{f(t)}{k}. \tag{79}$$

No hay necesidad de preocuparse en que se cumplan las condiciones iniciales. Si hallamos una solución particular de la ecuación (76) que satisfaga a las condiciones de frontera de (77), así como también a (78) y (79), entonces, sumándole la solución de la ecuación homogénea de las oscilaciones, podremos satisfacer siempre a las condiciones iniciales dadas.

Tomemos el caso particular

$$f(t) = A \cos \omega t, \quad -\infty < t < +\infty$$

y hallemos la solución que satisface sólo a las condiciones de frontera, suponiendo que la fuerza actúa todo el tiempo, a partir de $t = -\infty$ (régimen permanente), es decir, resolvamos el problema sin condiciones iniciales. Buscaremos la solución en la forma

$$\begin{array}{ll} u_1(x, t) = X_1(x) \cos \omega t & \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ u_2(x, t) = X_2(x) \cos \omega t & \text{para} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{array}$$

De la ecuación (76) se deduce que

$$\left.\begin{array}{ll} X_1'' + \left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2 X_1 = 0 & \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ X_2'' + \left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2 X_2 = 0 & \text{para} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{array}\right\} \tag{80}$$

Las funciones X_1 y X_2 deben satisfacer, además, a las condiciones de frontera

$$X_1(0)=0, \quad X_2(l)=0, \tag{81}$$

que se desprenden de (77), y a las condiciones de conjunción

$$X_1(x_0)=X_2(x_0), \quad X_1'(x_0)-X_2'(x_0)=\frac{A}{k}, \tag{82}$$

que se obtienen de (78) y (79).

Partiendo de la ecuación (80) y de las condiciones (81), se halla:

$$X_1(x)=C\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}x,$$

$$X_2(x)=D\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}(l-x);$$

las condiciones de conjunción (82) dan:

$$C\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}x_0-D\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}(l-x_0)=0$$

$$C\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}x_0+D\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}(l-x_0)=\frac{A}{k}.$$

Determinando de aquí los coeficientes C y D, obtenemos:

$$u(x,t)=\begin{cases} u_1=\dfrac{Aa}{k\omega}\,\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}(l-x_0)}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}l}\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}x\cos\omega t \text{ para } 0\leqslant x\leqslant x_0, \\[2ex] u_2=\dfrac{Aa}{k\omega}\,\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}x_0}{\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}l}\operatorname{sen}\frac{\omega}{a}(l-x)\cos\omega t \text{ para } x_0\leqslant x\leqslant l. \end{cases}$$

Análogamente se escribe la solución para $f(t)=A\operatorname{sen}\omega t$.

De esta manera, hemos obtenido la solución para el caso $f(t)=A\cos\omega t$ ó $f(t)=A\operatorname{sen}\omega t$. Si $f(t)$ es una función periódica, igual a

$$f(t)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos\omega nt+\beta_n\operatorname{sen}\omega nt)$$

(ω es la frecuencia mínima), entonces, evidentemente,

$$u(x,t)=\begin{cases} u_1=\dfrac{1}{k}\left\{\dfrac{\alpha_0 x}{2}\left(1-\dfrac{x_0}{l}\right)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a\operatorname{sen}\dfrac{\omega n}{a}(l-x_0)}{\omega n\operatorname{sen}\dfrac{\omega n}{a}l}\operatorname{sen}\dfrac{\omega n x}{a}\times\right.\\ \left.\times(\alpha_n\cos\omega nt+\beta_n\operatorname{sen}\omega nt)\right\},\quad 0\leqslant x\leqslant x_0; \\ u_2=\dfrac{1}{k}\left\{\dfrac{\alpha_0 x_0}{2}\left(1-\dfrac{x}{l}\right)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a\operatorname{sen}\dfrac{\omega n}{a}x_0}{\omega n\operatorname{sen}\dfrac{\omega n}{a}l}\operatorname{sen}\dfrac{\omega n(l-x)}{a}\times\right.\\ \left.\times(\alpha_n\cos\omega nt+\beta_n\operatorname{sen}\omega nt)\right\},\quad x_0\leqslant x\leqslant l. \end{cases} \qquad (83)^{1)}$$

Si la función $f(t)$ no es periódica, representándola en la integral de Fourier se puede obtener, por un método análogo, la solución en forma integral.

Si el denominador de una de las funciones (83) es igual a cero

$$\operatorname{sen}\frac{\omega nl}{a}=0,\quad \omega n=\frac{\pi m}{l}a=\omega_m,$$

es decir, si el espectro de las frecuencias de la fuerza contiene a una de las frecuencias de las oscilaciones propias (resonancia), no existe el régimen permanente.

Si el punto de aplicación de la fuerza x_0 es uno de los nodos de la onda estacionaria, que corresponde a una oscilación libre

---

[1]) Los primeros sumandos de estas sumas corresponden a la flexión estacionaria, que se determina por la magnitud de la fuerza

$$f(t)=\frac{\alpha_0}{2}=\text{const},$$

como se aprecia fácilmente, mediante las funciones

$$u=\begin{cases} u_1(x,t)=u_1(x)=\dfrac{1}{k}\dfrac{\alpha_0}{2}x\left(1-\dfrac{x_0}{l}\right)\\ \quad\text{para } 0\leqslant x\leqslant x_0,\\ u_2(x,t)=u_2(x)=\dfrac{1}{k}\dfrac{\alpha_0}{2}x_0\left(1-\dfrac{x}{l}\right)\\ \quad\text{para } x_0\leqslant x\leqslant l. \end{cases}$$

con frecuencia ω_m, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{\omega_m}{a}x_0=0, \quad \operatorname{sen}\frac{\omega_m}{a}(l-x_0)=0.$$

En este caso los numeradores de los sumandos correspondientes para u se anulan, y no tiene lugar el fenómeno de resonancia. Si, en cambio, el punto de aplicación de una fuerza que actúa con frecuencia ω_m es un vientre de la onda estacionaria respectiva de frecuencia ω_m, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{\omega_m}{a}x_0=1,$$

y el fenómeno de resonancia se expresará en su máximo grado.

De aquí se deduce la regla de que para generar la resonancia en una cuerda aplicándole una fuerza concentrada, es necesario que su frecuencia ω sea una de las frecuencias propias de la cuerda, y que el punto de aplicación de la fuerza coincida con uno de los vientres de la onda estacionaria respectiva.

9. Esquema general del método de separación de las variables. El método de separación de las variables se puede aplicar no sólo a la ecuación de las oscilaciones de una cuerda homogénea, sino también a la ecuación de las oscilaciones de una cuerda no homogénea. Estudiemos el siguiente problema:

hallar la solución de la ecuación

$$L[u]=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-q(x)u=\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0<x<l, \quad t>0, \qquad (84)$$

que satisfaga a las condiciones

$$u(0, t)=0, \qquad u(l, t)=0, \qquad t\geqslant 0, \qquad (85)$$

$$u(x, 0)=\varphi(x), \quad u_t(x, 0)=\psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l. \qquad (86)$$

Aquí k, q y ρ son funciones positivas, continuas en el segmento $0\leqslant x\leqslant l$ ($k>0$, $\rho>0$, $q\geqslant 0$)[1]. Resolveremos este problema por el método de separación de las variables. Para hallar las soluciones particulares resolveremos, como antes, el problema auxiliar de la existencia de ondas estacionarias:

hallar una solución no trivial de la ecuación (84) que satisfaga a las condiciones de frontera

$$u(0, t)=0, \quad u(l, t)=0$$

---

[1] El caso en que $k(x)$ se anula en ciertos puntos será considerado aparte (véase el Complemento II).

y que tenga la forma del producto

$$u(x, t) = X(x)\,T(t).$$

Sustituyendo la forma supuesta de la solución en la ecuación y aplicando las condiciones de frontera, se obtiene, después de separar las variables:

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX}{dT}\right] - qX + \lambda\rho X = 0,$$

$$T'' + \lambda T = 0.$$

Para determinar la función $X(x)$ se obtiene el siguiente *problema de contorno para los valores propios*[1]:

hallar los valores del parámetro λ para los cuales existen soluciones no triviales del problema:

$$L(X) + \lambda\rho X = 0, \tag{87}$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{88}$$

y hallar también estas soluciones. Estos valores del parámetro λ se llaman valores propios, y las soluciones no triviales respectivas, funciones propias del problema (87) — (88).

Expondremos las propiedades fundamentales de las funciones y valores propios del problema de contorno (87) y (88) que nos serán necesarias en lo sucesivo.

1. Existe un conjunto numerable de valores propios $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n, \ldots$, a los cuales les corresponden soluciones no triviales del problema: las funciones propias $X_1(x)$, $X_2(x), \ldots, X_n(x), \ldots$

2. Si $q \geqslant 0$, todos los valores propios λ_n son positivos.

3. Las funciones propias $X_m(x)$ y $X_n(x)$ para $m \neq n$ son ortogonales entre sí con densidad $\rho(x)$ en el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$:

$$\int_0^l X_m(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx = 0 \quad (m \neq n) \tag{89}$$

4. (*Teorema del desarrollo de V. A. Steklov.*) Una función arbitraria $F(x)$ que tenga derivada segunda continua y satisfaga a las condiciones de frontera $F(0) = F(l) = 0$, se puede desarrollar en serie que converge en forma uniforme y absoluta en las

---

[1]) Si $\rho = \rho_0 =$ const, $k = k_0 =$ const, se obtiene el problema de contorno sobre las oscilaciones propias de una cuerda con extremos fijos:

$$X'' + \mu X = 0 \quad \left(\mu = \frac{\rho_0}{k_0}\lambda\right),$$

$$X(0) = 0, \; X(l) = 0$$

que fue estudiado en el § 2.

funciones propias $\{X_n(x)\}$:

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x), \quad F_n=\frac{1}{\|X_n\|}\int_0^l F(x)X_n(x)\rho(x)\,dx, \qquad (90)$$

$$\|X_n\|^2=\int_0^l X_n^2(x)\rho(x)\,dx.$$

La demostración de las afirmaciones 1 y 4 se funda, por lo general, en la teoría de las ecuaciones integrales, y no la daremos aquí. En el presente punto nos detendremos en la demostración de las propiedades 2 y 3.

Antes de pasar a la demostración de estas propiedades, deduzcamos la llamada fórmula de Green. Sean $u(x)$ y $v(x)$ funciones arbitrarias con derivadas segundas en el intervalo $a<x<b$, y que posean derivada primera continua en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$. Tomemos la expresión

$$uL[v]-vL[u]=u(kv')'-v(ku')'=[k(uv'-vu')]'.$$

Integrando esta igualdad con respecto a x desde a hasta b, se obtiene la *fórmula de Green*

$$\int_a^b (uL[v]-vL[u])\,dx=k(uv'-vu')\Big|_a^b. \qquad (91)$$

Demostremos la propiedad 3. Sean $X_m(x)$ y $X_n(x)$ dos funciones propias que corresponden a los valores propios λ_m y λ_n. Haciendo en la fórmula (91) $u=X_m(x)$, $v=X_n(x)$ y teniendo en cuenta las condiciones de frontera (88), tendremos[1]:

$$\int_0^l \{X_mL[X_n]-X_nL[X_m]\}\,dx=0 \quad (a=0,\ b=l),$$

de donde, aplicando la ecuación (87), se obtiene:

$$(\lambda_n-\lambda_m)\int_0^l X_m(x)X_n(x)\rho(x)\,dx=0.$$

De este modo, si $\lambda_n\neq\lambda_m$, tiene lugar la condición

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)\rho(x)\,dx=0, \qquad (92)$$

[1]) Las derivadas X'_m y X'_n son continuas en todo el segmento $0\leqslant x\leqslant l$, incluyendo los puntos $x=0$ y $x=l$, puesto que la ecuación (87) nos da:

$$k(x)X'_m(x)=\int_x^{x_0}(q-\lambda_m\rho)X_m\,dx+C.$$

De aquí se obtiene la existencia de la derivada X'_m para $x=0$ y $x=l$.

que expresa la ortogonalidad, con densidad $\rho(x)$, de las funciones propias $X_m(x)$ y $X_n(x)$.

Demostremos ahora que a cada valor propio le corresponde sólo una función propia, salvo un factor constante[1]. En efecto, cualquier función propia se determina unívocamente como la solución de una ecuación diferencial de segundo orden, mediante el valor de la propia función y de su derivada primera en $x = 0$. Suponiendo que existan dos funciones, $\bar{X}$ y $\bar{\bar{X}}$, que correspondan a un mismo valor λ y que se anulen en $x = 0$, y tomando la función

$$X^*(x) = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{\bar{X}}'(0)} \bar{\bar{X}}(x),$$

se advierte que esta función satisface a la misma ecuación de segundo orden (87) y a las mismas condiciones iniciales que la función $\bar{X}(x)$:

$$X^*(0) = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{\bar{X}}'(0)} \bar{\bar{X}}(0) = 0,$$

$$\frac{dX^*}{dx}(0) = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{\bar{X}}'(0)} \bar{\bar{X}}'(0) = \bar{X}'(0).$$

Con esto queda demostrado que $X^*(x) = \bar{X}(x)$, y que

$$\bar{X}(x) = A\bar{\bar{X}}(x) \quad \left(A = \frac{\bar{X}'(0)}{\bar{\bar{X}}'(0)}\right).$$

Obsérvese que en la demostración se aplicó la condición $\bar{\bar{X}}'(0) \neq 0$, la cual, sin lugar a dudas, se cumple, puesto que la solución de la ecuación lineal (87) determinada por las condiciones iniciales

$$\bar{\bar{X}}(0) = 0, \quad \bar{\bar{X}}'(0) = 0$$

es idénticamente nula, por lo que no puede ser función propia (véase la pág. 132).

1) La propiedad que demostramos del primer problema de contorno se basa en que dos soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial de segundo orden no se pueden anular en un mismo punto. Esta afirmación se refiere al problema de contorno con condiciones de frontera nulas. Bajo otras condiciones de frontera (por ejemplo, $X(0) = X(l)$, $X'(0) = X'(l)$), pueden existir dos funciones propias diferentes que correspondan a un mismo valor propio ($X_n^{(1)}(x) = \cos\frac{2\pi n}{l}x$, $X_n^{(2)}(x) = \operatorname{sen}\frac{2\pi n}{l}x$ para

$$\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots).$$

En virtud de la linealidad y homogeneidad de la ecuación y de las condiciones de contorno, es evidente que si $X_n(x)$ es una función propia del valor propio λ_n, la función $A_nX_n(x)$ (A_n es una constante arbitraria) es también función propia para el mismo λ_n. Más arriba fue demostrado que con esto se cubre toda la clase de las funciones propias. Las funciones propias que se diferencian en un factor no las consideraremos, claro está, esencialmente distintas. Para evitar ambigüedad en la elección del factor, se puede someter a las funciones propias a la condición de que sean normalizadas:

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\rho(x)\,dx = 1.$$

Si cierta función $\hat{X}_n(x)$ no satisface a esta condición, se la puede «normalizar», multiplicándola por un coeficiente A_n,

$$A_n\hat{X}_n(x) = X_n(x), \quad A_n = \frac{1}{\|X_n\|}.$$

Si sometemos las funciones propias del problema (87)—(88) a la condición de que sean normalizadas ($\|X_n\| = 1$), éstas formarán un sistema ortogonal y normalizado:

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)\rho(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Demostremos la propiedad 2. Mostremos que $\lambda > 0$ para $q \geqslant 0$. Sea $X_n(x)$ la función propia normalizada que corresponde al valor propio λ_n, de forma que

$$L[X_n] = -\lambda_n\rho(x)X_n(x).$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por $X_n(x)$ e integrando con respecto a x desde 0 hasta l, obtenemos:

$$\lambda_n \int_0^l X_n^2(x)\rho(x)\,dx = -\int_0^l X_n(x)L[X_n]\,dx,$$

o bien

$$\lambda_n = -\int_0^l X_n \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX_n}{dx}\right]dx + \int_0^l q(x)X_n^2(x)\,dx,$$

puesto que la función $X_n(x)$ se supone normalizada. Integrando por partes y utilizando las condiciones de frontera (88), se obtiene:

$$\lambda_n = -X_nkX'_n\Big|_0^l + \int_0^l k(x)[X'_n(x)]^2\,dx + \int_0^l q(x)X_n^2(x)\,dx =$$

$$= \int_0^l k(x)[X'_n(x)]^2\,dx + \int_0^l q(x)X_n^2(x)\,dx. \qquad (93)$$

de donde se deduce, precisamente, que

$$\lambda_n > 0,$$

puesto que, por hipótesis, $k(x) > 0$ y $q(x) \geq 0$.

Dejando de lado la demostración del teorema del desarrollo, nos detendremos brevemente en el cálculo de los coeficientes del desarrollo.

No es difícil ver que

$$F_n = \frac{1}{\| X_n \|} \int_0^l \rho(x) F(x) X_n(x) \, dx. \tag{94}$$

En efecto, multiplicando ambos miembros de la igualdad

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x)$$

por $\rho(x) X_n(x)$, integrando con respecto a x desde 0 hasta l y teniendo en cuenta la ortogonalidad de las funciones propias, se obtiene la expresión escrita más arriba para los coeficientes F_n (*coeficientes de Fourier*)[1].

Volvamos ahora a la ecuación con derivadas parciales. Para la función $T(t)$ se tiene la ecuación

$$T'' + \lambda_n T = 0 \tag{95}$$

sin ninguna condición complementaria. En virtud de que λ_n es positiva, su solución es de la forma

$$T_n(t) = A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\, t,$$

donde A_n y B_n son coeficientes indeterminados. De este modo, el problema auxiliar tiene un conjunto infinito de soluciones del tipo

$$u_n(x, t) = T_n(t) X_n(x) = (A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\, t) X_n(x).$$

Resolvamos el problema con condiciones iniciales dadas. Buscaremos la solución en la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\, t) X_n(x). \tag{96}$$

El esquema formal para satisfacer a las condiciones iniciales (86) se basa en el teorema del desarrollo 4, y se efectúa en forma completamente análoga al caso de una cuerda homogénea. De

[1] La posibilidad de la integración término a término de la serie se sigue del teorema de Stoklov sobre la convergencia uniforme de la serie (90).

las igualdades

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x),$$

se halla que

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}}, \tag{97}$$

donde φ_n y ψ_n son los coeficientes de Fourier de las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ en su desarrollo según el sistema de funciones $\{X_n(x)\}$, ortogonal con densidad $\rho(x)$.

Limitándonos al esquema general del método de separación de las variables, no damos las condiciones de aplicabilidad de este método tanto en lo que se refiere a los coeficientes de la ecuación como a lo que respecta a las funciones iniciales.

Los trabajos básicos sobre la fundamentación de este método pertenecen a V. A. Steklov[1].

EJERCICIOS

1. Hallar la función $u(x, t)$ que determina el proceso de las oscilaciones de una cuerda $(0, l)$, fija en sus extremos y excitada (fig. 24), estirándola en el punto $x = c$ en una magnitud h, es decir, $u(c, 0) = h$ (véase el apéndice I). La velocidad inicial es igual a cero.

2. Una cuerda, fija en sus extremos, se estira en el punto $x = c$ mediante una fuerza F_0. Hallar las oscilaciones de la cuerda, si en el momento inicial la fuerza deja de actuar, y la velocidad inicial es nula.

3. Hallar la función $u(x, t)$ que determina el proceso de las oscilaciones de una cuerda $(0, l)$, fija en sus extremos y excitada por el impulso K, distribuido en el segmento $(c - \delta, c + \delta)$: a) de manera uniforme, b) según la ley $v_0 \cos \frac{x-c}{2\delta} \pi$ (véase el apéndice I), si la desviación inicial es igual a cero.

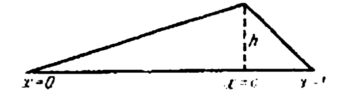
4. Hallar la función $u(x, t)$ que determina las oscilaciones de una cuerda $(0, l)$, fija en sus extremos y excitada mediante un impulso K, aplicado al punto $x = c$ (véase el apéndice I). La desviación inicial es igual a cero.

5. Demostrar la aditividad de la energía de cada armónico para el proceso de las oscilaciones con las condiciones de frontera

---

[1]) Véanse las *«Informaciones de la Sociedad Matemática de Járkov»*, segunda serie, t. 5, Nos 1 y 2 (1896), *«Problemas fundamentales de la Física matemática»*, t. 1 (1922); V. A. Illin, *Sobre la resolubilidad de los problemas mixtos para las ecuaciones hiperbólicas y parabólicas*, Progresos de las Ciencias Matemáticas (Uspieji Matematícheskij Naúk), t. 15, parte 2 (1960).

Fig. 24



$u = 0$, $u_x = 0$. Considerar asimismo el caso de la condición de frontera de tercera especie $u_x + hu = 0$ (suponer que todas las series convergen uniformemente). Calcular la energía de cada armónico en los ejercicios 1, 2, 3, 4.

6. Un resorte, fijo en un extremo al punto $x = 0$, es estirado por un peso de masa M, colgado del punto $x = l$. Hallar las oscilaciones del resorte, si en el momento $t = 0$ el peso se cae y en lo sucesivo no actúa ninguna fuerza sobre el extremo $x = l$.

7. Un extremo de una barra está fijo, y sobre el segundo actúa una fuerza F_0. Hallar las oscilaciones de la barra, si en el momento inicial la fuerza deja de actuar.

8. Hallar el proceso de las oscilaciones de un resorte, uno de cuyos extremos está fijo, si al otro extremo se le cuelga en el momento inicial un peso de masa M. Las condiciones iniciales son nulas.

9. A una cuerda homogénea con los extremos fijos $x = 0$ y $x = l$ se le ha ajustado una masa M en el punto $x = c$. Hallar la desviación de la cuerda $u(x, t)$, si: a) en el momento inicial en el punto $x = c$ la cuerda está desplazada en una magnitud h de su posición de equilibrio y se la suelta sin velocidad inicial; el desplazamiento y la velocidad iniciales son iguales a cero (véase el apéndice III).

10. Hallar el proceso de las oscilaciones de un resorte con extremos libres, si al principio se lo estira uniformemente (presentar un modelo de este problema).

11. Hallar el proceso de las oscilaciones de un resorte de extremos fijos elásticamente con iguales coeficientes de rigidez h, si las condiciones iniciales son arbitrarias.

Investigar la solución para h pequeñas (ligadura «blanda») y para h grandes (ligadura «rígida»), y calcular las correcciones correspondientes a los valores propios para una cuerda con extremos libres y fijos.

12. Hallar la desviación $u(x, t)$ de una cuerda con extremos fijos rígidamente, si las oscilaciones tienen lugar en un medio cuya resistencia es proporcional a la velocidad, y las condiciones iniciales son arbitrarias.

13. Un cable eléctrico aislado de longitud l y de características L, R, C y $G = 0$, ha sido cargado hasta cierto potencial constante v_0. En el momento inicial un extremo del cable se lleva a tierra, y el segundo permanece aislado todo el tiempo. Hallar la distribución de la tensión en el cable.

14. Una cuerda de extremos fijos oscila bajo la acción de una fuerza armónica, distribuída con densidad $f(x, t) = \Phi(x) \operatorname{sen} \omega t$. Hallar la desviación $u(x, t)$ de la cuerda con condiciones iniciales arbitrarias. Estudiar la posibilidad de resonancia, y hallar la solución en el caso de resonancia.

15. Resolver el problema 14, suponiendo que las oscilaciones tienen lugar en un medio cuya resistencia es proporcional a la velocidad. Hallar las oscilaciones estacionarias, que constituyen la parte principal de la solución para $t \to \infty$.

16. Una barra elástica de longitud l está situada verticalmente y fija en forma rígida por su extremo superior a un ascensor que cae

libremente, el cual, habiendo alcanzado la velocidad v_0, se detiene súbitamente. Hallar las oscilaciones de la barra, suponiendo que su extremo inferior está libre.

17. Resolver la ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - b^2 u + A$$

con condiciones iniciales nulas y con las condiciones de frontera

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = B,$$

donde b, A y B son constantes.

18. Resolver la ecuación diferencial

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + A \operatorname{sh} x$$

con condiciones iniciales nulas y con las condiciones de frontera

$$u(0, t) = B, \quad u(l, t) = C,$$

donde A, B y C son constantes.

19. A una cuerda homogénea, con los extremos fijos rígidamente $x = 0$ y $x = l$, en el punto $x = c$ $(0 < c < l)$ se le ha aplicado la fuerza armónica

$$F(t) = P_0 \operatorname{sen} \omega t,$$

que actúa a partir del momento $t = 0$. Hallar la desviación de la cuerda $u(x, t)$, suponiendo que las condiciones iniciales son nulas.

20. Resolver el problema de las oscilaciones de una barra no homogénea de longitud l con sus extremos fijos rígidamente, formada por dos barras homogéneas unidas en el punto $x = c$ $(0 < c < l)$, si la desviación inicial tiene la forma

$$u(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{h}{c} x & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant c, \\ \dfrac{h}{l-c}(l-x) & \text{para } c \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

y las velocidades iniciales son iguales a cero.

21. Hallar las oscilaciones estacionarias de un resorte, uno de cuyos extremos está fijo, si en el otro actúa la fuerza

$$F(t) = A \operatorname{sen} \omega_1 t + B \operatorname{sen} \omega_2 t.$$

22. Hallar las oscilaciones estacionarias de una barra no homogénea, formada de dos barras homogéneas unidas en el punto $x = c$, si un extremo está fijo, y el otro se mueve según la ley

$$u(l, t) = A \operatorname{sen} \omega t.$$

§ 4. PROBLEMA CON CONDICIONES EN LAS CARACTERISTICAS

1. Planteamiento del problema. Consideremos varios problemas que son el desarrollo del primer problema de contorno para la ecuación de las oscilaciones de una cuerda. Para simplificar, estudiaremos los fenómenos en las cercanías de un extremo, con-

siderando al otro alejado al infinito, es decir, tomaremos como problema de partida el problema para una recta semiinfinita.

La ecuación de las oscilaciones de la cuerda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ es simétrica con respecto a las variables x y t, si hacemos $a^2 = 1$, es decir, si cambiamos la escala del tiempo, introduciendo la variable $t = at'$. Sin embargo, las condiciones complementarias introducen una asimetría en la interpretación matemática de x y t: en las condiciones iniciales (para $t = 0$) se dan dos funciones, $u(x, 0)$ y $u_t(x, 0)$, mientras que en las condiciones de frontera (para $x = 0$) se da sólo la función $u(0, t)$.

Como fue indicado en el § 2, p. 9, entre las funciones y sus derivadas normales para $t = 0$ y $x = 0$ existe la relación

$$u_t(0, z) + u_x(0, z) = u_t(z, 0) + u_x(z, 0) \quad (a^2 = 1)$$

para cualquier valor de z. De aquí se deduce que para $x = 0$ y $t = 0$ no es posible dar todas estas funciones independientemente; sólo tres condiciones son arbitrarias, lo cual, precisamente, indica la imposibilidad de plantear las condiciones complementarias en forma simétrica.

Las condiciones complementarias pueden darse o bien en las líneas rectas $x = 0$, $t = 0$ (con problemas de este tipo hemos tratado hasta ahora), o bien en ciertas curvas del plano de fases. Por ejemplo, las condiciones de frontera se pueden dar en cierta curva C_1 $(x = f_1(t))$; sin embargo, para la resolución de este problema la curva C_1, además de ser suficientemente lisa, debe satisfacer a ciertas condiciones complementarias.

Estudiemos el proceso de las oscilaciones de un gas en un tubo con frontera móvil (pistón móvil). Está claro que la velocidad de desplazamiento de la frontera, que se mueve según la ley $x = f_1(t)$, no se puede considerar arbitraria: ésta no debe sobrepasar la velocidad del sonido a $\left(\frac{df_1(t)}{dt} < a\right)$. Una consecuencia geométrica de esto es que la curva C_1 $(x = f_1(t))$ debe estar separada por la característica de la línea $t = 0$, que da los valores iniciales (fig. 25). Si al menos un punto de la línea C_1 se hallase debajo de la característica $x = at$, el valor de la función $u(x, t)$ se determinaría completamente por las condiciones iniciales, y no se podría dar arbitrariamente. El significado físico de esto está relacionado con que si un gas se mueve con velocidades que superan a la del sonido, la ecuación de la acústica pierde su validez, y deben utilizarse las ecuaciones no lineales de la dinámica de los gases[1].

---

[1] Véase el apéndice IV, pág. 175.

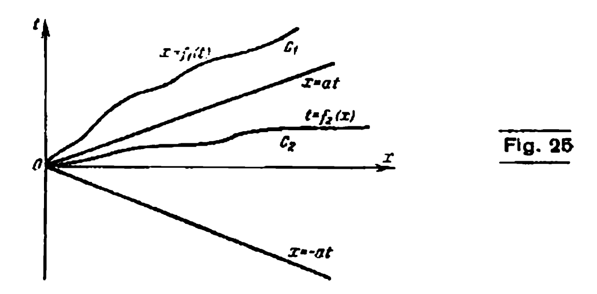


Fig. 25

Las condiciones iniciales se pueden dar no sólo en el eje $t = 0$, sino también en cierta línea C_2 $(t = f_2(x))$, que debe satisfacer a la exigencia $|f_2'(x)| < \frac{1}{a}$ (en este caso C_2 está en la región de influencia de los datos iniciales). Los problemas de este tipo se resuelven fácilmente mediante la ecuación integral de las oscilaciones (véase el § 2, p. 7).

Sin proponernos dar una lista completa de todos los problemas posibles de contorno, estudiemos con más detalle la determinación de la solución a partir de los datos en las características. Este problema de contorno se llama a menudo *problema de Goursat*. El problema con datos en las características presenta un gran interés desde el punto de vista de las aplicaciones físicas. Este se encuentra, por ejemplo, en el estudio de los procesos de sorción y desorción de los gases (véase el apéndice V), de los procesos de secado (véase el ejercicio 1) y muchos otros problemas.

2. Método de las aproximaciones sucesivas para el problema de Goursat. Consideremos el problema más simple con datos en las características

$$\left.\begin{aligned} u_{xy} &= f(x, y), \\ u(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ u(0, y) &= \varphi_2(y). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Las condiciones complementarias están dadas en las rectas $x = 0$ e $y = 0$, que son características de la ecuación (1). Supondremos que las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ son derivables y satisfacen a la condición de conjunción $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Integrando sucesiva-

mente con respecto a x y a y la ecuación (1), se obtiene:

$$u_y(x, y) = u_y(0, y) + \int_0^x f(\xi, y)\, d\xi,$$

$$u(x, y) = u(x, 0) + u(0, y) - u(0, 0) + \int_0^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi,$$

o bien

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \qquad (2)$$

De este modo, para la ecuación más sencilla, que no contiene a las derivadas primeras u_x, u_y y a la función buscada, la solución se escribe en la forma analítica explícita (2). De la fórmula (2) se desprende directamente la unicidad y la existencia de la solución del problema planteado.

Pasemos a la resolución de la ecuación lineal de tipo hiperbólico

$$u_{xy} = a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_y + c(x, y)\, u + f(x, y) \qquad (3)$$

con las condiciones complementarias en las características $x = 0$, $y = 0$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \qquad (3')$$
$$u(0, y) = \varphi_2(y),$$

donde $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(y)$ satisfacen a las condiciones de derivabilidad y de conjunción. Supondremos que los coeficientes a, b y c son funciones continuas de x e y.

La fórmula (3) muestra que la función $u(x, y)$ satisface a la ecuación integrodiferencial

$$u(x, y) = \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta)\, u_\xi + b(\xi, \eta)\, u_\eta + c(\xi, \eta)\, u]\, d\xi\, d\eta +$$
$$+ \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \qquad (4)$$

Para resolverla, aplicaremos el método de las aproximaciones sucesivas. Tomemos como aproximación nula a la función

$$u_0(x, y) = 0.$$

Entonces (4) nos da, para las aproximaciones sucesivas, las siguientes expresiones:

$$\left.\begin{aligned} u_1(x, y) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x \Big[a(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + \\ &\quad + b(\xi, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\, u_{n-1} \Big] d\xi\, d\eta. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Obsérvese, de paso, que

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \int_0^y \left[a(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta)\, u_{n-1} \right] d\eta, \\ \frac{\partial u_n}{\partial y} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \int_0^x \left[a(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y)\, u_{n-1} \right] d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Demostremos la convergencia uniforme de las sucesiones

$$\{u_n(x, y)\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y) \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right\}.$$

Con este fin, consideremos las diferencias

$$z_n(x, y) = u_{n+1}(x, y) - u_n(x, y) =$$

$$= \int_0^y \int_0^x \left[a(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi, \eta)\, z_{n-1}(\xi, \eta) \right] d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial x} =$$

$$= \int_0^y \left[a(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} + b(x, \eta) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta} + c(x, \eta)\, z_{n-1}(x, \eta) \right] d\eta,$$

$$\frac{\partial z_n(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial u_{n+1}(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial u_n(x, y)}{\partial y} =$$

$$= \int_0^x \left[a(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi, y) \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y} + c(\xi, y)\, z_{n-1}(\xi, y) \right] d\xi.$$

Sea M el extremo superior de las magnitudes absolutas de los coeficientes $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, y H, el extremo superior de las magnitudes absolutas de $z_0 = u_1(x, y)$ y de sus derivadas,

$$|z_0| < H, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| < H, \quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| < H,$$

cuando x e y varían dentro de cierto cuadrado ($0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$). Escribamos las acotaciones mayorantes para las funciones z_n, $\frac{\partial z_n}{\partial x}$, $\frac{\partial z_n}{\partial y}$. Es evidente que

$$|z_1| < 3HMxy < 3HM\frac{(x+y)^2}{2!},$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < 3HMy < 3HM(x+y),$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < 3HMx < 3HM(x+y).$$

Supongamos que tienen lugar las apreciaciones de recurrencia

$$|z_n| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!},$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!},$$

donde $K > 0$ es cierto número constante, cuyo valor precisaremos más abajo. Aplicando estas acotaciones y la fórmula para la aproximación $(n+1)$-ésima se obtiene, luego de varias simplificaciones que sólo aumentan la desigualdad:

$$|z_{n+1}| < 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!}\left(\frac{x+y}{n+3}+2\right) <$$

$$< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H}{K^2M}\frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!},$$

$$\left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x}\right| < 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+y}{n+2}+2\right) <$$

$$< 3HM^{n+1}K^{n}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial y}\right| < 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+y}{n+2}+2\right) <$$

$$< 3HM^{n+1}K^{n}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K}\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},$$

donde

$$K = L + 2.$$

En los segundos miembros de estas desigualdades se hallan, salvo factores de proporcionalidad, los términos generales del desarrollo de e^{2KLM}. Estas apreciaciones demuestran que las sucesiones de funciones

$$u_n = u_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}$$

convergen uniformemente hacia sus funciones límite, que denotaremos mediante

$$u(x, y) = \lim_{n\to\infty} u_n(x, y),$$

$$v(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y),$$

$$w(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y).$$

Pasando al límite bajo el signo integral en las fórmulas (5) y (6), tendremos:

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta) v + b(\xi, \eta) w + c(\xi, \eta) u] \, d\xi \, d\eta, \\ v(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + \int_0^y [a(x, \eta) v + b(x, \eta) w + c(x, \eta) u] \, d\eta, \\ w(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) + \int_0^x [a(\xi, y) v + b(\xi, y) w + c(\xi, y) u] \, d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Las igualdades que de aquí se desprenden

$$v = u_x,$$
$$w = u_y$$

permiten establecer que la función $u(x, y)$ satisface a la ecuación integrodiferencial

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta +$$
$$+ \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta) u_\xi + b(\xi, \eta) u_\eta + c(\xi, \eta) u] \, d\xi \, d\eta, \quad (4)$$

así como también a la ecuación diferencial (3), lo que se comprueba directamente derivando (4) con respecto a x e y. La función $\bar{u} = u(x, y)$ satisface también a las condiciones complementarias, lo cual es de fácil comprobación.

Demostremos ahora la unicidad de la solución del problema considerado (3)—(3'). Suponiendo la existencia de dos soluciones $u_1(x, y)$ y $u_2(x, y)$, obtenemos inmediatamente para su diferencia

$$U(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

la ecuación integrodiferencial homogénea

$$U(x, y) = \int_0^y \int_0^x (aU_x + bU_y + cU) \, d\xi \, d\eta.$$

Denotando ahora por H_1 el extremo superior de las magnitudes absolutas

$$|U(x, y)| < H_1, \quad |U_x(x, y)| < H_1, \quad |U_y(x, y)| < H_1$$

para $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$ y repitiendo las apreciaciones efectuadas para las funciones $z_n(x, y)$, demostramos la justeza de

la desigualdad

$$|U| < 3H_1M^{n+1}K^n\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H_1}{K^2M}\frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}$$

para todo valor de n. De aquí se sigue que

$$U(x, y) \equiv 0, \text{ o bien } u_1(x, y) \equiv u_2(x, y),$$

lo que demuestra la unicidad de la solución del problema con datos en las características.

Si los coeficientes a, b y c son constantes, la ecuación (3) se reduce, mediante el cambio

$$u = ve^{\lambda x + \mu y},$$

al tipo

$$v_{xy} + C_1v = f. \tag{8}$$

Si $C_1 = 0$, obtenemos el problema para la ecuación más simple (1), cuya solución se da por la fórmula (2).

Si $C_1 \neq 0$, la solución del problema para la ecuación (8) también puede ser obtenida en forma analítica explícita, por el método expuesto en el § 5.

EJERCICIOS

1. Por un tubo ($x > 0$), cargado de sustancia que contiene humedad, se hace pasar aire (con velocidad v). Sea $v(x, t)$ la concentración de la humedad en la sustancia absorbente, $u(x, t)$, la concentración de los vapores libres. Deducir la ecuación para las funciones $u(x, t)$ y $v(x, t)$, que describen el proceso de secado, si: 1) el proceso es isotérmico y 2) la isoterma del secado tiene la forma $u = \gamma v$, donde γ es la constante de isotermia (véase también el apéndice V).

2. Por un tubo ($x > 0$) pasa agua caliente a velocidad v. Sea u la temperatura del agua en el tubo, v, la temperatura de sus paredes, u_0, la temperatura del medio circundante. Deducir las ecuaciones para u y v despreciando la distribución de temperaturas en un corte del tubo y de sus paredes y considerando que en las fronteras agua—pared y pared—medio existe una caída de temperatura, y que tiene lugar un intercambio de temperatura según la ley de Newton (véase el cap. III, § 1).

§ 5. RESOLUCION DE LAS ECUACIONES LINEALES GENERALES DE TIPO HIPERBOLICO

1. Operadores diferenciales conjugados. Establezcamos ciertas fórmulas auxiliares, que nos servirán para la representación de las soluciones de los problemas de contorno en forma integral. Sea

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u \tag{1}$$

($a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ son funciones derivables) el operador diferencial lineal que corresponde a una ecuación lineal de tipo hiperbólico. Multiplicando $\mathcal{L}[u]$ por cierta función v, escribiremos separadamente cada sumando en la forma

$$vu_{xx} = (vu_x)_x - (v_x u)_x + uv_{xx}, \quad vbu_y = (bvu)_y - u(bv)_y,$$
$$vu_{yy} = (vu_y)_y - (v_y u)_y + uv_{yy}, \quad vcu = ucv.$$
$$vau_x = (avu)_x - u(av)_x.$$

Sumando estos términos, se obtiene:

$$v\mathcal{L}[u] = u\mathcal{M}[v] + \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}, \qquad (2,)$$

donde

$$\mathcal{M}[v] = v_{xx} - v_{yy} - (av)_x - (bv)_y + cv, \qquad (3)$$
$$H = vu_x - v_x u + avu = (vu)_x - (2v_x - av)u = \qquad (4)$$
$$= -(vu)_x + (2u_x + au)v, \qquad (4')$$
$$K = -vu_y + v_y u + bvu = -(vu)_y + (2v_y + bv)u = \qquad (5)$$
$$= (uv)_y - (2u_y - bu)v. \qquad (5')$$

Dos operadores diferenciales se llaman *conjugados*, si la diferencia

$$v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]$$

es la suma de derivadas parciales con respecto a x e y de ciertas expresiones H y K.

Los operadores $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ considerados son, evidentemente, conjugados.

Si $\mathcal{L}[v] = \mathcal{M}[u]$, el operador $\mathcal{L}[u]$ se llama autoconjugado.

La integral doble de la diferencia $v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v]$ sobre cierta región G, delimitada por el contorno C liso a trozos, es igual a

$$\iint_G (v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v])\, d\xi\, d\eta = \int_C (H\, d\eta - K\, d\xi), \qquad (6)$$

donde u y v son funciones arbitrarias derivables dos veces (fórmula bidimensional de Green)[1].

2. Forma integral de la solución. Apliquemos la fórmula (6) a la resolución del problema siguiente:

hallar la solución de la ecuación lineal de tipo hiperbólico

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u =$$
$$= -f(x, y), \qquad (7)$$

[1] Véase B. M. Budak, S. V. Fomin, *Integrales Múltiples y Series*, ed. «Naúka», 1965.

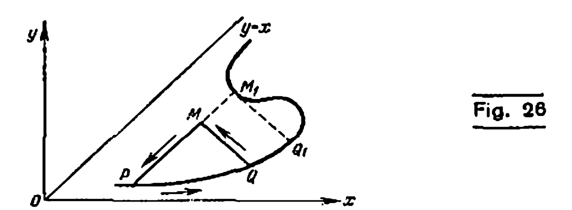


Fig. 26

que satisfaga a las condiciones iniciales en la curva C

$$u|_C = \varphi(x),$$
$$u_n|_C = \psi(x) \qquad (7')$$

u_n es la derivada en la dirección de la normal a la curva C), y hallar la región en la cual la solución se determina por las condiciones (7').

La curva C se supone dada por la ecuación

$$y = f(x),$$

donde $f(x)$ es una función derivable. Impongámosle a la curva C la condición de que toda característica de las familias $y - x =$ $=$ const e $y + x =$ const corte a la curva C no más de una vez (para esto, es necesario que $|f'(x)| < 1$). La fórmula (6) nos da para el triángulo curvilínco MPQ, delimitado por el arco PQ de la curva C y por los segmentos MP y MQ (fig. 26):

$$\iint_{MPQ} (v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v])\,d\xi\,d\eta =$$
$$= \int_Q^M (H\,d\eta - K\,d\xi) + \int_M^P (H\,d\eta - K\,d\xi) + \int_P^Q (H\,d\eta - K\,d\xi).$$

Transformemos las dos primeras integrales, tomadas a lo largo de las características MQ y MP. Tomando en cuenta que

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= -d\eta = -\frac{ds}{\sqrt{2}} \text{ en } QM \\ d\xi &= d\eta = -\frac{ds}{\sqrt{2}} \text{ en } MP \end{aligned}\right\}$$ (ds es el elemento de arco a lo largo de QM y MP)

y aplicando las fórmulas (4) y (5), se obtiene:

$$\int_Q^M (H\,d\eta - K\,d\xi) = -\int_Q^M d(uv) + \int_Q^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}}v\right)u\,ds =$$

$$= -(uv)_M + (uv)_Q + \int_Q^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}}v\right)u\,ds$$

y análogamente

$$\int_M^P (H\,d\eta - K\,d\xi) = -(uv)_M + (uv)_P + \int_P^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{\sqrt{2}}v\right)u\,ds.$$

De aquí y de la fórmula (6) se deduce que

$$(uv)_M = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \int_P^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{2\sqrt{2}}v\right)u\,ds +$$

$$+ \int_Q^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}}v\right)u\,ds + \frac{1}{2}\int_P^Q (H\,d\eta - K\,d\xi) -$$

$$-\frac{1}{2}\iint_{MPQ} (v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v])\,d\xi\,d\eta. \quad (8)$$

Esta fórmula es una identidad, válida para funciones u y v suficientemente suaves.

Sea u la solución del problema con condiciones inciales, planteado más arriba, y supongamos que la función v depende del punto M, considerado como parámetro, y satisface a las siguientes condiciones:

$$\mathcal{M}[v] = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - (av)_\xi - (bv)_\eta + cv = 0 \text{ dentro de } \Delta MPQ \quad (9)$$

y

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{b-a}{2\sqrt{2}}v \text{ en la característica } MP, \\ &\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{b+a}{2\sqrt{2}}v \text{ en la característica } MQ, \\ &v(M) = 1. \end{aligned}\right\} \quad (9a)$$

De las condiciones en las características y de la última condición, se halla:

$$v = e^{\int\limits_{s_0}^{s} \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds} \quad \text{en } MP,$$

$$v = e^{\int\limits_{s_0}^{s} \frac{b+a}{2\sqrt{2}} ds} \quad \text{en } MQ,$$

donde s_0 es el valor de s en el punto M. Como hemos visto en el § 4, la ecuación (9) y los valores de la función v en las características MP y MQ la determinan totalmente en la región MPQ. La función v es llamada con frecuencia *función de Riemann.*

De esta manera, la fórmula (8) para la función u que satisface a la ecuación (7) toma la siguiente forma definitiva:

$$u(M) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{P}^{Q} [v(u_\xi \, d\eta + u_\eta \, d\xi) - u(v_\xi \, d\eta + v_\eta \, d\xi) +$$

$$+ uv(a \, d\eta - b \, d\xi)] + \frac{1}{2} \iint\limits_{MPQ} v(M, M') f(M') \, d\sigma_{M'}$$

$$(d\sigma_{M'} = d\xi \, d\eta). \quad (10)$$

Esta fórmula resuelve el problema planteado, puesto que las expresiones bajo el signo integral a lo largo de PQ contienen funciones conocidas en el arco C. En efecto, la función v fue determinada más arriba, y las funciones

$$u|_C = \varphi(x),$$

$$u_x|_C = u_s \cos(x, s) + u_n \cos(x, n) = \frac{\varphi'(x) - \psi(x) f'(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}}{1 + f'^2(x)},$$

$$u_y|_C = u_s \cos(y, s) + u_n \cos(y, n) = \frac{\varphi'(x) f'(x) + \psi(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}}{1 + f'^2(x)}$$

se calculan a partir de los datos iniciales.

La fórmula (10) demuestra que si los datos iniciales se conocen en el arco PQ, éstos determinan completamente a la función en el triángulo característico ΔPMQ, si se conoce la función $f(x, y)$ en esta región[1].

[1] Si la característica corta a la curva C en dos puntos P y M_1 (véase la fig. 26), el valor $u(M_1)$ no se puede dar arbitrariamente, sino que se determina de la fórmula (10) con datos iniciales en el arco PQ_1 y por los valores de $f(x, y)$ en $\triangle PM_1Q_1$.

La fórmula (10), obtenida bajo la hipótesis de existencia de la solución, la determina a partir de las condiciones iniciales y del segundo miembro de la ecuación (7); con esto ella demuestra, en esencia, la unicidad de la solución (compárese con la fórmula de D'Alembert, cap. II, § 2, pág. 62).

Se puede demostrar que la función u, determinada por la fórmula (10), satisface a las condiciones del problema (7)—(7'). Sin embargo, no nos detendremos en efectuar esta demostración.

3. Interpretación física de la función de Riemann. Esclarezcamos el significado físico de la función $v(M, M')$. Con este fin, hallemos la solución de la ecuación no homogénea

$$\mathcal{L}[u] = -2f_1 \quad (f = 2f_1)$$

con condiciones iniciales nulas en la curva C. Observando la fórmula (10), se aprecia que la solución buscada tiene la forma

$$u(M) = \iint_{MPQ} v(M, M') f_1(M')\, d\sigma_{M'}. \tag{11}$$

Supongamos que $f_1(M)$ es una función local del punto M_1, igual a cero en todas partes, a excepción de un entorno pequeño S_ε del punto M_1, y que satisface a la condición de normalización

$$\iint_{S_\varepsilon} f_1(M')\, d\sigma_{M'} = 1. \tag{12}$$

La fórmula (11) toma en este caso la forma

$$u_\varepsilon(M) = \iint_{S_\varepsilon} v(M, M') f_1(M')\, d\sigma_{M'}. \tag{13}$$

Aplicando el teorema del valor medio, se puede escribir:

$$u_\varepsilon(M) = v(M, M_1^*) \iint_{S_\varepsilon} f_1(M')\, d\sigma_{M'} = v(M, M_1^*),$$

donde M_1^* es cierto punto de la región S_ε.

Reduciendo el ε-entorno S_ε al punto M_1 ($\varepsilon \to 0$), se halla:

$$u(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(M) = v(M, M_1). \tag{14}$$

La función f_1, como hemos visto en varios ejemplos, es con frecuencia la densidad de la fuerza, y la variable y, el tiempo. La expresión

$$\iint_{S_\varepsilon} f_1(M')\, d\sigma_{M'} = \iint_{S_\varepsilon} f_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{15}$$

es el impulso de la fuerza. De aquí concluimos, en virtud de la fórmula (11), que $v(M, M_1)$ es la función de influencia del impul-

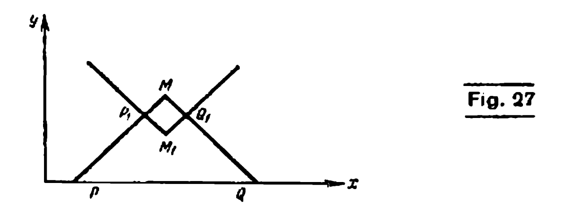


Fig. 27

so unitario, aplicado al punto M_1. La función $v(M, M_1) = v(x, y; \xi, \eta)$ fue determinada como función de los parámetros $M(x, y)$, satisfaciendo con respecto a las coordenadas ξ, η del punto M_1 a la ecuación

$$\mathcal{M}_{(\xi, \eta)}[v] = 0 \tag{16}$$

con las condiciones complementarias (9a).

Consideremos la función

$$u = u(M, M_1),$$

que es función de los parámetros $M_1(\xi, \eta)$ y que satisface, con respecto a las coordenadas x, y del punto M, a la ecuación

$$\mathcal{L}_{(x, y)}[u] = 0 \tag{17}$$

con las condiciones complementarias (véase la fig. 27)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{b-a}{2\sqrt{2}} u \quad \text{en la característica } M_1Q_1, \\ &\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{b+a}{2\sqrt{2}} u \quad \text{en la característica } M_1P_1, \\ &u(M_1, M_1) = 1. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Partiendo de estas condiciones, hallamos que

$$u(M, M_1) = \begin{cases} e^{\int_{s_0}^{s} \frac{b-a}{2\sqrt{2}} ds} & \text{en } M_1Q_1, \\ e^{\int_{s_0}^{s} \frac{b+a}{2\sqrt{2}} ds} & \text{en } M_1P_1, \end{cases} \tag{19}$$

$$u(M_1, M_1) = 1.$$

La ecuación (17) y las condiciones (18) determinan totalmente la función u en el cuadrilátero $MP_1M_1Q_1$, delimitado por los segmentos de características MP_1, MQ_1 y M_1P_1, M_1Q_1.

Aplicando la fórmula (6) al cuadrilátero $MP_1M_1Q_1$, se obtiene:

$$\iint\limits_{MP_1M_1Q_1} (v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v])\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \int\limits_{M}^{P_1} (H\, d\eta - K\, d\xi) + \int\limits_{Q_1}^{M} + \int\limits_{M_1}^{Q_1} + \int\limits_{P_1}^{M_1} = 0$$

($R(\xi, \eta)$ es el punto variable de integración en MP_1M_1Q). Aplicando las fórmulas (4) y (5) para K y H y las condiciones (9a) en las características para la función v, no resulta difícil calcular las dos primeras integrales del segundo miembro:

$$\int\limits_{M}^{P_1} (H\, d\eta - K\, d\xi) = -(uv)_M + (uv)_{P_1},$$

$$\int\limits_{Q_1}^{M} (H\, d\eta - K\, d\xi) = -(uv)_M + (uv)_{Q_1},$$

igual a como lo hicimos al deducir la fórmula (10).

Análogamente, aplicando las igualdades (4'), (5') y las condiciones (19) para la función $u(M, M_1)$ en las características, se halla:

$$\int\limits_{P_1}^{M_1} (H\, d\eta - K\, d\xi) = \int\limits_{P_1}^{M_1} [-(vu)_\xi\, d\eta - (uv)_\eta\, d\xi] +$$

$$+ \int\limits_{P_1}^{M_1} v[(2u_\xi\, d\eta + 2u_\eta\, d\xi) + (au\, d\eta - bu\, d\xi)] =$$

$$= \int\limits_{P_1}^{M_1} d(uv) + \int\limits_{P_1}^{M_1} 2\left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}}u\right) v\, ds = (uv)_{M_1} - (uv)_{P_1}$$

$$\left(d\xi = -d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\int\limits_{M_1}^{Q_1} (H\, d\eta - K\, d\xi) = (uv)_{M_1} - (uv)_{Q_1} \quad \left(d\xi = d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}}\right).$$

Sumando estas cuatro igualdades, obtenemos:

$$2(uv)_M = 2(uv)_{M_1},$$

o bien

$$u(M, M_1) = v(M, M_1). \tag{20}$$

puesto que

$$(u)_{M_1} = (v)_M = 1.$$

De esta manera, vemos que $v(M, M_1)$, que es la función de influencia del impulso unitario, concentrado en el punto M_1, se puede definir como la solución de la ecuación

$$\mathcal{L}_{(x,y)}[v(M, M_1)] = 0, \quad M = M(x, y), \quad M_1 = M_1(\xi, \eta)$$

con las condiciones complementarias (18).

4. **Ecuaciones con coeficientes constantes.** Como primer ejemplo de aplicación de la fórmula (10), estudiaremos el problema con condiciones iniciales para la ecuación de las oscilaciones de una cuerda:

$$u_{yy} = u_{xx} + f_1(x, t) \quad \left(y = at,\ f_1 = \frac{f}{a^2}\right),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u_y = \psi_1(x) \qquad \left(\psi_1 = \frac{\psi}{a}\right).$$

En la fórmula (10), el arco PQ es un segmento del eje $y = 0$. El operador

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}$$

es autoconjugado, por cuanto

$$\mathcal{M}[u] = \mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}.$$

Como $a = 0$ y $b = 0$, la función v es igual a la unidad en las características MP y MQ. De aquí se deduce que

$$v(M, M') \equiv 1$$

para todo punto M' dentro del triángulo PMQ.

Considerando luego que en nuestro caso

$$d\eta = 0 \quad \text{en} \quad PQ,$$

se obtiene:

$$u(M) = \frac{u(P) + u(Q)}{2} + \frac{1}{2}\int_P^Q u_\eta\, d\xi + \frac{1}{2}\iint_{PMQ} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Observando que $P = P(x - y, 0)$, $Q = Q(x + y, 0)$, donde x e y son las coordenadas del punto $M = M(x, y)$, y utilizando las condiciones iniciales, tendremos:

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x - y) + \varphi(x + y)}{2} +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} \psi_1(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}\int_0^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} f_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Volviendo a las variables x y t, se obtiene la fórmula de D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau,$$

que ya encontramos en el p. 9 del § 2 (fórmula (30)).

Como segundo ejemplo, consideremos el problema con condiciones iniciales para la ecuación con coeficientes constantes

$$u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0 \tag{21}$$

(a, b, c, son números constantes),

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \tag{22}$$

$$u_y|_{y=0} = \psi(x). \tag{23}$$

La sustitución

$$U = ue^{\lambda x + \mu y} \tag{24}$$

permite reducir la ecuación (21) a una forma más sencilla:

$$U_{xx} - U_{yy} + c_1 U = 0, \quad c_1 = \frac{1}{4}(4c^2 - a^2 - b^2),$$

$$-\infty < x < \infty, \quad y > 0 \tag{25}$$

con las condiciones complementarias

$$U|_{y=0} = \varphi(x)\,e^{\frac{a}{2}x} = \varphi_1(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{22'}$$

$$U_y|_{y=0} = \left(\psi(x) - \frac{b}{2}\varphi(x)\right)e^{\frac{a}{2}x} = \psi_1(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{23'}$$

si se eligen los parámetros λ y μ en forma adecuada, haciendo

$$\lambda = \frac{a}{2}, \quad \mu = -\frac{b}{2}. \tag{26}$$

La determinación de la función $U(x, y)$ a partir de los datos iniciales y de la ecuación (25) se reduce a escribir la función de Riemann $v(x, y;\ \xi, \eta)$.

La función v debe satisfacer a las condiciones:

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = 0, \tag{27}$$

$$\left.\begin{array}{l} v = 1 \text{ en la característica } MP \\ v = 1 \text{ en la característica } MQ \text{ (fig. 28).} \end{array}\right\} \tag{28}$$

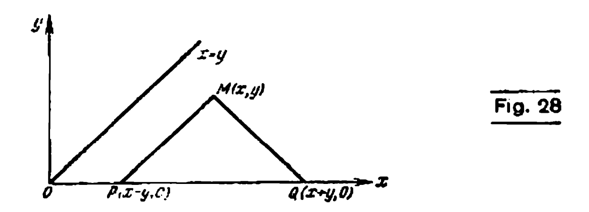


Fig. 28

Buscaremos a v en la forma

$$v = v(z), \tag{29}$$

donde

$$z = \sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}, \quad \text{o bien} \quad z^2 = (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2. \tag{30}$$

En las características MP y MQ la variable z se anula, de modo que $v(0) = 1$. Ahora bien, el primer miembro de la ecuación (27) se transforma del siguiente modo:

$$v_{xx} - v_{yy} + c_1 v = v''(z)(z_x^2 - z_y^2) + v'(z)(z_{xx} - z_{yy}) + c_1 v = 0.$$

Derivando la expresión para z^2 dos veces, con respecto a x y a y, obtenemos:

$$zz_x = x - \xi,$$
$$zz_y = -(y-\eta),$$
$$zz_{xx} + z_x^2 = 1,$$
$$zz_{yy} + z_y^2 = -1.$$

De aquí y de la fórmula (30), se halla:

$$z_x^2 - z_y^2 = 1, \quad z_{xx} - z_{yy} = \frac{1}{z}.$$

La ecuación para v toma la forma siguiente:

$$v'' + \frac{1}{z} v' + c_1 v = 0$$

con la condición $v(0) = 1$. La solución de esta ecuación es la función de Bessel de orden nulo (véase el Complemento II, I parte, § 1).

$$v(z) = J_0(\sqrt{c_1} z),$$

o bien

$$v(x, y; \xi, \eta) = J_0\left(\sqrt{c_1[(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2]}\right). \tag{31}$$

Apliquemos ahora la fórmula (10) para determinar $U(x, y)$; ésta toma en nuestro caso la forma

$$U(M)=\frac{U(P)+U(Q)}{2}+\frac{1}{2}\int_P^Q (vU_\eta\, d\xi - Uv_\eta\, d\xi) \quad (d\eta=0). \quad (32)$$

Calculemos previamente la integral por el segmento PQ ($\eta = 0$):

$$\int_P^Q (vU_\eta - Uv_\eta)\, d\xi = \int_{x-y}^{x+y} \Big\{ J_0\big(\sqrt{c_1[(x-\xi)^2-y^2]}\big)\, U_\eta(\xi, 0) - \frac{U(\xi,0)\sqrt{c_1}\, yJ_0'\big(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\big)}{\sqrt{c_1[(x-\xi)^2-y^2]}}\Big\}\, d\xi. \quad (33)$$

Utilizando las condiciones iniciales (22'), (23'), se halla:

$$u(x, y)=\frac{\varphi_1(x-y)+\varphi_1(x+y)}{2}+ \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} J_0\big(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\big)\, \psi_1(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2}\sqrt{c_1}\, y\int_{x-y}^{x+y}\frac{J_1\big(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\big)\, \varphi_1(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}, \quad (34)$$

de donde, en virtud de (24), (22') y (23'), se obtiene la fórmula

$$u(x, y)=\frac{\varphi(x-y)\, e^{-\frac{a-b}{2}y}+\varphi(x+y)\, e^{\frac{a+b}{2}y}}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}y}\int_{x-y}^{x+y}\Big\{\frac{b}{2}J_0\big(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\big) + \sqrt{c_1}\, y\,\frac{J_1\big(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\big)}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}\Big\}\, e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)}\varphi(\xi)\, d\xi - \frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}y}\int_{x-y}^{x+y} J_0\big(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\big)\, e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)}\psi(\xi)\, d\xi, \quad (35)$$

que da la solución del problema planteado.

Consideremos el caso particular $a = 0$, $b = 0$, es decir, la ecuación

$$u_{xx} - u_{yy} + cu = 0.$$

De la fórmula (35) se obtiene de inmediato:

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x-y)+\varphi(x+y)}{2} +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\psi(\xi)\,d\xi +$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt{c_1}y\int_{x-y}^{x+y}\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}\varphi(\xi)\,d\xi. \quad (36)$$

Haciendo aquí $c_1 = 0$ e $y = at$, se obtiene la fórmula de D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\bar{\psi}(\xi)\,d\xi, \quad (37)$$

que da la solución de la ecuación de las oscilaciones de la cuerda

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2}u_{tt} = 0$$

con las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u_t(x, 0) = \bar{\psi}(x),$$
$$\bar{\psi}(x) = a\psi(x) = au_y(x, 0).$$

EJERCICIOS DEL CAPITULO II

1. Resolver el ejercicio 1 del § 4, suponiendo que en el momento inicial la concentración de la humedad es constante a lo largo de todo el tubo y que a la entrada se le conecta un chorro de aire seco.

2. Resolver el ejercicio 2 del § 4, considerando que la temperatura inicial del sistema es igual a u_0, y que la temperatura en el extremo del tubo se mantiene todo el tiempo igual a $v_0 > u_0$.

3. Resolver el sistema de ecuaciones telegráficas (véase el § 1, (21)):

$$i_x + Cv_t + Gv = 0,$$
$$v_x + Li_t + Ri = 0$$

para una línea infinita con las condiciones iniciales

$$i(x, 0) = \varphi(x), \quad v(x, 0) = \psi(x).$$

Indicación. Reducir el sistema de ecuaciones (§ 1 (21)) a una ecuación de segundo orden para una de las funciones $i(x, t)$ ó $v(x, t)$, por ejemplo,

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)\,i_t + GRi$$

con las condiciones iniciales $i(x, 0) = \varphi(x)$,

$$\frac{\partial i}{\partial t}\bigg|_{t=0} = -\left(\frac{1}{L} v_x + \frac{R}{L} i\right)_{t=0} = -\frac{1}{L}\psi'(x) - \frac{R}{L}\varphi(x) = \psi_0(x)$$

y luego aplicar la fórmula (35).

4. Investigar la solución de la ecuación telegráfica, obtenida (fórmula (35)) para el caso de G y R pequeñas. Considerar el caso límite $G \to 0$, $R \to 0$ y obtener de la fórmula (35) la de D'Alembert para la solución de las ecuaciones de las oscilaciones de una cuerda.

APENDICES DEL CAPITULO II

I. SOBRE LAS OSCILACIONES DE LAS CUERDAS DE LOS INSTRUMENTOS MUSICALES

Una cuerda vibrando genera oscilaciones del aire, que se captan por el oído del hombre en forma de sonido, dado por la cuerda. La fuerza del sonido se caracteriza por la energía o amplitud de las oscilaciones, el tono, por el período de las oscilaciones, y el timbre, por la relación entre la energía del tono principal y de los armónicos (sobretonos)[1]. Sin detenernos en los procesos fisiológicos de la percepción del sonido y en el proceso de transmisión del sonido por el aire, caracterizaremos el sonido de una cuerda por su energía, período y distribución de la energía en los armónicos.

En los instrumentos musicales, por lo común, se generan oscilaciones transversales de las cuerdas. Se distinguen tres tipos de instrumentos de cuerda: por punteo, de percusión y de arco. En los instrumentos de percusión (por ejemplo, el piano) la oscilación se genera mediante un golpe, que le da a la cuerda una velocidad inicial sin desviación inicial. En los instrumentos de cuerda por punteo (por ejemplo, el arpa, la guitarra), las oscilaciones se generan dando a la cuerda cierta desviación inicial sin velocidad inicial.

Las oscilaciones libres de una cuerda, generadas de un modo arbitrario, se pueden representar en la forma (véase el cap. II, § 3)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \operatorname{sen} \omega_n t) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a\right).$$

En calidad de ejercicio del § 3 fue propuesto el problema 1, que forma la base de la teoría elemental de la excitación de

[1] J. W. Rayleigh, *Teoría del Sonido*, t. I, cap. VI, Gostejizdat, 1940.

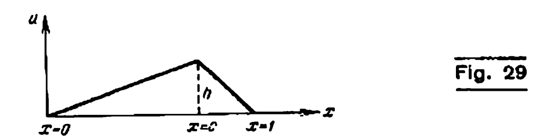


Fig. 29

las cuerdas en los instrumentos por percusión. La solución de este problema muestra que si la desviación inicial de la cuerda está representada en forma de triángulo de altura h en el punto $x = c$ (fig. 29), entonces

$$a_n = \frac{2hl^2}{\pi^2 n^2 c (l - c)} \operatorname{sen} \frac{\pi n c}{l}, \quad b_n = 0. \qquad (1)$$

La energía del n-ésimo armónico es igual a

$$E_n = \frac{1}{4} \rho l \omega_n^2 a_n^2 = Mh^2 \frac{l^2 a^2}{\pi^2 n^2 c^2 (l - c)^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi n c}{l} \quad (M = \rho l) \qquad (2)$$

y decrece en forma proporcional a n^2.

En el ejercicio 4 del § 3 se estudia la teoría elemental de la excitación de una cuerda por percusión, mediante un golpe concentrado en el punto c, de impulso K. La solución de este problema se representa en la forma

$$u(x, t) = \frac{2K}{\pi a \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{\pi n c}{l} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot \operatorname{sen} \omega_n t \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a\right), \qquad (3)$$

$$E_n = \frac{K^2}{M} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi n c}{l}. \qquad (4)$$

De este modo, si se excita la cuerda mediante un golpe, concentrado en un pequeño intervalo de longitud δ, las energías de distintos armónicos (para los cuales δ es pequeño en comparación con la distancia entre los nodos) se diferenciarán poco entre sí y el tono generado por esta cuerda estará saturado de armónicos. Esta conclusión se comprueba fácilmente en el experimento. Si se golpea una cuerda tensa (en el monocordio) con el filo de un cuchillo, la cuerda resonará: el sonido estará cargado de armónicos. En el piano la cuerda se excita por el golpe de un martillito, forrado de fieltro. Tal excitación de la cuerda se puede representar mediante los esquemas siguientes:

1. La cuerda se excita dando una velocidad inicial constante v_0 en el intervalo $(c - \delta, c + \delta)$. Este caso corresponderá a un

martillito plano rígido, que tenga un ancho de 2δ y que golpee en el punto c. El proceso de las oscilaciones se describe mediante la función (véase el ejercicio 3 del § 3)

$$u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{\pi n c}{l} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot \operatorname{sen} \omega_n t,$$

y las energías de los armónicos son iguales a

$$E_n = \frac{4M v_0^2}{n^2 \pi^2} \operatorname{sen}^2 \frac{\pi n c}{l} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\pi n \delta}{l}.$$

2. La cuerda se excita mediante la velocidad inicial

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} v_0 \cos \frac{x-c}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} & (x-c) < \delta, \\ 0 & (x-c) > \delta. \end{cases}$$

Este caso corresponde a un martillito rígido convexo de 2δ de ancho. Este martillo genera la velocidad inicial mayor en el centro del intervalo 2δ, lo que puede ser descrito esquemáticamente por la función citada más arriba. La oscilación generada de este modo tiene la forma (véase el ejercicio 3 del § 3)

$$u(x, t) = \frac{8v_0 \delta}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} c}{1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot \operatorname{sen} \omega_n t$$

y las energías de los armónicos son iguales a

$$E_n = \frac{16 v_0^2 \delta^2 \rho}{l \pi^2} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right]^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi n \delta}{l} \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\pi n c}{l}.$$

3. El martillito que genera las oscilaciones no es absolutamente rígido. En este caso, las oscilaciones se determinan ya no por la velocidad inicial, sino por una fuerza que cambia con el tiempo. De esta manera, obtenemos una ecuación inhomogénea con segundo miembro

$$F(x, t) = \begin{cases} F_0 \cos \frac{x-c}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi t}{\tau}, & \text{si } |x-c| < \delta, \; 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0 & \text{si } |x-c| > \delta, \; t > \tau. \end{cases}$$

La solución de esta ecuación para $t > \tau$ se representa en la forma

$$u(x, t) = \frac{16F_0\tau\delta}{\pi^3\rho a} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos\frac{\pi n\delta}{l}\cos\frac{\omega_n\tau}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi nc}{l}}{\left[1-\left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{na\tau}{l}\right)^2\right]} \operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x \operatorname{sen}\omega_n\cdot\left(t-\frac{\tau}{2}\right).$$

Los ejemplos considerados demuestran que el ancho del intervalo en que se efectúa el golpe y la duración del mismo tienen una influencia bastante grande en la magnitud de la energía de los armónicos altos. Obsérvese, además, que la presencia del factor $\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}c$ demuestra que si el centro del golpe del martillito cae sobre un nodo del n-ésimo armónico, la energía de éste es igual a cero.

La presencia de armónicos altos (a partir del séptimo) altera la armonía del sonido, causando la sensación de disonancia[1]). La presencia de armónicos bajos, al contrario, causa la sensación de plenitud del sonido. En el piano, el lugar del golpe del martillito se elige próximo al punto en que se fija la cuerda, entre los nodos de los armónicos séptimo y octavo, para disminuir su energía. Regulando el ancho del martillito y su rigidez, se tiende a aumentar la energía relativa de los armónicos bajos (tercero y cuarto). En los pianos antiguos, que tenían un tono más penetrante, inclusive hasta cierto punto tintineante, se utilizaban martillitos angostos y rígidos.

II. SOBRE LAS OSCILACIONES DE LAS BARRAS

En los cursos de los métodos de la física matemática se le concede el mayor lugar a las ecuaciones de segundo orden. Sin embargo, muchos problemas sobre las oscilaciones de las barras, placas, etc. se reducen a ecuaciones de orden mayor.

Como ejemplo de ecuaciones de cuarto orden, estudiemos el problema de las oscilaciones propias de un diapasón, equivalente

---

[1]) Por ejemplo, si la frecuencia principal (primer armónico) de 440 oscilaciones por segundo corresponde al *la* de la primera octava, una frecuencia siete veces mayor corresponde al *sol* de la cuarta octava. El intervalo *la* — *sol*, llamado séptima menor, posee un carácter disonante, desagradable al oído.

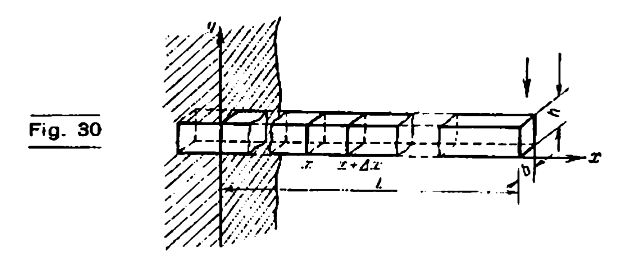


Fig. 30

al problema de las oscilaciones de una barra fina rectangular, apretada en un extremo por tenazas macizas. La determinación de la forma de las oscilaciones del diapasón y su frecuencia se reducen a la resolución de la «ecuación de las oscilaciones transversales de una barra»

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \tag{1}$$

Esta ecuación se obtiene en muchos problemas de las oscilaciones de las barras, al calcular la estabilidad de las vigas giratorias, así como también en el estudio de la vibración de los barcos[1]).

Expondremos una deducción elemental de la ecuación (1). Consideremos una barra rectangular de longitud l $(0 \leqslant x \leqslant l)$, altura h y ancho b (fig. 30). Tomemos un elemento de longitud dx. Luego de la flexión, los cortes de los extremos del elemento de barra considerado, que supondremos planos, forman un ángulo $d\varphi$. Si las deformaciones son pequeñas, y la longitud del eje de la barra no cambia con la flexión $(dl = dx)$, entonces

$$d\varphi = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_x - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+dx} = -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx.$$

La capa de material que se halla a una distancia η del eje de la barra $y = 0$, cambia su longitud en una magnitud $\eta\, d\varphi$ (fig. 31). Según la ley de Hooke, la fuerza de la tensión que actúa a lo largo de la capa es igual a

$$dN = E \cdot b\, d\eta \cdot \frac{\eta\, d\varphi}{dx} = -E \cdot b \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\eta\, d\eta,$$

[1]) Véase, por ejemplo, la monografía de A. N. Krylov *«Vibraciones de los barcos»*.

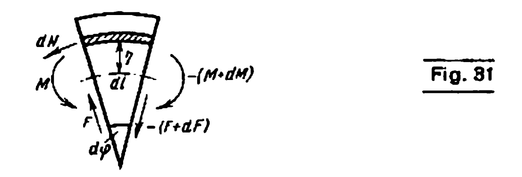


Fig. 81

donde E es el módulo de elasticidad del material de la barra. El momento total de flexión de las fuerzas que actúan en el corte x es igual a

$$M = -E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} b \int_{-h/2}^{h/2} \eta^2 \, d\eta = -E\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} J, \tag{2}$$

onde

$$J = b\int_{-h/2}^{h/2} \eta^2 \, d\eta = \frac{bh^3}{12}$$

es el momento de inercia del corte rectangular con respecto a su eje horizontal. Designemos por $M(x)$ el momento que actúa en la parte derecha de la barra en cada corte. En el corte $x + dx$, evidentemente, actúa un momento de fuerzas igual a $-(M + dM)$.

El momento excedente $-dM$ se equilibra por el momento de las fuerzas tangenciales:

$$dM = F\,dx.$$

De aquí se obtiene, en virtud de la igualdad (2), la magnitud de la fuerza tangencial:

$$F(x, t) = \frac{\partial M}{\partial x} = -EJ\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}. \tag{3}$$

Igualando la fuerza resultante que actúa sobre el elemento

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx = -EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\,dx$$

al producto de la masa del elemento por la aceleración

$$\rho S\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,dx,$$

donde ρ es la densidad de la barra, S, la superficie del corte transversal (aquí despreciamos el movimiento giratorio de la flexión),

se obtiene la ecuación de las oscilaciones transversales de la barra

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \left(a^2 = \frac{EJ}{\rho S}\right). \tag{1}$$

Las condiciones de frontera para el extremo fijo $x = 0$ son la inmovilidad de la barra y la horizontalidad de la tangente:

$$y|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0} = 0. \tag{4}$$

En el extremo libre deben anularse el momento de flexión (2) y la fuerza tangencial (3), de donde se deduce que

$$\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x=l} = 0, \quad \left.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right|_{x=l} = 0. \tag{5}$$

Para que quede totalmente determinado el movimiento de la barra, hay que dar además las condiciones iniciales: la desviación inicial y la velocidad inicial,

$$y|_{t=0} = f(x) \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{6}$$

De este modo, el problema se reduce a la resolución de la ecuación (1) con las condiciones de frontera (4), (5) y las condiciones iniciales (6).

Resolveremos el problema por el método de separación de las variables, haciendo

$$y = Y(x)\,T(t). \tag{7}$$

Sustituyendo la forma supuesta de la solución en (1), tendremos:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\frac{Y^{(4)}(x)}{Y(x)} = -\lambda.$$

Para la función $Y(x)$, se obtiene el problema de los valores propios

$$Y^{(4)} - \lambda Y = 0, \tag{8}$$

$$Y|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{dY}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{d^2Y}{dx^2}\right|_{x=l} = 0, \quad \left.\frac{d^3Y}{dx^3}\right|_{x=l} = 0. \tag{9}$$

La solución general de la ecuación (8) tiene la forma

$$Y(x) = A \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda}x + B \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda}x + C \cos \sqrt[4]{\lambda}x + D \operatorname{sen} \sqrt[4]{\lambda}x.$$

De las condiciones $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 0$, se halla $C = -A$, $D = -B$. De aquí se sigue que

$$Y(x) = A(\operatorname{ch}\sqrt[4]{\lambda}x - \cos\sqrt[4]{\lambda}x) + B(\operatorname{sh}\sqrt[4]{\lambda}x - \operatorname{sen}\sqrt[4]{\lambda}x).$$

Las condiciones $Y''(l) = 0$ e $Y'''(l) = 0$ nos dan:

$$A(\operatorname{ch}\sqrt[4]{\lambda}l + \cos\sqrt[4]{\lambda}l) + B(\operatorname{sh}\sqrt[4]{\lambda}l + \operatorname{sen}\sqrt[4]{\lambda}l) = 0,$$

$$A(\operatorname{sh}\sqrt[4]{\lambda}l - \operatorname{sen}\sqrt[4]{\lambda}l) + B(\operatorname{ch}\sqrt[4]{\lambda}l + \cos\sqrt[4]{\lambda}l) = 0.$$

Este sistema homogéneo tiene soluciones no triviales A y B, si su determinante es igual a cero. Igualando dicho determinante a cero, se obtiene una ecuación trascendente para hallar los valores propios:

$$\operatorname{sh}^2\sqrt[4]{\lambda}l - \operatorname{sen}^2\sqrt[4]{\lambda}l = \operatorname{ch}^2\sqrt[4]{\lambda}l + 2\operatorname{ch}\sqrt[4]{\lambda}l\cos\sqrt[4]{\lambda}l + \cos^2\sqrt[4]{\lambda}l.$$

Como $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, esta ecuación puede escribirse en la forma

$$\operatorname{ch}\mu\cdot\cos\mu = -1 \quad (\mu = \sqrt[4]{\lambda}l). \tag{10}$$

Las raíces de la ecuación (10) se calculan sin dificultad, por ejemplo, gráficamente[1]):

$$\mu_1 = 1{,}875,$$
$$\mu_2 = 4{,}694,$$
$$\mu_3 = 7{,}854,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mu_n \approx \frac{\pi}{2}(2n-1) \quad \text{para} \quad n > 3.$$

La última fórmula da el valor de μ_n con exactitud de tres cifras decimales, a partir de $n = 3$, y con exactitud de seis cifras para $n \geqslant 7$.

Consideremos ahora las frecuencias de las oscilaciones de un diapasón. A la ecuación

$$T'' + a^2\lambda_n T = 0$$

la satisfacen las funciones trigonométricas

$$T_n(t) = a_n \cos 2\pi\nu_n t + b_n \operatorname{sen} 2\pi\nu_n t$$

con frecuencia

$$\nu_n = \frac{a\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi}\sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} = \frac{\mu_n^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}.$$

---

[1]) Para el cálculo de las raíces de la ecuación (10) véase J. W. Rayleigh, *Teoría del Sonido*, t. I, cap. VIII, 1940.

Las frecuencias ν_n de las oscilaciones propias se hallan en proporción a los cuadrados de μ_n. Puesto que

$$\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} = 6{,}267, \quad \frac{\mu_3^2}{\mu_1^2} = 17{,}548,$$

el segundo tono propio es superior al primero en más de dos octavas y media, es decir, mayor que el sexto armónico de una cuerda de igual tono principal; la tercera oscilación propia es mayor que el tono principal en más de cuatro octavas. Por ejemplo, si el diapasón tiene su frecuencia principal en 440 oscilaciones por segundo (standard convenido para a', la nota *la* de la primera octava), la próxima frecuencia propia del diapasón será igual a 2757,5 oscilaciones por segundo (entre $e'''' = 2637{,}3$ y $f'''' = 2794{,}0$, las notas *mi* y *fa* de la cuarta octava de la gama templada uniformemente); la tercera frecuencia propia, de 7721,1 oscilaciones por segundo ya se sale de los límites de la escala de los sonidos propiamente musicales.

Al generar las oscilaciones de un diapasón mediante un golpe, aparecen no sólo el primero, sino también los armónicos superiores, lo que explica el sonido metálico en el momento inicial. Sin embargo, con el transcurso del tiempo los armónicos superiores se amortiguan rápidamente, y el diapasón da el sonido limpio del tono principal.

III. OSCILACIONES DE UNA CUERDA CARGADA

1. Planteamiento del problema. Estudiemos el problema de las oscilaciones de una cuerda fija en sus extremos $(0, l)$, en algunos puntos de la cual, $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, se han colocado masas concentradas M_i.

Las condiciones en el punto x_i pueden ser obtenidas por dos medios. Si en el punto x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ se ha aplicado la fuerza concentrada $F_i(t)$, deben cumplirse las relaciones

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t), \tag{1}$$

$$ku_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} = -F_i. \tag{2}$$

En este caso, F_i debe ser interpretada como la fuerza de inercia. Sustituyendo en la fórmula (2)

$$F_i = -M_i u_{tt}(x_i, t),$$

se obtiene:

$$M_i u_{tt}(x_i, t) = ku_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0}. \tag{3}$$

Es posible también otra deducción de la condición (3). Distribuyamos la masa M_i en el intervalo $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ con densidad constante δ_i y apliquemos la ecuación de las oscilaciones para una cuerda no homogénea

$$(\rho + \delta_i) u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon, \tag{4}$$

donde ρ es la densidad de la cuerda. Sea $u_\varepsilon(x, t)$ la solución de esta ecuación.

Integrando la ecuación (4) con respecto a x desde $x_i - \varepsilon$ hasta $x_i + \varepsilon$ y efectuando el paso al límite cuando $\varepsilon \to 0$, se obtiene la condición (3) para la función $u(x, t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x, t)$. No nos detendremos en fundamentar el paso al límite.

Formulemos todo nuestro problema:

hallar la solución de la ecuación de las oscilaciones

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{5}$$

que satisfaga a las condiciones de frontera

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

a las condiciones de conjunción en los puntos $x = x_i$

$$\left.\begin{aligned} u(x_i - 0, t) &= u(x_i + 0, t), \\ M_i u_{tt}(x_i, t) &= k u_x \big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\right\} \tag{7}$$

y a las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

donde $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son funciones dadas.

2. Oscilaciones propias de una cuerda cargada. Nos detendremos, ante todo, en el análisis de las frecuencias propias y de los perfiles de las ondas estacionarias para una cuerda cargada. Para esto, debemos hallar la solución del problema planteado, que se represente en forma del producto

$$u(x, t) = X(x)\, T(t). \tag{9}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (5) y utilizando las condiciones de frontera, se obtiene, después de separar las variables,

$$T'' + \lambda T = 0 \tag{10}$$

y

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dx}(kX')+\lambda\rho X=0,\\&X(0)=0,\quad X(l)=0.\end{aligned}\right\}$$

Las condiciones de conjunción dan:

$$X(x_i-0)=X(x_i+0),$$
$$M_iX(x_i)\,T''=kX'\,|_{x_i-0}^{x_i+0}\,T.$$

Tomando en cuenta la ecuación (10), escribamos la última relación en la forma

$$kX'\,|_{x_i-0}^{x_i+0}=-\lambda M_iX(x_i).$$

De este modo, para la función $X(x)$ se obtiene el siguiente problema de valores propios:

$$\frac{d}{dx}(kX')+\lambda\rho X=0,\quad k(x)>0,\quad \rho(x)>0, \tag{11}$$

$$X(0)=0,\quad X(l)=0, \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}&X(x_i-0)=X(x_i+0)\quad (i=1,2,\ldots,n),\\&kX'(x_i+0)-kX'(x_i-0)+\lambda M_iX(x_i)=0.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

La particularidad del problema de contorno considerado es que el parámetro λ figura no sólo en la ecuación, sino también en las condiciones complementarias.

No nos detendremos en demostrar la existencia de un conjunto infinito de valores propios y de funciones propias, la positividad de los valores propios y el teorema del desarrollo. Este problema de contorno, al igual que los problemas de tipo habitual, considerados en el § 3 del capítulo II, se reducen a cierta ecuación integral, que es en este caso una ecuación integral *cargada*, equivalente a una ecuación integral en integrales de Stieltjes.

Detengámonos con más detalle en la deducción de la condición de ortogonalidad de las funciones propias

$$X_1(x),\ X_2(x),\ \ldots,$$

que es diferente, en nuestro caso, de la condición (92) del § 3, y se llama condición de ortogonalidad con carga.

Como fue demostrado en el cap. II (véase el § 3), las funciones propias del problema de contorno

$$\frac{d}{dx}(kX')+\lambda\rho X=0,$$

$$X(0)=0,\quad X(l)=0$$

son ortogonales, con densidad ρ, en el intervalo $(0,l)$:

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x)\, dx = 0 \quad (m \neq n). \tag{14}$$

Distribuyendo cada masa M_i con densidad constante δ_i en cierto intervalo $x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$ es un número pequeño, se obtiene el problema de las oscilaciones propias de una cuerda inhomogénea con densidad $\rho_\varepsilon(x)$. Sean $\lambda_{\varepsilon n}$ y $\{X_{\varepsilon n}(x)\}$ los valores propios y las funciones propias de este problema, para las cuales debe cumplirse la condición de ortogonalidad

$$\int_0^l X_{\varepsilon m}(x) X_{\varepsilon n}(x) \rho_\varepsilon(x)\, dx = 0. \tag{15}$$

Separando en la igualdad (15) las integrales por los intervalos $(x_i - \varepsilon,\ x_i + \varepsilon)$ y efectuando el paso al límite cuando $\varepsilon \to 0$, se obtiene la relación

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x)\, dx + \sum_{i=1}^{n} M_i X_m(x_i) X_n(x_i) = 0 \quad (m \neq n), \tag{16}$$

llamada condición de ortogonalidad con carga[1]).

Dejamos nuevamente de lado el problema sobre la posibilidad de este paso al límite.

La condición de ortogonalidad (16) puede ser obtenida también formalmente de la ecuación y de las condiciones (11)—(13). Sean $X_m(x)$ y $X_n(x)$ funciones propias del problema (1), que corresponden a los valores λ_m y λ_n, las cuales satisfacen a las ecuaciones

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dX_m}{dx}\right) + \lambda_m \rho X_m = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(k \frac{dX_n}{dx}\right) + \lambda_n \rho X_n = 0.$$

Multipliquemos la primera ecuación por $X_n(x)$, la segunda por $X_m(x)$, y restemos del primer resultado el segundo. Integrando la igualdad obtenida sucesivamente por los intervalos $(0,\ x_1)$; $(x_1,\ x_2)$; . . .; $(x_h,\ l)$ y sumando, tendremos:

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x)\, dx -$$

$$- \sum_{i=0}^{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} [X_m k X'_n - X_n k X'_m]\, dx = 0, \tag{17}$$

[1]) Véase R. Courant y D. Hilbert, *Métodos de la Física matemática*, t. I, cap. VI, 1951.

donde hacemos $x_0 = 0$, $x_{k+1} = l$. Efectuando la integración en cada sumando y uniendo los términos correspondientes a las sustituciones $x = x_i - 0$ y $x = x_i + 0$, se obtiene una suma de términos del tipo

$$A_i = (X_m kX'_n - X_n kX'_m)_{x=x_i-0} - (X_m kX'_n - X_n kX'_m)_{x=x_i+0}.$$

Además, las sustituciones para $x = 0$ y $x = l$ se anulan, en virtud de las condiciones de frontera.

Para calcular A_i, utilizaremos las condiciones de conjunción

$$\left.\begin{array}{r} X_j(x_i - 0) = X_j(x_i + 0), \\ kX'_j(x_i + 0) - kX'_j(x_i - 0) = -M_i\lambda_j X_j(x_i) \end{array}\right\} \quad (j = m, n). \qquad (13')$$

Escribiendo A_i en la forma

$$A_i = X_m(x_i)\,[kX'_n(x_i - 0) - kX'_n(x_i + 0)] - \\ - X_n(x_i)\,[kX'_m(x_i - 0) - kX'_m(x_i + 0)]$$

y aplicando la fórmula (13), se halla:

$$A_i = X_m(x_i)\,M_i\lambda_n X_n(x_i) - X_n(x_i)\,M_i\lambda_m X_m(x_i) = \\ = M_i X_m(x_i)\,X_n(x_i)\,(\lambda_n - \lambda_m).$$

Ahora la igualdad (17) puede escribirse en la forma

$$(\lambda_m - \lambda_n)\left\{\int_0^l X_m(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k} M_i X_m(x_i)\,X_n(x_i)\right\} = 0.$$

Si $\lambda_m \neq \lambda_n$, de aquí se deduce inmediatamente la condición de ortogonalidad con carga (16).

La norma de las funciones propias $X_n(x)$ se determina por la fórmula

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\,\rho(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k} M_i X_n^2(x_i). \qquad (18)$$

Es evidente que al desarrollar cierta función $f(x)$ en la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x),$$

los coeficientes del desarrollo se determinarán por la fórmula

$$f_n = \frac{\int_0^l f(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx + \sum_{i=1}^{k} M_i f(x_i)\,X_n(x_i)}{\|X_n\|}. \qquad (19)$$

El problema con condiciones iniciales, planteado en el p. 1, se resuelve por el esquema común del método de separación de las

variables. Análogamente se estudia el problema sobre las oscilaciones de una barra (o de una viga) cuando hay masas concentradas.

El problema sobre las oscilaciones de una cuerda cargada con masas concentradas, encuentra gran aplicación en la física y en la técnica. Ya Poisson resolvía el problema del movimiento longitudinal de un peso colgado de un hilo elástico. A. N. Krylov demostró[1]) que a este problema se reduce la teoría del indicador de una máquina de vapor, la de las oscilaciones giratorias de una viga con volante en el extremo, la de distintas válvulas vibrantes, etc. Para la teoría de muchos instrumentos de medición es importante estudiar las oscilaciones giratorias de un hilo, en cuyo extremo hay colgada una masa (por ejemplo, un espejo).

Los problemas de este tipo han adquirido una actualidad particular en relación con el estudio de la estabilidad de las vibraciones de las alas de un avión. Para resolver este problema, es necesario calcular las frecuencias propias del ala (viga de sección variable), cargada con masas (los motores). Además, el problema considerado se encuentra al calcular las oscilaciones propias de las antenas, cargadas con condensadores y autoinducciones concentrados (sobre esto, véase el apéndice dedicado a la analogía entre las oscilaciones mecánicas y las electromagnéticas).

No nos detendremos aquí en los métodos aproximados de determinación de los valores y funciones propios del problema, que son análogos a los métodos aproximados de determinación de las magnitudes correspondientes para una cuerda no homogénea.

3. La cuerda con un peso en el extremo. Tiene un gran interés práctico el problema de las oscilaciones de una cuerda homogénea, uno de cuyos extremos ($x = 0$) está fijo, y al otro ($x = l$) se le ha ajustado un peso de masa M.

En este caso la condición para $x = l$ adquiere la forma

$$Mu_{tt} = -ku_x(l, t)$$

y para la amplitud de las ondas estacionarias se obtiene la ecuación

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0$$

con las condiciones de frontera

$$X_n(0) = 0, \quad X_n'(l) = \frac{M}{\rho} \lambda_n X_n(l).$$

[1]) Véase A. N. Krylov, *Sobre ciertas ecuaciones diferenciales de la Física matemática*, cap. VII, ed. de la Academia de Ciencias de la URSS, 1932.

De aquí se halla que

$$X_n(x) = \frac{\operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} x}{\operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} l},$$

donde λ_n se determina de la ecuación

$$\operatorname{ctg} \sqrt{\lambda_n} l = \frac{M}{\rho} \sqrt{\lambda_n}. \tag{20}$$

La condición de ortogonalidad de las funciones $\{X_n(x)\}$ toma la forma

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) \rho \, dx + M X_n(l) X_m(l) = 0.$$

Calculemos el cuadrado de la norma

$$N_n = \int_0^l X_n^2(x) \rho \, dx + M X_n^2(l).$$

Utilizando la ecuación (20), se obtiene:

$$N_n = \frac{l\rho}{2} + \frac{M}{2} + \frac{M^2}{2\rho} \lambda_n l.$$

El problema con datos iniciales se resuelve por el método habitual.

4. **Correcciones para los valores propios.** Calculemos las correcciones para las frecuencias propias en el caso de pequeñas y grandes cargas M. Para simplificar, estudiaremos el caso en que el peso está colgado del extremo de la cuerda. Son posibles dos casos límite.

1. $M = 0$. El extremo $x = l$ está libre. Los valores propios se determinan de la fórmula

$$\sqrt{\lambda_n^{(1)}} = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l}.$$

2. $M = \infty$. El extremo $x = l$ está fijo rígidamente: $u(l, t) = 0$. Los valores propios se determinan de la fórmula

$$\sqrt{\lambda_n^{(2)}} = \frac{\pi n}{l}.$$

Nos interesará el caso de pequeñas M ($M \to 0$) y grandes M ($M \to \infty$).

1°. M es pequeña. Hallemos la corrección al valor propio $\lambda_n^{(1)}$, haciendo

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} + \varepsilon M, \tag{21}$$

donde ε es cierto número. Sustituyendo (21) en la ecuación (20) y despreciando M^2 y las potencias mayores de M, se obtiene:

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)}\left(1 - \frac{2M}{\rho l}\right), \tag{22}$$

es decir, las frecuencias propias de la cuerda cargada para $M \to 0$ crecen, aproximándose a las frecuencias propias de la cuerda con extremo libre.

2°. M es grande. Escogiendo $\frac{1}{M}$ como parámetro pequeño, hagamos:

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \varepsilon \frac{1}{M}.$$

La ecuación (20) nos da:

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\, l}.$$

Aquí hemos despreciado los términos que contienen a $\frac{1}{M^2}$ y a las potencias mayores de $\frac{1}{M}$.

De esta manera,

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\, l}\, \frac{\rho}{M}, \quad \lambda_n = \lambda_n^{(2)} + \frac{2\rho}{Ml}, \tag{23}$$

es decir, las frecuencias propias disminuyen al crecer la carga, aproximándose uniformemente a las frecuencias propias de la cuerda con extremos fijos.

IV. ECUACIONES DE LA DINAMICA DE LOS GASES Y TEORIA DE LAS ONDAS DE CHOQUE

1. Ecuaciones de la dinámica de los gases. Ley de conservación de la energía. Las ecuaciones de la acústica (véase el § 1) fueron obtenidas bajo la hipótesis de que las velocidades del movimiento del gas y las variaciones de la presión eran pequeñas, lo cual nos permitió linealizar las ecuaciones de la hidrodinámica.

En los problemas que surgen al estudiar el vuelo de los cohetes y de los aviones rápidos, en la teoría de la balística, en la de las ondas explosivas, etc., hay que tratar con procesos hidrodinámicos que se caracterizan por las grandes velocidades y por elevados

gradientes de presiones. En este caso, la aproximación lineal de la acústica no sirve, y hay que utilizar las ecuaciones no lineales de la hidrodinámica. Como en la práctica estos tipos de movimiento se encuentran en los gases, se suele hablar de la hidrodinámica de las grandes velocidades como de la *dinámica de los gases*.

Las ecuaciones de la dinámica de los gases, en el caso del movimiento unidimensional de un gas (en la dirección del eje x), tienen la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)=0 \qquad \text{(ecuación de continuidad)}, \qquad (1)$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \text{(ecuación del movimiento)}, \qquad (2)$$

$$p=f(\rho,\ T) \qquad \text{(ecuación de estado)}. \qquad (3)$$

De este modo, las ecuaciones de la dinámica de los gases son las ecuaciones del movimiento de un líquido ideal compresible, cuando no actúan fuerzas externas.

Pasemos ahora a la deducción de la ley de conservación de la energía. La energía de la unidad de volumen es igual a

$$\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon, \qquad (4)$$

donde el primer término es la energía cinética, y el segundo, la energía interna. Aquí ε, evidentemente, indica la *energía interna* de la unidad de masa.

Para un gas ideal es $\varepsilon = c_v T$, donde c_v es la capacidad calorífica a volumen constante, y T, la temperatura. Calculemos la variación de la energía en la unidad de tiempo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon). \qquad (5)$$

Efectuando la derivación en el primer sumando y aplicando las ecuaciones (1) y (2), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right)=\frac{v^2}{2}\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho v\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{v^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)-\rho v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right)-v\frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (6)$$

Para transformar la derivada $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)$, apliquemos el primer principio de la termodinámica, que expresa la ley de conservación

de la energía:

$$dQ = d\varepsilon + p\,d\tau, \tag{7}$$

donde dQ es la cantidad de calor que el sistema obtiene del exterior (o da al exterior), $p\,d\tau$, el trabajo invertido en cambiar el volumen en la magnitud $d\tau$ ($\tau = \frac{1}{\rho}$ es el volumen específico).

Si el proceso es adiabático (no hay intercambio de calor con el medio), entonces

$$dQ = 0$$

y

$$d\varepsilon = -p\,d\frac{1}{\rho} = \frac{p}{\rho^2}\,d\rho. \tag{8}$$

Aplicando esta igualdad, tendremos:

$$d(\rho\varepsilon) = \varepsilon\,d\rho + \rho\,d\varepsilon = \varepsilon\,d\rho + \frac{p}{\rho}\,d\rho = w\,d\rho, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) = w\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{10}$$

donde

$$w = \varepsilon + \frac{p}{\rho} \tag{11}$$

es la *función calorífica*, o contenido calorífico de la unidad de masa.

La derivada $\frac{\partial w}{\partial x}$ satisface, en virtud de las relaciones (9) y (11), a la ecuación

$$\rho v\frac{\partial w}{\partial x} = v\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{12}$$

Teniendo en cuenta las igualdades (2), (5), (6), (10), (12), se obtiene la ley de conservación de la energía en forma diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\right]. \tag{13}$$

Para esclarecer el significado físico de esta igualdad, integrémosla por cierto volumen (x_1, x_2):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right)dx = -\rho v\left(\frac{v^2}{2} + w\right)\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

A la izquierda se tiene el cambio de energía en la unidad de tiempo en el intervalo (x_1, x_2), a la derecha, el flujo de energía que sale en la unidad de tiempo del volumen considerado.

Si no se puede despreciar el efecto de conducción del calor, la ecuación de la conservación de la energía toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2}+w\right)-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right], \qquad (14)$$

donde $\varkappa$ es el coeficiente de conductividad térmica.

2. Ondas de choque. Condiciones de compatibilidad dinámica. En el caso de grandes velocidades son posibles movimientos, en los cuales en ciertas superficies que se desplazan en el espacio surgen discontinuidades en la distribución de las magnitudes hidrodinámicas (presión, velocidad, densidad y otras). Estas discontinuidades se suelen llamar *ondas de choque.*

En la superficie de la discontinuidad (*frente de la onda de choque*) deben cumplirse las condiciones de continuidad del flujo de la sustancia, de la energía y de la cantidad de movimiento (*condiciones de Hugoniot*). Pasemos a la deducción de estas condiciones.

Transformemos la ecuación (2) a una forma más cómoda para nuestros fines. Multiplicando (1) por v y sumándola con la (2), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)=-\frac{\partial}{\partial x}(p+\rho v^2). \qquad (2')$$

Escribamos ahora las ecuaciones de continuidad, movimiento y conservación de la energía en la forma

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v), \qquad (1')$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(p+\rho v^2), \qquad (2')$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right]. \qquad (13)$$

Tomemos en el plano (x, t) la curva $x=\alpha(t)$, que es la «huella» de la superficie de discontinuidad en el plano (x, t). Sea AC cierto arco de la curva de discontinuidad $x=\alpha(t)$, donde A y C

son los puntos de coordenadas x_1, t_1 y $x_2 = x_1 + \Delta x$; $t_2 = t_1 + \Delta t$ respectivamente. Construyamos el rectángulo $ABCD$ de lados paralelos a los ejes de coordenadas.

Escribamos la ley de conservación de la energía en forma integral:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho)_{t_2} - (\rho)_{t_1}]\, dx = - \int_{t_1}^{t_2} [(\rho v)_{x_2} - (\rho v)_{x_1}]\, dt, \tag{15}$$

donde a la izquierda tenemos la variación de la masa en el intervalo de tiempo (t_1, t_2), y a la derecha, la cantidad de sustancia que sale del intervalo (x_1, x_2) durante el tiempo (t_1, t_2). Si las funciones ρ y ρv son continuas y derivables en todas partes dentro de $ABCD$, la ecuación (15) es equivalente a la (1'). En el caso considerado, esto no tiene lugar.

Apliquemos el teorema del valor medio para cada sumando por separado:

$$[(\rho)_{\substack{t=t_2 \\ x=x^*}} - (\rho)_{\substack{t=t_1 \\ x=x^{**}}}] \frac{\Delta x}{\Delta t} = - (\rho v)_{\substack{x=x_2 \\ t=t^*}} + (\rho v)_{\substack{x=x_1 \\ t=t^{**}}};$$

en donde x^*, x^{**}, t^*, t^{**} son valores intermedios de los argumentos x y t.

Pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$ $(x_2 \to x_1)$ y $\Delta t \to 0$ $(t_2 \to t_1)$ y denotando con el subíndice 1 a los valores de las funciones por encima de la curva $x = \alpha(t)$ (detrás del frente de la onda de choque), y con el 2 a los valores de las funciones por debajo de esta curva (delante del frente), se obtiene:

$$(\rho_2 - \rho_1)\, U = - (\rho v)_1 + (\rho v)_2, \tag{16}$$

donde

$$U = \frac{d\alpha}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

es la velocidad de la onda de choque.

En el sistema de coordenadas que se mueve conjuntamente con la onda de choque,

$$u_1 = U - v_1, \quad u_2 = U - v_2$$

indican las velocidades de las partículas delante del frente y detrás del frente de la onda de choque respectivamente. La relación (16) obtenida más arriba se puede escribir en la forma

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2. \tag{16'}$$

Esta igualdad expresa la continuidad del flujo de energía a través del frente de la onda de choque.

Escribiendo la ley de la conservación de la cantidad de movimiento en forma integral, se tiene:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho v)_{t_2} - (\rho v)_{t_1}]\, dx = -\int_{t_1}^{t_2} [(p+\rho v^2)_{x_2} - (p+\rho v^2)_{x_1}]\, dt,$$

donde se tiene en el segundo miembro la suma del impulso de las fuerzas que actúan (de la presión) y del flujo de la cantidad de movimiento. Pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta t \to 0$, se obtiene la ley de conservación del flujo de la cantidad de movimiento en el frente:

$$U\,[(\rho v)_2 - (\rho v)_1] = -(p+\rho v^2)_1 + (p+\rho v^2)_2,$$

o bien

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2. \qquad (17)$$

Análogamente se obtiene también la ecuación de conservación de la energía en el frente

$$\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right)_2 U - \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right)_1 U =$$

$$= -\rho_1 v_1 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_1 + \rho_2 v_2 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_2,$$

la cual, después de transformaciones sencillas, toma la forma

$$\rho_1 u_1 \left(w_1 + \frac{u_1^2}{2}\right) = \rho_2 u_2 \left(w_2 + \frac{u_2^2}{2}\right),$$

o bien, en virtud de la condición (16),

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \qquad (18)$$

De esta forma, en el frente de la onda de choque deben cumplirse las ecuaciones (*condiciones de compatibilidad dinámica*, o *condiciones de Hugoniot*)

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \qquad (16')$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \qquad (17)$$

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \qquad (18)$$

De las dos primeras ecuaciones (16) y (17) expresaremos a u_1 y u_2 mediante p y ρ:

$$u_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2}; \quad u_2^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2},$$

de donde

$$u_1^2 - u_2^2 = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2}(p_1 - p_2).$$

Sustituyendo luego esta expresión en la ecuación (18), se halla la relación entre los valores de la energía a ambos lados del frente:

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2\rho_1 \rho_2}(\rho_1 + \rho_2)(p_1 - p_2)$$

y

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2\rho_1 \rho_2}(\rho_1 - \rho_2)(p_1 + p_2).$$

Consideremos un gas ideal, para el cual

$$p = R\rho T; \quad \varepsilon = c_v T; \quad w = c_p T = \frac{c_p}{c_p - c_v} RT = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho},$$

es decir,

$$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho}. \tag{19}$$

Aplicando la fórmula (19), luego de transformaciones sencillas se obtiene la llamada ecuación de la *adiabática de Hugoniot:*

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) p_2 + (\gamma - 1) p_1}{(\gamma - 1) p_2 + (\gamma + 1) p_1}, \tag{20}$$

o bien

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) \rho_2 - (\gamma - 1) \rho_1}{(\gamma + 1) \rho_1 - (\gamma - 1) \rho_2}. \tag{21}$$

Partiendo de esta fórmula se puede determinar una de las magnitudes p_1, ρ_1, p_2, ρ_2, si se conocen las tres restantes.

La onda de choque siempre se mueve con respecto al gas de las regiones de mayor presión a las de menor presión: $p_2 > p_1$

(*teorema de Zemplen*). De aquí se deduce que la densidad del gas detrás del frente es mayor que la densidad delante de éste.

La fórmula (20) expresa la dependencia entre p_2 y ρ_2 para p_1 y ρ_1 dadas. La función $\rho_2 = \rho_2(p_2)$, para p_1 y ρ_1 dadas, es monótonamente creciente, y tiende al límite finito para $\frac{p_2}{p_1} \to \infty$ (onda de choque de gran amplitud)

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \qquad (22)$$

Esta fórmula muestra el salto máximo de densidad (compresión) que puede existir en el frente de una onda de choque. Para un gas biatómico es $\gamma = \frac{7}{5}$, y la compresión máxima es igual a 6:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 6.$$

Aplicando las igualdades (16'), (17) y (20) y haciendo $p_1 = 0$, se halla:

$$u_1 = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}; \quad u_2 = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)^2}{2(\gamma + 1)} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}.$$

Si la onda de choque se mueve por un gas en reposo ($v_1 = 0$), la velocidad de su propagación es igual a

$$U = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}},$$

es decir, ésta crece en forma proporcional a la raíz cuadrada de p_2.

Consideremos el problema más sencillo de la teoría de las ondas de choque, que admite solución analítica. En el tubo cilíndrico $x > 0$, ilimitado por un lado y cerrado con un pistón por el otro ($x = 0$), se halla un gas en reposo de densidad constante ρ_1 y a presión constante p_1. En el momento inicial $t = 0$, el pistón comienza a moverse con velocidad constante v en el sentido positivo del eje x. Ante el pistón surge una onda de choque, la cual coincide con éste en el momento inicial, y luego se aleja de él con velocidad $U > v$. Entre el pistón y el frente de la onda de choque surge la región 2, en la cual el gas se mueve con la velocidad del pistón. Delante del frente (región 1), el gas se halla en estado de reposo: $\rho = \rho_1$, $p = p_1$ ($v = 0$).

Utilizando las condiciones en el frente (16), (17) y (18), no es difícil determinar la velocidad del frente, así como también la magnitud de los saltos de densidad y de presión.

Introduzcamos las magnitudes sin dimensión

$$\omega = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad \tilde{U} = \frac{U}{c_1}; \quad \tilde{v} = \frac{v}{c_1}; \quad \tilde{p} = \frac{\gamma p_2}{\rho_1 c_1^2}, \tag{23}$$

donde $c_1 = \sqrt{\frac{\gamma p_1}{\rho_1}}$ es la velocidad del sonido delante del frente (en la región de reposo 1). Entonces las ecuaciones de conservación se escribirán en la forma

$$\omega \tilde{U} = \tilde{U} - \tilde{v}, \qquad \text{o bien} \quad \tilde{U} = \frac{\tilde{v}}{1-\omega}, \tag{24}$$

$$\tilde{p} = 1 + \gamma \tilde{U}\tilde{v}, \quad \text{o bien} \quad \tilde{p} = 1 + \gamma \frac{\tilde{v}^2}{1-\omega}, \tag{25}$$

$$\tilde{p}\omega = 1 + (\gamma - 1)\left(\tilde{U}\tilde{v} - \frac{1}{2}\tilde{v}^2\right). \tag{26}$$

Eliminando de aquí a $\tilde{p}$ y a $\tilde{U}$, se obtiene una ecuación cuadrática para la determinación de ω:

$$2\omega^2 - \omega\,[4 + (\gamma + 1)\,\tilde{v}^2] + [2 + (\gamma - 1)\,\tilde{v}^2] = 0 \tag{27}$$

Como por el sentido físico es $\omega < 1$ $(\rho_2 > \rho_1)$, escogemos la raíz menor

$$\omega_2 = 1 + \frac{(\gamma+1)}{4}\tilde{v}^2 - \tilde{v}\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}. \tag{28}$$

De las ecuaciones (24) y (28) se halla:

$$\tilde{U} = \frac{(\gamma+1)}{4}\tilde{v} + \sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}, \tag{29}$$

$$\tilde{p} = 1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\tilde{v}^2 + \gamma\tilde{v}\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}. \tag{30}$$

Volviendo a las magnitudes iniciales, obtenemos:

$$\rho_2 = \rho_1 = \frac{1 + \frac{\gamma+1}{4}\cdot\frac{v^2}{c_1^2} + \frac{v}{c_1}\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}\cdot v^2}}{1 + \frac{(\gamma-1)\,v^2}{2c_1^2}}, \tag{31}$$

$$U = \frac{\gamma+1}{4}v + c_1\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}v^2}, \tag{32}$$

$$p_2 = p_1\cdot\left\{1 + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\frac{v^2}{c_1^2} + \frac{\gamma v}{c_1}\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}v^2}\right\}. \tag{33}$$

Como la velocidad de la onda de choque es constante, para la posición del frente en el momento t tendremos:

$$x = \alpha(t) = \left\{\frac{(\gamma+1)}{4}v + c_1\sqrt{1 + \frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}v^2}\right\}t. \tag{34}$$

En el caso límite $\frac{v}{c_1} \gg 1$ (onda de choque de gran intensidad), de las fórmulas (31)—(33) se hallan las relaciones límite

$$\rho_2 = \rho_1\frac{\gamma+1}{\gamma-1}; \quad U = \frac{\gamma+1}{2}v; \quad p_2 = p_1\cdot\frac{\gamma(\gamma+1)}{2}\cdot\frac{v^2}{c_1^2}$$

que fueran obtenidas antes.

Si $\frac{v}{c_1} \ll 1$ (onda de poca intensidad), se pueden despreciar los términos $\frac{v^2}{c_1^2}$:

$$\rho_2 = \rho_1\left(1 + \frac{v}{c_1}\right),$$

$$U = c_1\frac{(\gamma+1)}{4}v,$$

$$p_2 = p_1\left(1 + \frac{\gamma v}{c_1}\right).$$

3. Discontinuidades débiles. Más arriba hemos estudiado el movimiento de una onda de choque, en cuyo frente las magnitudes ρ, p, v y otras experimentan saltos. Tales saltos se llaman *fuertes*.

Son posibles también movimientos en los cuales en cierta superficie experimentan un salto las derivadas primeras de las magnitudes ρ, p, v y otras, mientras que las propias magnitudes se mantienen constantes. Tales discontinuidades se denominan *débiles*.

En el § 2, p. 10, fue estudiado el movimiento de las discontinuidades de este tipo, y fue establecido que estas discontinuidades se propagan a lo largo de las características. En aquel caso partíamos de la ecuación de la acústica. Sin embargo, también para los problemas no lineales de la dinámica de los gases es válido un resultado análogo.

No es difícil ver que la superficie de la discontinuidad débil se propaga con respecto al gas con velocidad igual a la velocidad local del sonido. En efecto, separemos un entorno pequeño de la superficie de la discontinuidad débil, y tomemos los valores medios de las magnitudes hidrodinámicas en este entorno. La discontinuidad débil, evidentemente, se puede considerar como una pequeña excitación, entre los valores medios, la cual satisface a la ecuación de la acústica, y debe propagarse con la velocidad local del sonido.

En calidad de ejemplo, consideremos el derrame de un gas en el vacío (onda de enrarecimiento). Supongamos que en el momento inicial $t = 0$ el gas, que ocupa el semiespacio $x > 0$, se halla en estado de reposo y tiene valores constantes de densidad ρ y de presión p_0 en toda la región $x > 0$. Para $t = 0$, la presión externa, aplicada al plano $x = 0$, cesa, y el gas comienza a moverse; surge entonces una discontinuidad débil (*onda de enrarecimiento*), que se propaga con la velocidad del sonido c_0 en el sentido positivo del eje x. En el frente delantero del gas $x = x_1(t)$, para $t = 0$, se tiene una discontinuidad de la densidad y de la presión. Sin embargo, esta discontinuidad desaparece inmediatamente después de comenzar el movimiento.

En efecto, de las condiciones de continuidad de los flujos de energía y cantidad de movimiento para $x = x_1(t)$,

$$0 = \rho_1^-(v_1 - v_1^-) = \rho_1^+(v_1 - v_1^+),$$

$$p_1^- + \rho_1^-(v_1 - v_1^-)^2 = p_1^+ + \rho_1^+(v_1 - v_1^+)^2,$$

donde ρ_1^-, p_1^-, v_1^- son los valores por la izquierda en el punto $x_1(t)$; ρ_1^+, p_1^+, v_1^+, los valores por la derecha en el punto $x_1(t)$, se obtiene

$$p_1^+ = 0 \quad \text{y} \quad \rho_1^+ = 0,$$

puesto que

$$\rho_1^- = p_1^- = v_1^- = 0.$$

Para el proceso adiabático, la ecuación de estado de un gas ideal tiene la forma

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma. \tag{35}$$

La solución del problema la buscaremos en la forma

$$\rho = \rho(\xi); \quad p = p(\xi); \quad v = v(\xi),$$

donde

$$\xi = \frac{x}{t}.$$

Calculando las derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{t}\xi\frac{df}{d\xi}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{t}\frac{df}{d\xi},$$

donde $f = \rho$, v ó p, y sustituyendo los resultados en las ecuaciones (1) y (2), se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}(v-\xi)\frac{d\rho}{d\xi} &= -\rho\frac{dv}{d\xi},\\ (v-\xi)\rho\frac{dv}{d\xi} &= \frac{dp}{d\xi}.\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Multipliquemos la primera ecuación por $(v - \xi)$ y sumémosla a la segunda:

$$(v-\xi)^2\frac{d\rho}{d\xi} = \frac{dp}{d\xi},$$

o bien

$$\frac{dp}{d\rho} = (v-\xi)^2.$$

De aquí se tiene:

$$v - \xi = \pm\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \pm c,$$

donde c es la velocidad del sonido en el proceso adiabático.

Como se estudia el movimiento de la discontinuidad débil en el sentido positivo del eje x, hay que escoger el signo «—» en la fórmula anterior, es decir,

$$v - \xi = -c. \tag{37}$$

Sustituyendo esta solución en la ecuación (36), obtenemos:

$$\frac{dv}{d\rho}=\frac{c}{\rho}, \tag{38}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{dv}{dp}=\frac{1}{\rho c}.$$

Aplicando la ecuación de estado (35), se halla:

$$c^2=\gamma\frac{p}{\rho}$$

y, después de integrar la ecuación (38),

$$v=\frac{2}{\gamma-1}\cdot c_0\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}-1\right]. \tag{39}$$

De la última fórmula se puede expresar ρ mediante v:

$$\rho=\rho_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\cdot\frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}. \tag{40}$$

Aquí

$$c_0=\sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

indica la velocidad del sonido para $v=0$ (en el gas en reposo). La fórmula (39) también se puede escribir en la forma

$$v=\frac{2}{\gamma-1}(c-c_0). \tag{41}$$

Sustituyendo la expresión (40) para ρ en la ecuación de estado (35), se halla:

$$p=p_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\cdot\frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \tag{42}$$

De las ecuaciones (41) y (37) se obtiene la fórmula

$$v=\frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{x}{t}-c_0\right), \tag{43}$$

que determina la dependencia de v de x y t. Sustituyendo después la expresión (43) para v en las fórmulas (40) y (42), se obtiene

la dependencia de ρ y p con respecto a x y t en forma explícita. Todas las magnitudes resultan depender de $\frac{x}{t}$. Si se miden las distancias en magnitudes proporcionales a t, el cuadro del movimiento no varía. Tal movimiento se denomina *automodelo*.

Hallemos la velocidad del movimiento del frente delantero $v_1(t)$. Haciendo en la igualdad (42) $p = 0$, tendremos:

$$v_1 = -\frac{2}{\gamma - 1} c_0. \qquad (44)$$

De aquí se deduce que la velocidad de derrame de un gas en el vacío es finita. Para los gases biatómicos es $\gamma = \frac{7}{5}$, y

$$v_1 = -5c_0.$$

La expresión (44) de la velocidad del frente izquierdo $x = x_1(t)$ puede ser obtenida también partiendo de la ecuación de balance de la materia

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \, dx = \rho_0 x_2 = \rho_0 c_0 t. \qquad (45)$$

Introduciendo la variable

$$\xi = \frac{x}{t},$$

se obtiene:

$$\int_{v_1}^{c_0} \rho \, d\xi = \rho_0 c_0.$$

Sustituyendo luego la expresión para ρ de (40) y haciendo

$$1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \frac{\xi - c_0}{c_0} = \lambda,$$

tendremos:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^{\frac{2}{\gamma - 1}} d\lambda = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \qquad (46)$$

donde

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \cdot \frac{v_1 - c_0}{c_0}; \quad \lambda_2 = 1.$$

Después de calcular la integral (46), se obtiene:

$$\lambda_2^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \lambda_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = 1,$$

es decir,

$$\lambda_1 = 0,$$

de donde se deduce, precisamente, que

$$v_1 = -\frac{2c_0}{\gamma - 1}.$$

El problema del derrame de un gas en el vacío queda así resuelto.

Nos hemos limitado sólo a los problemas más sencillos de la dinámica de los gases. Para un estudio más detallado de los problemas aquí citados, el lector puede consultar la bibliografía especializada[1]).

V. DINAMICA DE LA SORCION DE LOS GASES

1. Ecuaciones que describen el proceso de sorción de un gas. Estudiemos el proceso de absorción (*sorción*) de un gas[2]). Supongamos que por un tubo (cuyo eje tomaremos como eje coordenado x), lleno de sustancia absorbente (sorbente), se hace pasar una mezcla de gas y aire. Denotemos por $a(x, t)$ la cantidad de gas absorbido por la unidad de volumen de sorbente, y por $u(x, t)$, la concentración del gas que se halla en los poros del sorbente en la capa x.

Escribamos la ecuación de balance de sustancia, suponiendo que la velocidad del gas v es suficientemente grande, y que el proceso de difusión no juega un papel sustancial en la propagación del gas. Consideremos la capa de sorbente desde x_1 hasta x_2 durante el intervalo de tiempo desde t_1 hasta t_2. Es evidente que para ésta se puede escribir la ecuación de balance de la materia

$$[vu|_{x_1} - vu|_{x_2}]S\,\Delta t = [(a+u)|_{t_2} - (a+u)|_{t_1}]S\,\Delta x, \qquad (1)$$

la cual, después de simplificar entre $\Delta x \Delta t$ y de pasar al límite cuando $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, toma la forma

$$-v\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(a+u). \qquad (2)$$

---

[1]) Véase N. E. Cochin, I. A. Kibel y N. V. Roze, *Hidromecánica Teórica*, II parte, cap. I, ed. Gostejizdat, 1948; L. Landau y E. Lifshitz, *Mecánica de los Medios Continuos*, cap. VII, Gostejizdat, 1944; Ya. B. Zeldovich, *Teoría de las Ondas de Choque e Introducción a la Dinámica de los Gases*, ed. de la Academia de Ciencias de la URSS, 1946; L. I. Sedov, *Propagación de las ondas de choque potentes*, Matemática y Mecánica Aplicadas (Prikladnáia matemática y mejánica), t. X, fasc. 2 (1946).

[2]) Véase A. N. Tijonov, A. A. Zhujovitsky y Ya. L. Zabezhinsky, *Absorción de un gas de una corriente de aire por una capa de material granuloso*, Z.F.J., t. 20, fasc. 10 (1946).

El primer miembro de esta ecuación representa la cantidad de gas que se acumula en virtud del transporte, calculado para la unidad de longitud y de tiempo; el segundo miembro es la cantidad de gas que se empleó en elevar la concentración del gas absorbido, y la del gas que se encuentra en los poros. A esta ecuación de balance se le debe agregar la ecuación de la cinética de la sorción

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta (u - y), \tag{3}$$

donde β es el llamado coeficiente cinético, y, la concentración del gas que se halla en «equilibrio» con la cantidad de gas absorbida.

Las magnitudes a e y están ligadas por la ecuación

$$a = f(y), \tag{4}$$

que es una característica del sorbente.

La curva $a = f(y)$ se llama *isoterma de la sorción*. Si

$$f(y) = \frac{y}{u_0 + py},$$

la curva se llama *isoterma de Langmuir*. El tipo más sencillo de la función f corresponde a la llamada *isoterma de Henry*, que es válida en las regiones de poca concentración,

$$a = \frac{1}{\gamma} y, \tag{5}$$

donde $\frac{1}{\gamma}$ es el coeficiente de Henry.

En este caso se obtiene el problema siguiente:

hallar las funciones $u(x, t)$ y $a(x, t)$ partiendo de las ecuaciones

$$-v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta (u - \gamma a) \tag{6}$$

con las condiciones complementarias

$$\left.\begin{aligned} a(x, 0) &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$u(0, t) = u_0, \tag{8}$$

donde u_0 es la concentración de gas en la entrada.

Despreciando la derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$, que es el gas empleado en elevar la concentración libre en los poros del sorbento, con respecto a la derivada $\frac{\partial a}{\partial t}$, que es el gas empleado en elevar la cantidad de gas absorbido, se obtiene[1]):

$$-\nu\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial a}{\partial t}, \tag{2'}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}=\beta(u-\gamma a), \tag{6}$$

$$a(x, 0)=0,$$
$$u(0, t)=u_0.$$

Eliminemos la función $a(x, t)$, derivando la primera ecuación con respecto a t, y utilizando la segunda ecuación:

$$-\nu u_{xt}=\beta u_t-\beta\gamma a_t=\beta u_t+\beta\nu\gamma u_x$$

o bien

$$u_{xt}+\frac{\beta}{\nu}u_t+\beta\gamma u_x=0.$$

Determinemos la condición inicial para u, haciendo en la primera ecuación $t=0$,

$$-\nu u_x(x, 0)=\beta u(x, 0),\quad u(0, 0)=u_0,$$

de donde se halla:

$$u(x, 0)=u_0e^{-\frac{\beta}{\nu}x}.$$

El problema de hallar la función $u(x, t)$ se redujo a integrar la ecuación

$$u_{xt}+\frac{\beta}{\nu}u_t+\beta\gamma u_x=0 \tag{9}$$

con las condiciones complementarias

$$u(x, 0)=u_0e^{-\frac{\beta}{\nu}x}, \tag{10}$$
$$u(0, t)=u_0. \tag{8}$$

---

[1]) Para el sistema de ecuaciones (2') y (6) es suficiente una condición inicial, puesto que el eje $t=0$ en este caso se transforma en característica. Para más detalles, véase la nota al pie de la pág. 192.

Las características de esta ecuación son las líneas

$$x = \text{const}, \quad t = \text{const}.$$

Las condiciones complementarias de este problema son los valores de la función buscada $u(x, t)$ en las características. Análogamente se plantea el problema para la función $a(x, t)$:

$$a_{xt} + \frac{\beta}{v} a_t + \beta\gamma a_x = 0, \qquad (11)$$

$$a(x, 0) = 0, \qquad (7)$$

$$a(0, t) = \frac{u_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\beta\gamma t}\right) \qquad (12)$$

Hay que hacer notar que un problema semejante se encuentra al investigar muchos otros problemas (por ejemplo, el proceso de secado por una corriente de aire, el calentamiento de un tubo por un chorro de agua, etc.)[1]).

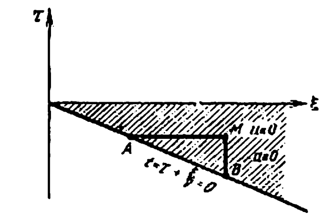
---

[1]) Al pasar a la ecuación (2') hemos despreciado el término u_t. Sin embargo, no es difícil demostrar que se llega a la misma ecuación, si se introducen las variables

$$\tau = t - \frac{x}{v}; \qquad t = \tau + \frac{\xi}{v}$$

$$\xi = x, \qquad x = \xi \qquad \text{(fig. 32)},$$

Fig. 32



en las cuales el tiempo en el punto x se calcula a partir de $t_0 = \frac{x}{v}$, que es el momento en que llega a este punto la mezcla de gas y aire. En efecto.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

La solución de la ecuación (10) se puede obtener en forma explícita por el método expuesto en el § 5, y se expresa por la fórmula

$$u(x_1, t_1) = u_0 e^{-x_1} \left[e^{-t_1} I_0 (2\sqrt{x_1 t_1}) + \frac{1}{x_1} \int_0^{x_1 t_1} e^{-\frac{\tau}{x_1}} I_0 (2\sqrt{\tau})\, d\tau \right], \quad (13)$$

donde $x_1 = \frac{\beta x}{v}$, $t_1 = \frac{\beta t}{\gamma}$ son variables sin dimensión, I_0, la función de Bessel de primera especie de orden nulo de argumento imaginario.

Utilizando fórmulas asintóticas para la función I_0, no es difícil obtener la representación asintótica de la solución para valores grandes de los argumentos.

2. Solución asintótica. Más arriba hemos estudiado el proceso de sorción de un gas, que se somete a la isoterma de sorción de Henry, la cual relaciona la cantidad de sustancia absorbida a con la concentración de equilibrio mediante la dependencia lineal

$$a = \frac{1}{\gamma} y.$$

Consideremos la isoterma de sorción de la forma general

$$a = f(y).$$

Si introducimos las variables sin dimensión

$$x_1 = \frac{x\beta}{v}, \quad t_1 = \frac{t\beta}{v}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad z = \frac{y}{u_0}, \quad v = \frac{a}{u_0 \gamma},$$

---

y la ecuación (2) toma la forma

$$-v \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial a}{\partial \tau}, \quad (2'')$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \beta (u - \gamma a). \quad (6)$$

Las condiciones iniciales (7) y las ecuaciones (2) y (6) nos dan:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

En la región entre la recta $t = 0$ y el eje ξ, se obtiene el problema de determinar la función u partiendo de las condiciones iniciales (7′) (problema de Cauchy). Es evidente que en esta región la función $u(x, t) \equiv 0$ (así como también $a \equiv 0$). De las ecuaciones (2′) y (6) se aprecia que para $\tau = 0$ la función $u(x, t)$ tiene una discontinuidad, mientras que la función $a(x, t)$ se mantiene continua. De este modo, para $\tau = 0$ la función u, como fue demostrado anteriormente, se determina de la ecuación (2′) para $a(x, 0) = 0$. Determinando, al igual que en la pág. 191 (véase las fórmulas (10) y (12)), los valores $u(x, 0)$ y $a(0, t)$, obtenemos para las funciones $u(x, t)$ y $a(x, t)$ problemas con condiciones en las características.

el sistema (2), (6), (7), (8) adquiere la forma

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} &= -\frac{\partial v}{\partial t_1},\\ \frac{\partial v}{\partial t_1} &= (\bar{u} - z),\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$v = f_1(z) = \frac{1}{u_0\gamma} f(zu_0) \tag{15}$$

con las condiciones complementarias

$$\bar{u}(0, t) = 1, \tag{16}$$

$$v(x, 0) = 0. \tag{17}$$

Nos interesará el comportamiento asintótico de las funciones que representan la solución del sistema (14).

Introduciremos las siguientes hipótesis con respecto a la función $f_1(z)$:

1. $f_1(z)$ es una función creciente, y $f_1(0) = 0$.
2. $f_1(z)$ posee derivada continua para todos los valores de z, $0 \leqslant z \leqslant 1$.
3. El rayo que va del origen de coordenadas al punto $(1, f_1(1))$ se encuentra debajo de la curva $f_1(z)$ en el segmento $0 \leqslant z \leqslant 1$ (fig. 33) lo cual, en particular, tiene lugar para una isoterma convexa.

Introduciendo la notación para la función inversa

$$z = f_1^{-1}(v) = F(v),$$

buscaremos la solución asintótica del problema planteado en forma de la onda

$$\left.\begin{aligned}\tilde{u} &= \psi(\xi),\\ \tilde{v} &= \varphi(\xi),\end{aligned}\right. \quad \xi = x - \sigma t, \tag{18}$$

donde σ es la velocidad de propagación de la onda, que debemos determinar.

Esto significa que para grandes distancias (cuando $x \to \infty$) o después de un gran intervalo de tiempo ($t \to \infty$),

$$v(x, t) = \tilde{v} = \varphi(x - \sigma t); \quad \bar{u}(x, t) = \tilde{u} = \psi(x - \sigma t).$$

Las concentraciones $\bar{u}$ y v deben satisfacer, para $x = \infty$ ó $t = \infty$, a la condición de equilibrio

$$v = f_1(\bar{u}), \quad \text{o bien} \quad \bar{u} = F(v).$$

De la condición (16) se deduce, entonces, que

$$\bar{u}\,|_{\substack{x=0\\t=\infty}} = \psi(-\infty) = 1; \quad \varphi(-\infty) = v\,|_{\substack{x=0\\t=\infty}} = f_1(1). \tag{19}$$

De la condición (17) se sigue:

$$v\,|_{\substack{x=\infty\\t=0}} = \varphi(+\infty) = 0; \quad \psi(+\infty) = \bar{u}\,|_{\substack{x=\infty\\t=0}} = F(0) = 0. \tag{20}$$

Las condiciones (19) significan que para $t \to \infty$ $(\xi \to -\infty)$, debe tener lugar la saturación en todas partes.

Sustituyendo la forma supuesta de la solución en la ecuación (14), se obtiene:

$$\psi' = \sigma\varphi' = 0, \tag{21}$$

$$-\sigma\varphi' = \psi - F(\varphi). \tag{22}$$

De (21) y (20) se concluye que

$$\psi(\xi) - \sigma\varphi(\xi) = 0. \tag{23}$$

Entonces de las ecuaciones (19) se deduce que

$$\sigma = \frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi)}\bigg|_{\xi=-\infty} = \frac{1}{f_1(1)}, \tag{24}$$

o bien, en las magnitudes con dimensión,

$$\sigma = \gamma\frac{u_0}{a_0}. \tag{24'}$$

De (22) y (23) se halla:

$$-\sigma\frac{d\varphi}{\sigma\varphi - F(\varphi)} = d\xi. \tag{25}$$

Luego de integrar, tendremos:

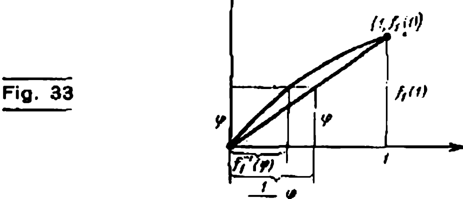
$$\omega(\varphi) = \xi - \xi_0, \tag{26}$$

donde $\omega(\varphi)$ es cierta integral del primer miembro, y ξ_0, la constante de integración. De aquí se determina la función buscada, $\varphi(\xi)$, salvo la constante desconocida ξ_0:

$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0), \tag{27}$$

$$\psi = \sigma\omega^{-1}(\xi - \xi_0). \tag{28}$$

Investiguemos si se puede determinar la función ω^{-1}, y si las funciones φ y ψ satisfarán a las condiciones planteadas cuando



$\xi \to \infty$ y $\xi \to -\infty$. Demostremos que la derivada

$$\frac{d\omega}{d\varphi} = -\sigma \frac{1}{\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi)} < 0, \tag{29}$$

es decir,

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi)$$

es una función de φ monótonamente decreciente. En efecto, el denominador en (29) es igual a

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) = \frac{1}{f_1(1)}\varphi - f_1^{-1}(\varphi)$$

El primer sumando es la abscisa del punto que pertenece a la ordenada φ y se halla en el rayo que va del origen de coordenadas al punto $(1, f_1(1))$ (fig. 33). Como hemos convenido en que la curva $\varphi = f_1(z)$ está situada por encima de este rayo, entonces

$$f_1^{-1}(\varphi) < \frac{1}{f_1(1)}\varphi \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant f_1(1))$$

y, por lo tanto,

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) > 0.$$

Además,

$$\sigma\varphi - f_1^{-1}(\varphi) = 0 \quad \text{para } \varphi = 0 \quad \text{y para} \quad \varphi = f_1(1).$$

De aquí se deduce que

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = \infty \quad \text{para} \quad \varphi = 0,$$
$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi) = -\infty \quad \text{para} \quad \varphi = f_1(1).$$

Para la función inversa se obtiene:

$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = f_1(1) \quad \text{para} \quad \xi = -\infty,$$
$$\varphi = \omega^{-1}(\xi - \xi_0) = 0 \quad \text{para} \quad \xi = \infty.$$

Continuando, en virtud de la igualdad (29) tendremos:

$$\psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)}\varphi = 1 \quad \text{para} \quad \xi = -\infty,$$

$$\psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)}\varphi = 0 \quad \text{para} \quad \xi = \infty.$$

De esta manera, todas las condiciones (19) y (20) se satisfacen, con lo cual queda demostrado que el sistema de ecuaciones tiene solución en forma de onda, que contiene a una constante indeterminada ξ_0.

Para determinar ξ_0, integremos la primera ecuación con respecto a t_1 desde 0 hasta t_0, y con respecto a x desde 0 hasta x_0:

$$\left[\int_0^{t_0} \bar{u}(x_0, \tau)\, d\tau - \int_0^{t_0} \bar{u}(0, \tau)\, d\tau\right] + \left[\int_0^{x_0} v(x, t_0)\, dx - \int_0^{x_0} v(x, 0)\, dx\right] = 0. \tag{30}$$

La igualdad obtenida expresa la ley de conservación de la materia. Pasando al límite cuando $x_0 \to \infty$ y utilizando las condiciones iniciales para $\bar{u}$ y v, se halla:

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0)\, dx = \int_0^{t_0} \bar{u}(0, \tau)\, d\tau = t_0.$$

Supongamos que para grandes valores de t la solución de nuestro problema se aproxima a las funciones $\tilde{u}$ y $\tilde{v}$ halladas más arriba en forma de ondas.

Si se determina ξ_0 de la condición

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0)\, dx - t_0 \to 0 \quad (t_0 \to \infty), \tag{31}$$

entonces éste será precisamente el valor ξ_0 que corresponde a las funciones $\tilde{u}(x, t)$ y $\tilde{v}(x, t)$.

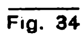
Transformemos nuestra integral:

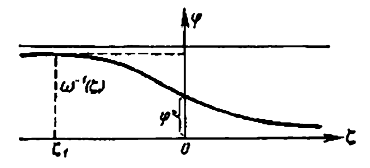
$$\int_0^{\infty} \tilde{v}(x, t_0)\, dx = \int_0^{\infty} \varphi(x - \sigma t_0)\, dx = \int_0^{\infty} \omega^{-1}(x - \sigma t_0 - \xi_0)\, dx =$$

$$= \int_{-\sigma t_0 - \xi_0}^{\infty} \omega^{-1}(\xi)\, d\xi = \int_{\zeta_1}^{\infty} \omega^{-1}(\zeta)\, d\zeta \quad \begin{pmatrix} \zeta = x - \sigma t_0 - \xi_0, \\ \zeta_1 = -\sigma t_0 - \xi_0 \end{pmatrix}.$$

Denotemos por φ^* el valor de $\omega^{-1}(\zeta)$ para $\zeta = 0$:

$$\omega^{-1}(0) = \varphi^*.$$





No es difícil observar que si $\varphi = \omega^{-1}(\zeta)$ es la función inversa de $\zeta = \omega(\varphi)$, entonces (fig. 34)

$$\int_{\zeta_1}^{\infty} \omega^{-1}(\zeta)\, d\zeta = \int_{\zeta_1}^{0} \omega^{-1}(\zeta)\, d\zeta + \int_{0}^{\infty} \omega^{-1}(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= [-\zeta_1 \omega^{-1}(\zeta_1) + \int_{\varphi^*}^{\omega^{-1}(\zeta_1)} \omega(\varphi)\, d\varphi + \int_{0}^{\varphi^*} \omega(\varphi)\, d\varphi]. \quad (32)$$

De aquí se deduce que en lugar de la igualdad límite (31) se puede escribir:

$$\int_{-\sigma t_0 - \xi_0}^{\infty} \omega^{-1}(\zeta)\, d\zeta - t_0 =$$

$$= \{(\sigma t_0 + \xi_0)\, \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) + \int_{0}^{\varphi(-\sigma t_0 - \xi_0)} \omega(\varphi)\, d\varphi\} - t_0 \to 0$$

$$(t_0 \to \infty). \quad (32')$$

Pasemos al límite cuando $t_0 \to \infty$. Entonces

$$\sigma\varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) \to \sigma\varphi(-\infty) = \sigma f_1(1) = 1. \quad (32'')$$

Para calcular el límite de la expresión

$$\sigma t_0 \varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) - t_0,$$

apliquemos la ecuación (25). Desarrollando $f^{-1}(\varphi) = F(\varphi)$ en serie en un entorno del punto $\varphi_0 = f_1(1)$, se obtiene:

$$\sigma\varphi - F(\varphi) = \sigma(\varphi - \varphi_0) + 1 - F(\varphi) =$$

$$= \sigma(\varphi - \varphi_0) - [F(\varphi) - F(\varphi_0)] =$$

$$= [\sigma - F'(\varphi_0)](\varphi - \varphi_0) + \ldots,$$

de donde

$$-\sigma \frac{d\varphi}{[\sigma - F'(\varphi_0)](\varphi - \varphi_0) + \ldots} = d\xi, \quad (33)$$

donde los puntos suspensivos indican los términos de orden mayor con respecto a $(\varphi - \varphi_0)$.

De la condición 3 de la función f_1 se deduce que

$$F'(\varphi_0) > \sigma = \frac{1}{f_1(1)}.$$

De la ecuación (33) se halla el orden de crecimiento de φ cuando $\xi \to -\infty$:

$$\varphi = Ae^{k\xi} + \varphi_0, \tag{34}$$

donde A y $k > 0$ son ciertas constantes.

De (34) se sigue que

$$\lim_{t_0 \to \infty} t_0[\sigma\varphi(-\sigma t_0 - \xi_0) - 1] = \lim_{t_0 \to \infty} t_0 A\sigma e^{-k(\sigma t_0 + \xi_0)} = 0 \tag{32'''}$$

Efectuando el paso al límite cuando $t_0 \to \infty$ en la fórmula (32') y tomando en cuenta (32'') y (32'''), se obtiene:

$$\xi_0 = -\frac{1}{f_1(1)} \int_0^{f_1(1)} \omega(\varphi)\, d\varphi. \tag{35}$$

Con esto quedan totalmente determinados los perfiles de la onda $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$.

El caso de la isoterma de Langmuir posee un interés especial. Hallemos la solución asintótica para el proceso de la sorción de un gas que se somete a la isoterma de Langmuir.

La ecuación (25) adquiere la forma

$$-\sigma \frac{d\varphi}{\sigma\varphi - \dfrac{\varphi}{1 - p\varphi}} = d\xi, \tag{36}$$

donde $\sigma = \dfrac{1}{f_1(1)} = 1 + p$ es la velocidad de la onda. De (36) se halla:

$$\xi - \xi_0 = \omega(\varphi),$$

donde

$$\omega(\varphi) = \sigma \int \frac{(1 - p\varphi)\, d\varphi}{\varphi - \sigma\varphi(1 - p\varphi)} + A =$$

$$= \frac{\sigma}{\sigma - 1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln(\sigma - 1 - p\sigma\varphi) - \ln\varphi\right] + A.$$

Es evidente que cuando φ varía entre 0 y $f_1(1)$, $\omega(\varphi)$ varía entre $-\infty$ y $+\infty$. Escojamos A de forma que

$$\varphi^* = \frac{1}{2} f_1(1),$$

es decir, que

$$\omega(\varphi^*) = 0 \quad \text{para} \quad \varphi^* = \frac{1}{2} f_1(1) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 + p}.$$

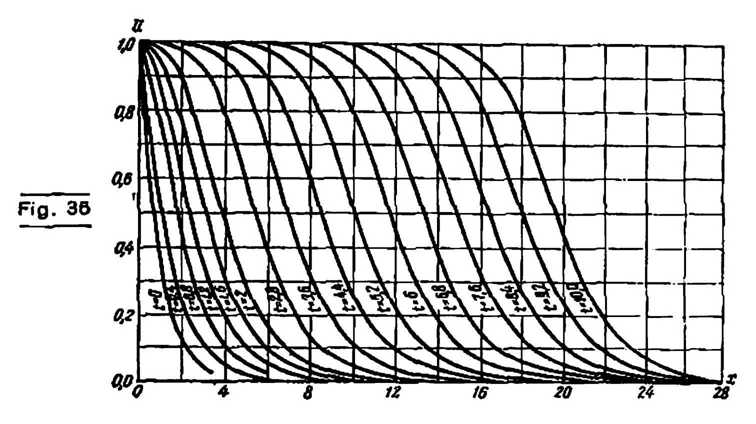


Fig. 35

Con esta condición,

$$A = -\frac{\sigma}{\sigma - 1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{1}{2}p\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\frac{1}{1+p}\right)\right]$$

y

$$\omega(\varphi) = \frac{\sigma}{\sigma - 1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln 2(1 - \sigma\varphi) - \ln 2(1 + p)\varphi\right].$$

El valor ξ_0 se halla de la fórmula

$$\xi_0 = \frac{1}{f_1(1)}\int_0^{f_1(1)} \omega(\varphi)\, d\varphi = -(\ln 2 - 1)$$

y no depende de $p = \frac{u_0}{y}$, es decir, de la concentración de entrada.

La solución asintótica buscada tiene la forma

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, t) &= \omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \\ \tilde{u}(x, t) &= \sigma\omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \end{aligned} \qquad (37)$$

donde $\omega^{-1}(\xi)$ es la función inversa con respecto a $\omega(\varphi)$.

En la fig. 35, se exponen los resultados de la integración numérica de las ecuaciones (14) para la isoterma de Langmuir por el método de diferencias finitas. Estas gráficas están dadas para los valores $0 < t \leqslant t_1 = 10$. Para $t = t_1$, los resultados de la

integración numérica coinciden con la solución asintótica con exactitud de hasta el 1%. Para valores $t > t_1$, se pueden aplicar las fórmulas asintóticas.

VI. ANALOGIAS FISICAS

Al investigar fenómenos en distintas ramas de la física, con frecuencia descubrimos caracteres comunes en estos fenómenos. Entonces, al plantear matemáticamente el problema, obtenemos las mismas ecuaciones, que describen diferentes fenómenos físicos. El ejemplo más sencillo puede darlo la ecuación

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+bx=0,$$

que describe los diferentes procesos oscilatorios de los sistemas más sencillos: el péndulo matemático, las oscilaciones de un peso bajo la acción de la fuerza de elasticidad de un resorte, las oscilaciones eléctricas en un circuito simple con bobina y condensador, etc. La generalidad de las ecuaciones para distintos procesos físicos permite, en base al estudio de las propiedades de un fenómeno, hacer conclusiones sobre las propiedades de otro fenómeno, menos estudiado. Así, el estudio de distintos fenómenos acústicos puede ser muy simplificado mediante el estudio previo de sistemas eléctricos semejantes.

La propagación de las oscilaciones eléctricas en los sistemas de constantes distribuidas se describe, como es sabido, por las ecuaciones telegráficas

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial I}{\partial x}&=C\frac{\partial V}{\partial t}+GV,\\ -\frac{\partial V}{\partial x}&=L\frac{\partial I}{\partial t}+RI,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

donde C, G, L, R son la capacidad, la pérdida, la inductancia y la resistencia distribuidas del sistema. Si se puede despreciar la resistencia y la pérdida de corriente, se obtienen para V e I las ecuaciones ondulatorias habituales

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2V}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2I}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2I}{\partial t^2}=0,$$

y las ecuaciones (1) toman la forma

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial I}{\partial x} &= C\frac{\partial V}{\partial t}, \\ -\frac{\partial V}{\partial x} &= L\frac{\partial I}{\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Al resolver el problema de la propagación del sonido en una dirección, por ejemplo, al estudiar el movimiento del aire en los tubos, se obtienen las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho\frac{\partial v}{\partial t}, \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\tau}\frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

donde v es la velocidad de las partículas que oscilan, ρ, la densidad, p, la presión, y $\tau = p_0\gamma$, el coeficiente de elasticidad del aire.

La semejanza de las ecuaciones (2) y (3) permite establecer una correspondencia entre las magnitudes acústicas y las eléctricas. A la diferencia de potencial le corresponde la presión, a la corriente, la velocidad de desplazamiento de las partículas. La densidad, que determina las propiedades inerciales del gas, corresponde a la inductancia del circuito eléctrico, y la capacidad de éste corresponde a $\frac{1}{\tau}$, es decir, a la magnitud inversa del coeficiente de elasticidad. La misma correspondencia se puede establecer también partiendo de las expresiones de las energías cinética y potencial para los sistemas eléctrico y acústico.

Volviendo a las ecuaciones (1), podemos introducir los análogos acústicos de la resistencia y de la pérdida. La magnitud de la resistencia acústica debe ser considerada si al estudiar el movimiento de un gas resulta fundamental el rozamiento de éste en las paredes del recipiente. Por analogía con la resistencia eléctrica, que se determina como la razón entre la tensión y la corriente, se puede introducir la resistencia acústica, determinada por la razón entre la presión y la corriente en el medio, que es proporcional a la velocidad de desplazamiento de las partículas del gas, $R_A = \frac{p}{uv}$. En los casos en que se investiga el movimiento de un gas en un medio poroso, hay que introducir una magnitud, análoga a la pérdida en los circuitos eléctricos. Esta magnitud,

que se denota mediante P, se llama porosidad, y se determina por la parte del volumen del material que queda llena de aire.

El análogo mecánico de la ecuación telegráfica es la ecuación de las oscilaciones longitudinales de una barra, la cual, a semejanza con las ecuaciones (2), se puede escribir en la forma

$$-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t}, \quad -\frac{\partial T}{\partial x}=\rho\frac{\partial v}{\partial t},$$

donde T es la tensión de la barra, v, la velocidad de los puntos que vibran, ρ, la densidad y k, el coeficiente de elasticidad de la barra.

Comparando esta ecuación con la (2), podemos establecer una analogía entre las magnitudes eléctricas y mecánicas. Así, estableciendo una correspondencia entre la tensión eléctrica y la tensión de la cuerda, la corriente y la velocidad del movimiento de las partículas, se obtiene que la magnitud inversa del coeficiente de elasticidad corresponde a la capacidad, y la densidad, a la inductancia.

De esta manera, el estudio de los problemas dinámicos semejantes nos lleva a establecer una correspondencia entre una serie de magnitudes eléctricas, acústicas y mecánicas. Esta correspondencia puede ser ilustrada mediante el cuadro siguiente[1]):

	Sistema eléctrico		Sistema acústico		Sistema mecánico	
Variables	Potencial	V	Presión	p	Tensión (fuerza)	T
	Corriente	I	Velocidad de las partículas	v	Velocidad del desplazamiento	$\dot{x}$
	Carga	e	Desplazamiento	u	Desplazamiento	x
Parámetros	Inductancia	L	Inercia (densidad)	ρ	Densidad de masa	ρ_m
	Capacidad	C	Capacidad acústica	$C_A=\frac{1}{\tau}$	Suavidad	$C_M=\frac{1}{k}$
	Resistencia	R	Resistencia acústica	R_A	Resistencia mecánica	R_M

Los razonamientos expuestos más arriba permiten obtener en varios problemas acústicos ciertas nociones sobre el carácter de los fenómenos, sin resolver el problema.

[1]) Véase, por ejemplo, H. F. Olson, *Analogías Dinámicas*, ed. I. L., 1947.

Así, el problema sobre el movimiento del aire en los poros para las ondas armónicas simples se reduce a las ecuaciones[1])

$$-i\omega\rho_m u + ru = -\operatorname{grad} p,$$

$$\Delta p + i\frac{\gamma P\omega}{\rho c^2}(r - i\omega\rho_m)p = 0,$$

donde u es la velocidad de volumen del aire a través de los poros, p, la presión, ρ, la densidad, ρ_m, la densidad efectiva del aire en los poros, que puede ser mayor que ρ, puesto que en los poros pueden oscilar, conjuntamente con el aire, partículas de la sustancia, P, la porosidad, c y ω, la velocidad y la frecuencia del sonido, r, la resistencia a la corriente, que caracteriza la caída de presión en el material. Haciendo $r = R_A$, $\rho_m = L_A$, $\frac{\gamma P}{\rho c^2} = C_A$, obtenemos nuestras ecuaciones en la forma

$$L_A\frac{\partial u}{\partial t} + R_A u = -\operatorname{grad} p, \quad C_A L_A\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + C_A R_A\frac{\partial p}{\partial t} = \Delta p.$$

Estas ecuaciones son totalmente semejantes a las de propagación de las oscilaciones eléctricas en una línea. Por esto, por analogía con la resistencia ondulatoria de la línea,

$$Z = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}},$$

podemos escribir directamente la expresión para la resistencia, llamada impedancia característica del material poroso:

$$Z = c\sqrt{\rho}\sqrt{\frac{\rho_m - i\frac{r}{\omega}}{\gamma P}},$$

considerando aquí $G = 0$. La expresión de la impedancia característica indica la amortiguación de las ondas que se propagan en el material poroso.

La analogía establecida entre los fenómenos eléctricos y acústicos permite sustituir el estudio de varios problemas acústicos por el análisis de los esquemas eléctricos equivalentes. Ultimamente el método de semejanza ha encontrado una gran aplicación en las máquinas de cálculo modeladoras, en las cuales para resolver la ecuación que corresponde a cierto proceso físico, se forma el esquema eléctrico equivalente.

---

[1]) Véase V. V. Furduev, *Electroacústica*, ed. Gostejizdat, 1948.

CAPITULO III

ECUACIONES DE TIPO PARABOLICO

Las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden de tipo parabólico se encuentran con la mayor frecuencia en el estudio de los procesos de conducción del calor y de difusión. La ecuación más sencilla de tipo parabólico

$$u_{xx} - u_y = 0 \quad (y = a^2 t)$$

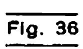
se llama comúnmente *ecuación de la conducción del calor*.

§ 1. PROBLEMAS SIMPLES QUE SE REDUCEN A ECUACIONES DE TIPO PARABOLICO. PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS DE CONTORNO

1. Problema lineal de la propagación del calor. Tomemos una barra homogénea de longitud l, térmicamente aislada por los lados y lo suficientemente fina como para que en cualquier momento de tiempo se pueda considerar la temperatura igual en todos los puntos de un corte transversal. Si se mantienen los extremos de la barra a temperaturas constantes u_1 y u_2 entonces, como es bien conocido, a lo largo de la barra se establece la distribución lineal de temperatura (fig. 36)

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x. \tag{1}$$

En este caso, del extremo más caliente al menos caliente pasará calor. La cantidad de calor que pasa por una sección de la barra de superficie S por la unidad de tiempo, se expresa por la fór-





mula empírica

$$Q = -k\frac{u_2 - u_1}{l}S = -k\frac{\partial u}{\partial x}S, \qquad (2)$$

donde k es el coeficiente de conductividad térmica, que depende del material de la barra.

La magnitud del flujo calorífico se considera positiva, si el calor pasa en dirección del crecimiento de x.

Analicemos el proceso de distribución de la temperatura en la barra. Este proceso puede ser descrito mediante la función $u(x, t)$, que representa la temperatura en el corte x en el momento de tiempo t. Hallemos la ecuación a la que debe satisfacer la función $u(x, t)$. Para esto, formulemos las leyes físicas que determinan los procesos relacionados con la propagación del calor.

1. *Ley de Fourier*. Si la temperatura del cuerpo no es homogénea, en éste aparecen flujos caloríficos, dirigidos desde los lugares de mayor temperatura hasta los lugares de menor temperatura.

La cantidad de calor que pasa por la sección x durante el intervalo de tiempo $(t, t + dt)$, es igual a

$$dQ = qS\,dt, \qquad (3)$$

donde

$$q = -k(x)\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (4)$$

es la densidad del flujo calorífico, igual a la cantidad de calor que pasa en la unidad de tiempo por una superficie de 1 cm^2. Esta ley es una generalización de la fórmula (2). Se le puede dar también la forma integral

$$Q = -S\int_{t_1}^{t_2} k\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\,dt, \qquad (5)$$

donde Q es la cantidad de calor que pasa durante el intervalo de tiempo (t_1, t_2) por la sección x. Si la barra no es homogénea k es una función de x.

2. La cantidad de calor que es necesario dar a un cuerpo homogéneo para elevar su temperatura en Δu, es igual a

$$Q = cm\Delta u = c\rho V\Delta u, \qquad (6)$$

donde c es el calor específico, m, la masa del cuerpo, ρ, su densidad, V, el volumen.

Si la variación de temperatura tiene una magnitud diferente en distintas partes de la barra, o si ésta no es homogénea, entonces

$$Q = \int_{x_1}^{x_2} c\rho S\, \Delta u(x)\, dx. \qquad (7)$$

3. Dentro de la barra puede surgir o absorberse calor (por ejemplo, al pasar corriente, como consecuencia de reacciones químicas, etc.). La emisión de calor se puede caracterizar por la densidad de las fuentes térmicas $F(x, t)$ en el punto x en el momento t[1]). Como resultado de la acción de estas fuentes en el intervalo de la barra $(x, x + dx)$ durante un intervalo de tiempo $(t, t + dt)$ se emitirá una cantidad de calor

$$dQ = SF(x, t)\, dx\, dt, \qquad (8)$$

o, en forma integral,

$$Q = S\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x, t)\, dx\, dt, \qquad (9)$$

donde Q es la cantidad de calor que se emite en el intervalo de la barra (x_1, x_2) durante el tiempo (t_1, t_2).

La ecuación de conducción del calor se obtiene al calcular el balance de calor en cierto segmento (x_1, x_2) durante cierto intervalo de tiempo (t_1, t_2). Aplicando la ley de conservación de la energía y las fórmulas (5), (7) y (9), se puede escribir la igualdad

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)\Big|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x, \tau)\Big|_{x=x_1}\right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau =$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} c\rho\left[u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)\right] d\xi, \qquad (10)$$

que es precisamente la ecuación de la conducción del calor en forma integral.

---

[1]) Si, por ejemplo, el calor se desprende como resultado del paso de una corriente eléctrica de intensidad I por la barra, cuya resistencia por unidad de longitud es igual a R, entonces $F = 0{,}24 \cdot I^2R$.

Para obtener la ecuación de la conducción del calor en forma diferencial, supongamos que la función $u(x, t)$ posee las derivadas continuas u_{xx} y u_t[1]).

Aplicando el teorema del valor medio, se obtiene la igualdad

$$\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_2} - k\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau)\Big|_{x=x_1}\right]_{\tau=t_3} \Delta t + F(x_4, t_4)\,\Delta x\,\Delta t =$$
$$= \{c\rho\,[u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)]\}_{\xi=x_3}\,\Delta x, \quad (11)$$

la cual, en virtud del teorema del valor medio, se puede transformar como sigue

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right]_{\substack{x=x_5\\ t=t_3}} \Delta t\,\Delta x + F(x_4, t_4)\,\Delta x\,\Delta t =$$
$$= \left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right]_{\substack{x=x_3\\ t=t_5}} \Delta x\,\Delta t, \quad (12)$$

donde t_3, t_4, t_5 y x_3, x_4, x_5 son puntos intermedios de los intervalos (t_1, t_2) y (x_1, x_2).

De aquí, después de simplificar entre el producto $\Delta x\Delta t$, se halla:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\substack{x=x_5\\ t=t_3}} + F(x, t)\Big|_{\substack{x=x_4\\ t=t_4}} = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\substack{t=t_5\\ x=x_3}}. \quad (13)$$

Todos estos razonamientos son aplicables a intervalos cualesquiera (x_1, x_2) y (t_1, t_2). Pasando al límite cuando $x_1, x_2 \to x$ y $t_1, t_2 \to t$, se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x, t) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}, \quad (14)$$

que se llama *ecuación de la conducción del calor*.

Consideremos ciertos casos particulares.

1. Si la barra es homogénea, entonces k, c, ρ se pueden considerar constantes, y la ecuación se escribe comúnmente en la forma

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \qquad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{c\rho},$$

---

[1]) Al pedir que la función $u(x, t)$ sea derivable podemos perder varias soluciones posibles, que satisfagan a la ecuación integral y no a la diferencial. Sin embargo, en el caso de las ecuaciones de conducción del calor, al pedir que la solución sea derivable, de hecho no perdemos soluciones posibles, puesto que se puede demostrar que si una función satisface a la ecuación (10), ésta debe ser forzosamente derivable.

donde a^2 es una constante, llamada *coeficiente de conductividad de temperatura*. Si no hay fuentes de calor, es decir, si $F(x, t) = 0$, la ecuación de la conducción del calor toma la forma sencilla

$$u_t = a^2 u_{xx}. \tag{14'}$$

2. La densidad de las fuentes de calor puede depender de la temperatura. En el caso de un intercambio térmico con el medio, que se someta a la *ley de Newton*, la cantidad de calor que pierde la barra[1]), calculada en las unidades de longitud y tiempo, es igual a

$$F_0 = h(u - \theta),$$

donde $\theta(x, t)$ es la temperatura del medio, h, el *coeficiente de intercambio térmico*. De esta manera, la densidad de las fuentes caloríficas en el punto x en el momento t es igual a

$$F = F_1(x, t) - h(u - \theta), \tag{15}$$

donde $F_1(x, t)$ es la densidad de las otras fuentes de calor.

Si la barra es homogénea, la ecuación de la conducción del calor con intercambio térmico lateral tiene la forma siguiente:

$$u_t = a^2 u_{xx} - \alpha u + f(x, t),$$

donde $\alpha = \frac{h}{c\rho}$, $f(x, t) = \alpha\theta(x, t) + \frac{F_1(x, t)}{c\rho}$ es una función conocida.

3. Los coeficientes k y c, por regla general, son funciones de la temperatura de variación lenta. Por esto, la suposición hecha sobre la constancia de estos coeficientes es posible sólo con la condición de que se tomen intervalos pequeños de variación de temperatura. El estudio de los procesos térmicos en un gran intervalo de variación de temperaturas nos lleva a la ecuación cuasilineal de la conducción del calor, que se escribe en la forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u, x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x, t) = C(u, x)\rho(u, x)\frac{\partial u}{\partial t}$$

para un medio no homogéneo (véase el apéndice III).

2. Ecuación de la difusión. Si el medio está lleno de gas de modo no uniforme, tiene lugar la difusión de éste de los lugares de mayor concentración a los de menor concentración. Este mismo fenómeno tiene lugar en las soluciones, si la concentración de la sustancia diluida en el volumen no es constante.

---

[1]) Como en nuestra aproximación no se tiene en cuenta la distribución de la temperatura por la sección, la acción de las fuentes superficiales es equivalente a la acción de las fuentes tridimensionales de calor.

Analicemos el proceso de difusión en un tubo vacío, o en un tubo lleno de un medio poroso, suponiendo que en todo momento de tiempo la concentración del gas (de la solución) es igual en cada sección. Entonces, el proceso de difusión puede ser descrito mediante la función $u(x, t)$, que representa la *concentración* en el corte x en el momento de tiempo t.

Según la *ley de Nernst*, la masa de gas que pasa por la sección x durante el intervalo de tiempo $(t, t+\Delta t)$ es igual a

$$dQ = -D\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\,S\,dt = WS\,dt,$$

$$W = -D\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{16}$$

donde D es el coeficiente de difusión, S, la superficie del corte del tubo, $W(x, t)$, la densidad del flujo de difusión, igual a la masa de gas que pasa en la unidad de tiempo por la unidad de superficie.

Por definición de concentración, la cantidad de gas en el volumen V es igual a

$$Q = uV;$$

de aquí se obtiene que la variación de masa del gas en el segmento del tubo (x_1, x_2), al variar la concentración en Δu, es igual a

$$\Delta Q = \int_{x_1}^{x_2} c(x)\,\Delta u\cdot S\,dx,$$

donde $c(x)$ es el *coeficiente de porosidad*[1]).

Escribamos la ecuación de balance de la masa del gas en el segmento (x_1, x_2) durante un intervalo de tiempo (t_1, t_2):

$$S\int_{t_1}^{t_2}\left[D(x_2)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau) - D(x_1)\frac{\partial u}{\partial x}(x_2, \tau)\right]d\tau =$$

$$= S\int_{x_1}^{x_2} c(\xi)\left[u(\xi, t_2) - u(\xi, t_1)\right]d\xi.$$

De aquí, de manera semejante al p. 1, se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) = c\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{17}$$

que es la *ecuación de la difusión*. Esta es totalmente análoga a la ecuación de conducción del calor. Al deducir esta ecuación, hemos

---

[1]) Se llama coeficiente de porosidad a la relación entre el volumen de los poros y el volumen total V_0, igual, en nuestro caso, a $S\,dx$.

considerado que en el tubo no hay fuentes de sustancia, y que no hay difusión a través de las paredes del tubo. La consideración de estos fenómenos conduce a ecuaciones similares a las (14) y (15) (véase el cap. VI, § 2, p. 3).

Si el coeficiente de difusión es constante, la ecuación de la difusión adquiere la forma

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

donde

$$a^2 = \frac{D}{c}.$$

Si el coeficiente de porosidad es $c = 1$, y el de difusión es constante, la ecuación de la difusión tiene la forma

$$u_t = D\, u_{xx}.$$

3. **Propagación del calor en el espacio.** El proceso de propagación del calor en el espacio puede ser caracterizado por la temperatura $u(x, y, z, t)$, que es función de x, y, z y t.

Si la temperatura no es constante, surgen flujos térmicos, dirigidos con los lugares de mayor temperatura hasta los de menor temperatura.

Sea $d\sigma$ cierto elemento de superficie en el punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ con normal n. La cantidad de calor que pasa por $d\sigma$ en la unidad de tiempo, según la ley de Fourier, es igual a

$$W_n\, d\sigma = (Wn)\, d\sigma = -k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma,$$

donde k es el coeficiente de conductividad térmica, $\frac{\partial u}{\partial n}$, la derivada en la dirección de la normal n hacia $d\sigma$, igual a

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(n, z) = (\operatorname{grad} u, n).$$

La ley de Fourier se escribe a menudo en la forma

$$W = -k \operatorname{grad} u,$$

donde W es el vector de densidad del flujo térmico.

Si el medio es isótropo, k es un escalar. En el caso de un medio anisótropo, k es un tensor, y el vector del flujo térmico W es el producto del tensor k por el vector $-\operatorname{grad} u$. Nosotros estudiaremos solamente medios isótropos.

Pasemos a la deducción de la ecuación de conducción del calor en el espacio.

Tomemos cierto volumen V, delimitado por la superficie S. La ecuación del balance de calor para el volumen V durante el tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ tiene la forma:

$$\iiint_V c\rho [u(P, t_2) - u(P, t_1)]\, dV_P = \\ = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S W_n\, d\sigma + \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\iiint_V F(P, t)\, dV_P\right), \quad (18)$$

donde $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ es el punto de integración, $dV_P = d\zeta\, d\eta\, d\xi$, el elemento de volumen, $c\rho$, la capacidad calorífica de la unidad de volumen, W_n, la componente normal de la densidad del flujo térmico. Esta ecuación expresa la ley de conservación del calor en el volumen V durante el tiempo Δt: la variación de la cantidad de calor en el volumen V durante el tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ (primer miembro de (18)) es causado por el flujo térmico a través de la superficie de frontera S (primer sumando del segundo miembro de la igualdad (18)), así como también por la cantidad de calor que se desprende en el volumen V durante el tiempo Δt, como resultado de la acción de las fuentes de calor.

Para pasar de la ecuación integral del balance a la ecuación diferencial, supongamos que $u(M, t) = u(x, y, z, t)$ tiene derivadas segundas con respecto a x, y, z, y derivada primera con respecto a t, y que estas derivadas son continuas en la región considerada. Entonces se puede aplicar la fórmula de Ostrogradski

$$\iint_S W_n\, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} W\, dV$$

y transformar la ecuación del balance a la forma

$$\iiint_V c\rho [u(P, t_2) - u(P, t_1)]\, dV_P = \\ = -\int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \operatorname{div} W\, dV_P\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V F(P, t)\, dV_P\, dt.$$

(Supondremos que $F(P, t)$ es una función continua de sus argumentos.) Aplicando el teorema del valor medio y el teorema del incremento finito para las integrales y para las funciones de varias variables, se obtiene:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\substack{t=t_3\\ P=P_1}} \Delta t \cdot V = -\operatorname{div} W\Big|_{\substack{t=t_4\\ P=P_2}} \Delta t \cdot V + F\Big|_{\substack{t=t_5\\ P=P_3}} \Delta t \cdot V,$$

donde t_3, t_4, t_5 son puntos intermedios en el intervalo Δt, y P_1, P_2, P_3, puntos en el volumen V. Fijemos cierto punto $M(x, y, z)$

dentro de V, y haremos tender V a este punto, y Δt, a cero. Después de simplificar entre $\Delta t\, V$ y de efectuar el paso al límite indicado, se obtiene:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) = -\operatorname{div} W(x, y, z, t) + F(x, y, z, t).$$

Sustituyendo W por la fórmula $W = -k \operatorname{grad} u$, se obtiene la ecuación diferencial de la conducción del calor

$$c\rho u_t = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F,$$

o bien

$$c\rho u_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial u}{\partial z}\right) + F.$$

Si el medio es homogéneo, esta ecuación se escribe habitualmente en la forma

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + \frac{F}{c\rho},$$

donde $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ es el coeficiente de conductividad de temperatura, o bien

$$u_t = a^2 \Delta u + f \quad \left(f = \frac{F}{c\rho}\right),$$

donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ es el operador de Laplace.

4. Planteamiento de los problemas de contorno. Para obtener una solución única de la ecuación de conducción del calor, es necesario agregar a ésta condiciones iniciales y de frontera.

La condición inicial, a diferencia de la ecuación de tipo hiperbólico, consiste sólo en la determinación de los valores de la función $u(x, t)$ en el momento inicial t_0.

Las condiciones de frontera pueden ser diferentes, según el régimen de temperatura en las fronteras. Se estudian tres tipos fundamentales de condiciones de frontera.

1. En el extremo de la barra $x = 0$ se da la temperatura

$$u(0, t) = \mu(t),$$

donde $\mu(t)$ es una función dada en cierto segmento $t_0 \leqslant t \leqslant T$, siendo T el intervalo de tiempo durante el cual se estudia el proceso.

2. En el extremo $x = l$ se da el valor de la derivada

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,\ t) = \nu(t).$$

A esta condición se llega si está dada la magnitud del flujo térmico $Q(l,\ t)$ que pasa por la sección del extremo de la barra,

$$Q(l,\ t) = -k\frac{\partial u}{\partial x}(l,\ t),$$

de donde $\frac{\partial x}{\partial u}(l,\ t) = \nu(t)$, siendo $\nu(t)$ una función conocida, que se expresa mediante el flujo dado $Q(l,\ t)$ por la fórmula

$$\nu(t) = -\frac{Q(l,\ t)}{k}.$$

3. En el extremo $x = l$ está dada una relación lineal entre la derivada y la función:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,\ t) = -\lambda[u(l,\ t) - \theta(t)].$$

Esta condición de frontera corresponde a un intercambio térmico de acuerdo con la ley de Newton en la superficie del cuerpo con el medio ambiente, cuya temperatura θ es conocida. Utilizando las dos expresiones del flujo térmico que sale por el corte $x = l$,

$$Q = h(u - \theta)$$

y

$$Q = -k\frac{\partial u}{\partial x},$$

se obtiene el enunciado matemático de la tercera condición de frontera en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,\ t) = -\lambda[u(l,\ t) - \theta(t)],$$

donde $\lambda = \frac{h}{k}$ es el coeficiente de intercambio térmico, $\theta(t)$, cierta función dada. Para el extremo $x = 0$ de la barra $(0,\ l)$, la tercera condición de frontera tiene la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) = \lambda[u(0,\ t) - \theta(t)].$$

Las condiciones de frontera para $x = 0$ y $x = l$ pueden ser de diferentes tipos, de modo que el número de problemas distintos es grande.

El primer problema de contorno consiste en hallar la solución $u = u(x, t)$ de la ecuación de la conducción del calor

$$u_t = a^2 u_{xx} \text{ para } 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T,$$

que satisface a las condiciones

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l,$$
$$u(0, t) = \mu_1(t), \; u(l, t) = \mu_2(t), \; 0 \leqslant t \leqslant T,$$

donde $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$ y $\mu_2(t)$ son funciones dadas.

Análogamente se plantean los otros problemas de contorno con distintas combinaciones de condiciones de contorno para $x = 0$ y $x = l$. Son posibles condiciones de contorno de tipo más complejo que las que fueron consideradas más arriba.

Supongamos, por ejemplo, que en el extremo $x = 0$ de la barra se ha situado una capacidad calorífica concentrada C_1 (por ejemplo, un cuerpo con gran conductividad térmica, a consecuencia de lo cual la temperatura por todo el volumen de este cuerpo se puede considerar constante) y que tiene lugar un intercambio de calor con el medio exterior de acuerdo con la ley de Newton. Entonces la condición de contorno para $x = 0$ (que expresa la ecuación del balance térmico) tendrá la forma

$$C_1 \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_0),$$

siendo u_0 la temperatura del medio exterior. Esta condición contiene a la derivada $\frac{\partial u}{\partial t}$ (ó $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, si se tiene en cuenta la ecuación $u_t = a^2 u_{xx}$).

Si el medio no es homogéneo, y los coeficientes de la ecuación son funciones discontinuas, el intervalo $(0, l)$, en el cual se busca la solución del problema, se divide por los puntos de discontinuidad de los coeficientes en varias partes, dentro de las cuales la función u satisface a la ecuación de conducción del calor, y en las fronteras, a las condiciones de conjunción.

En el caso más simple, estas condiciones consisten en la continuidad de la temperatura y del flujo térmico:

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t),$$
$$k(x_i - 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i - 0, t) = k(x_i + 0) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i + 0, t),$$

donde x_i son los puntos de discontinuidad de los coeficientes.

Además de los problemas citados aquí, a menudo se encuentran los casos límite. Consideremos el proceso de conducción del calor en una barra muy larga. Durante un pequeño intervalo de tiempo, la influencia del régimen térmico dado en la frontera influye

muy débilmente en la parte central de la barra, y la temperatur en este intervalo se determina fundamentalmente sólo por l distribución inicial de la temperatura. En este caso, el cálcul exacto de la longitud de la barra no tiene significación puesto que la variación de su longitud no influirá fundamental mente en la temperatura del intervalo que nos interesa; en pro blemas de este tipo comúnmente se considera que la barra pose longitud infinita. De este modo, se plantea el *problema con condi ciones iniciales* (*problema de Cauchy*) *sobre la distribución de l temperatura en la recta infinita*:

hallar la solución de la ecuación de conducción del calor en l región $-\infty < x < \infty$ **y** $t \geqslant t_0$, **que satisfaga a la condición**

$$u(x, t_0) = \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

donde $\varphi(x)$ **es una función dada.**

Análogamente, si el segmento de barra, cuya temperatura nos interesa, se halla cerca de un extremo y lejos del otro, en este caso la temperatura prácticamente se determina por el régimen térmico del extremo próximo, y por las condiciones iniciales. En problemas de este tipo, generalmente se considera que la barra es semiinfinita, y que la coordenada, contada a partir del extremo, varía entre los límites $0 \leqslant x < \infty$. Formulemos, en calidad de ejemplo, el *primer problema de contorno para la barra semiinfinita*:

hallar la solución de la ecuación de conducción del calor en la región $0 < x < \infty$ **y** $t_0 \leqslant t$, **que satisfaga a las condiciones**

$$\left.\begin{array}{ll} u(x, t_0) = \varphi(x) & (0 < x < \infty), \\ u(0, t) = \mu(t) & (t \geqslant t_0), \end{array}\right\}$$

donde $\varphi(x)$ **y** $\mu(t)$ **son funciones dadas.**

Los problemas que acabamos de exponer son casos límite (*degeneraciones*) de los problemas de contorno fundamentales. También son posibles los casos límite del problema fundamental de otro tipo, cuando se desprecia el cálculo exacto de las condiciones iniciales. La influencia de las condiciones iniciales en la propagación de la temperatura por la barra se debilita con el transcurso del tiempo. Si el momento que nos interesa está suficientemente alejado del inicial, la temperatura de la barra se determina prácticamente por las condiciones de frontera, puesto que la variación de las condiciones iniciales no cambiaría el estado térmico de la barra en los límites de la exactitud de la observación. En este caso se puede considerar, prácticamente, que el experimento se prolongó un tiempo infinitamente largo, y que por esto las condiciones iniciales no influyen.

De este modo, se obtienen los *problemas de contorno sin condiciones iniciales*, cuando se busca la solución de la ecuación de

la conducción del calor para $0 \leqslant x \leqslant l$ y $-\infty < t$, que satisface a las condiciones

$$u(0, t) = \mu_1(t),$$
$$u(l, t) = \mu_2(t).$$

Según el carácter del régimen de frontera, también son posibles otros tipos de problemas sin condiciones iniciales.

Es muy importante el problema sin condiciones iniciales para la barra semiinfinita ($l = \infty$), cuando se pide hallar la solución de la ecuación de conducción del calor para $0 < x < \infty$, $t > -\infty$, que satisfaga a la condición

$$u(0, t) = \mu(t),$$

donde $\mu(t)$ es una función dada.

Con mayor frecuencia se encuentran los problemas sin condiciones iniciales con un régimen periódico de frontera:

$$\mu(t) = A \cos \omega t$$

(véase el apéndice I del cap. III).

Es natural considerar que al pasar un gran intervalo de tiempo, la temperatura de la barra prácticamente también varía según una ley periódica con la misma frecuencia. Sin embargo, si queremos considerar exactamente las condiciones iniciales formalmente no obtendremos nunca una solución periódica, puesto que la influencia de dichas condiciones, si bien se debilitará con el transcurso del tiempo, nunca se anulará; teniendo en cuenta los errores de las mediciones, no tiene sentido considerar esta influencia. Examinando la solución periódica, despreciamos la influencia de los datos iniciales.

El planteamiento de los problemas de contorno, expuesto más arriba, se refiere, claro está, no sólo a la ecuación con coeficientes constantes. Por «ecuación de la conducción del calor» se podría interpretar cualquiera de las ecuaciones de los puntos precedentes.

Además de los problemas de contorno lineales que acabamos de exponer, se plantean también problemas con condiciones de frontera no lineales, por ejemplo, del tipo

$$k \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \sigma [u^4(0, t) - \theta^4(0, t)].$$

Esta condición de frontera corresponde a una irradiación de acuerdo con la ley de Stephan-Boltzmann por el extremo $x = 0$ hacia un medio con temperatura $\theta(t)$.

Detengámonos con más detalle en el planteo de los problemas de contorno. Consideremos el primer problema de contorno para una región acotada.

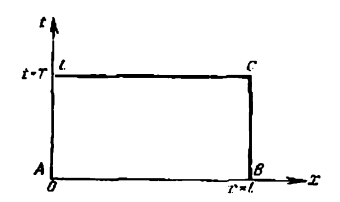


Fig. 37

Llamaremos *solución del primer problema de contorno*, a una función $u(x, t)$ que tenga las siguientes propiedades:

1) $u(x, t)$ está determinada y es continua en la región cerrada

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad t_0 \leqslant t \leqslant T;$$

2) $u(x, t)$ satisface a la ecuación de conducción del calor en la región abierta

$$0 < x < l, \quad t_0 < t;$$

3) $u(x, t)$ satisface a la condición inicial y a las de frontera, es decir,

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

donde $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ son funciones continuas, que satisfacen a las condiciones de conjunción

$$\varphi(0) = \mu_1(t_0) \quad [= u(0, t_0)]$$

y

$$\varphi(l) = \mu_2(t_0) \quad [= u(l, t_0)],$$

necesarias para la continuidad de $u(x, t)$ en la región cerrada.

Consideremos el plano de los estados de fases (x, t) (fig. 37). En nuestro problema, se busca una función $u(x, t)$, determinada dentro del rectángulo $ABCD$. Esta región se determina por el propio planteo del problema, puesto que se estudia el proceso de propagación del calor en la barra $0 \leqslant x \leqslant l$ durante el intervalo de tiempo $t_0 \leqslant t \leqslant T$, en el cual conocemos el régimen térmico en los extremos. Sea $t_0 = 0$; supondremos que $u(x, t)$ satisface a la ecuación sólo para $0 < x < l$, $0 < t \leqslant T$, pero no para $t = 0$ (lado AB), ni tampoco para $x = 0$, $x = l$ (lados AD y BC), donde los valores de esta función se dan directamente por las condiciones iniciales y de frontera. Si exigiésemos que la ecuación se satisfaciera, por ejemplo, para $t = 0$, con esto habríamos exigido la existencia de la derivada $\varphi'' = u_{xx}(x, 0)$, que figura en la ecuación. Con esta exigencia limitaríamos el campo

de fenómenos físicos que estudiamos, excluyendo de la consideración las funciones, para los cuales esta condición no se cumple. La condición 3), sin la hipótesis de continuidad de $u(x, t)$ en la región $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (es decir, en el rectángulo cerrado $ABCD$) u otra condición, que sustituya a esta hipótesis, pierde el sentido[1]). En efecto, consideremos la función $v(x, t)$, definida de la siguiente manera:

$$v(x, t) = C \qquad (0 < x < l, \ 0 < t \leqslant T),$$
$$v(x, 0) = \varphi(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l),$$
$$\left.\begin{aligned} v(0, t) &= \mu_1(t), \\ v(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

donde C es una constante arbitraria. La función $v(x, t)$ satisface, evidentemente, a la condición 2), así como también a las condiciones de frontera. Sin embargo, esta función no representa el proceso de propagación de la temperatura en una barra con temperatura inicial $\varphi(x) \neq C$ y temperaturas de frontera $\mu_1(t) \neq C$ y $\mu_2(t) \neq C$, puesto que es discontinua para $t = 0$, $x = 0$, $x = l$.

La continuidad de la función $u(x, t)$ para $0 < x < l$, $0 < t < T$ se deduce de que esta función satisface a la ecuación. De este modo, la exigencia de que $u(x, t)$ sea continua para $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ se refiere, en esencia, sólo a los puntos donde se dan los valores iniciales y los de frontera. En lo sucesivo, por «solución de la ecuación que satisface a las condiciones de frontera» se sobreentenderá una función que satisfaga a las condiciones 1), 2), 3), sin especificar cada vez estas condiciones, siempre que no haya necesidad especial de hacerlo.

Análogamente se plantean otros problemas de contorno, entre ellos, los problemas en una barra infinita y los problemas sin condiciones iniciales.

Para los problemas con varias variables geométricas independientes, se mantiene todo lo expuesto más arriba. En estos problemas, para $t = t_0$ se da la temperatura inicial, y en la superficie del cuerpo, las condiciones de frontera. Se pueden considerar también problemas para una región infinita.

Con respecto a cada uno de los problemas planteados, surgen las siguientes cuestiones[2]):

1) unicidad de la solución del problema planteado,

---

[1]) Más abajo se estudiarán problemas de contorno con condiciones de frontera o iniciales discontinuas. Para estos problemas se precisará en qué sentido se entiende el cumplimiento de las condiciones de frontera.

[2]) Compárese con el cap. II, § 2.

2) existencia de la solución,

3) dependencia continua de la solución de las condiciones complementarias.

Si el problema planteado tiene varias soluciones, las palabras «solución del problema» no tienen un sentido determinado. Por esto, antes de hablar de la solución de un problema, es necesario demostrar su unicidad. En la práctica, el problema más importante es el 2), puesto que al demostrar la existencia de la solución se da, por lo general, un método para su cálculo.

Como ya fue indicado antes (véase el capítulo II, § 2, p. 3), un proceso se llama físicamente determinado, si cuando las condiciones iniciales y las de frontera del problema cambian poco, su solución también varía poco. En lo sucesivo, demostraremos que el proceso de propagación del calor se determina físicamente por sus condiciones iniciales y de frontera, es decir, una pequeña variación de estas condiciones cambia poco la propia solución.

5. Principio del valor máximo. En lo sucesivo consideraremos la ecuación con coeficientes constantes

$$v_t = a^2 v_{xx} + \beta v_x + \gamma v.$$

Como hemos visto, esta ecuación se reduce, mediante el cambio

$$v = e^{\mu x + \lambda t} \cdot u \quad \text{para} \quad \mu = -\frac{\beta}{2a^2}, \quad \lambda = \gamma - \frac{\beta^2}{4a^2},$$

a la forma

$$u_t = a^2 u_{xx}.$$

Demostremos la siguiente propiedad de esta ecuación, que llamaremos *principio del valor máximo*.

Si una función $u(x, t)$, determinada y continua en la región cerrada $0 \leqslant t \leqslant T$ y $0 \leqslant x \leqslant l$, satisface a la ecuación de la conducción del calor

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{19}$$

en los puntos de la región $0 < x < l$, $0 < t \leqslant T$, los valores máximo y mínimo de la función $u(x, t)$ se alcanzan o bien en el momento inicial, o bien en los puntos de la frontera $x = 0$ ó $x = l$.

La función $u(x, t) = \text{const}$ satisface, evidentemente, a la ecuación de la conducción del calor, y alcanza su valor máximo (mínimo) en cualquier punto. Sin embargo, esto no contradice al teorema, puesto que de su condición se deduce que si el valor máximo (mínimo) se alcanza dentro de la región, éste también (y no solamente) se debe alcanzar o bien para $t = 0$, o bien para $x = 0$, ó para $x = l$.

El sentido físico de este teorema es evidente: si la temperatura en la frontera y en el momento inicial no supera cierto valor M, entonces, si no hay fuentes de calor dentro del cuerpo, no se puede crear una temperatura mayor que M. Detengámonos primeramente en la demostración del teorema para el valor máximo.

La demostración se lleva a cabo por el método de reducción al absurdo. Denotemos por M el valor máximo de $u(x, t)$ para $t = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, o para $x = 0$, o bien para $x = l$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$[1]) y supongamos que en cierto punto (x_0, t_0) $(0 < x_0 < l,\ 0 < t_0 \leqslant T)$ la función $u(x, t)$ alcanza su valor máximo, igual a

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

Comparemos los signos de ambos miembros de la ecuación (19) en el punto (x_0, t_0). Como en este punto la función alcanza su valor máximo, necesariamente debe ser

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, t_0) \leqslant 0\ ^2). \tag{20}$$

Continuando, como $u(x_0, t)$ alcanza su valor máximo para $t = t_0$, entonces[3])

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) \geqslant 0. \tag{21}$$

---

[1]) Si no se supone la continuidad de la función $u(x, t)$ en la región cerrada $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, ésta podría no alcanzar su máximo en ningún punto, y los razonamientos ulteriores no serían aplicables. En virtud del teorema de que cada función continua alcanza su valor máximo en una región cerrada, podemos estar seguros de que: 1) la función $u(x, t)$ alcanza su valor máximo en la frontera inferior o en las laterales del rectángulo, que denotaremos por M; 2) si $u(x, t)$ es mayor que M por lo menos en un punto, existe un punto (x_0, t_0), en el cual $u(x, t)$ alcanza su valor máximo, que supera a M:

$$u(x_0, t_0) = M + \varepsilon \ (\varepsilon > 0),$$

siendo, además,

$$0 < x_0 < l, \ 0 < t_0 \leqslant T.$$

[2]) En efecto, como es conocido del análisis matemático, las condiciones suficientes para que la función $f(x)$ tenga un mínimo relativo en un punto x_0, situado en el interior del intervalo $(0, l)$ son las siguientes: $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0$, $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} > 0$. De este modo, si $f(x)$ tiene en el punto x_0 su valor máximo, entonces 1) $f'(x_0) = 0$ y 2) no puede ser $f''(x_0) > 0$, es decir, debe ser $f''(x_0) \leqslant 0$.

[3]) Está claro, además, que si $t_0 < T$, entonces $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$; si, en cambio $t_0 = T$, entonces $\frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0$.

Comparando los signos de ambos miembros de la ecuación (19), se observa que éstos son diferentes. Sin embargo, este razonamiento aún no demuestra el teorema, puesto que ambos miembros pueden ser iguales a cero, lo cual no implica ninguna contradicción. Hemos efectuado este razonamiento para que quede clara la idea de la demostración. Para efectuar la demostración completa, hallemos un punto (x_1, t_1), en el cual $\frac{d^2u}{dx^2} \leqslant 0$ y $\frac{du}{dt} > 0$. Para esto, tomemos la función auxiliar

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t), \tag{22}$$

donde k es cierto número constante. Es evidente que

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$$

y

$$k(t_0 - t) \leqslant kT.$$

Tomemos $k > 0$ de forma tal que kT sea menor que $\frac{\varepsilon}{2}$, es decir, $k < \frac{\varepsilon}{2T}$; entonces, el valor máximo de $v(x, t)$ para $t = 0$, o bien para $x = 0$, $x = l$ no superará a $M + \frac{\varepsilon}{2}$, es decir,

$$v(x, t) \leqslant M + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{para } t = 0, \text{ ó } x = 0, \text{ ó } x = l), \tag{23}$$

puesto que para estos argumentos el primer sumando de la fórmula (22) no supera a M, y el segundo, a $\frac{\varepsilon}{2}$.

En virtud de la continuidad de la función $v(x, t)$, ésta debe alcanzar su valor máximo en cierto punto (x_1, t_1). Es evidente que

$$v(x_1, t_1) \geqslant v(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

Por esto, $t_1 > 0$ y $0 < x_1 < l$, puesto que para $t = 0$ ó $x = 0$, $x = l$, tiene lugar la desigualdad (23). En el punto (x_1, t_1), por analogía a (20) y (21), debe ser $v_{xx}(x_1, t_1) \leqslant 0$, $v_t(x_1, t_1) \geqslant 0$. Teniendo en cuenta (22), se halla:

$$u_{xx}(x_1, t_1) = v_{xx}(x_1, t_1) \leqslant 0,$$
$$u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + k \geqslant k > 0.$$

De aquí se deduce que

$$u_t(x_1, t_1) - a^2 u_{xx}(x_1, t_1) \geqslant k > 0,$$

es decir, la ecuación (19) no se satisface en el punto interior (x_1, t_1). Con esto queda demostrado que la solución $u(x, t)$ de la ecuación

de la conducción del calor (19), dentro de la región, no puede tomar valores que superen al valor máximo de $u(x, t)$ en la frontera (es decir, para $t = 0$, $x = 0$, $x = l$).

Análogamente se puede demostrar también la segunda parte del teorema, sobre el valor mínimo. Aunque esto no tiene por qué demostrarse por separado, puesto que la función $u_1 = -u$ tiene su valor máximo en donde u tiene el mínimo.

Ahora estableceremos varios corolarios del principio del valor máximo. Ante todo, demostremos el teorema de unicidad para el primer problema de contorno.

6. **Teorema de unicidad.** *Si dos funciones* $u_1(x, t)$ *y* $u_2(x, t)$, *definidas y continuas en la región* $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, *satisfacen a la ecuación de conducción del calor*

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (\text{para } 0 < x < l, \ t > 0) \tag{24}$$

y a iguales condiciones iniciales y de frontera

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= u_2(x, 0) = \varphi(x), \\ u_1(0, t) &= u_2(0, t) = \mu_1(t), \\ u_1(l, t) &= u_2(l, t) = \mu_2(t), \end{aligned}$$

entonces $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$[1]).

Para demostrar este teorema, tomemos la función

$$v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t).$$

Como las funciones $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ son continuas para

$$0 \leqslant x \leqslant l,$$
$$0 \leqslant t \leqslant T,$$

entonces también la función $v(x, t)$, igual a su diferencia, será continua en la misma región. Como la diferencia de dos soluciones de la ecuación de la conducción del calor en la región $0 < x < l$, $t > 0$, la función $v(x, t)$ es también solución de la ecuación de la conducción del calor en dicha región. De este modo, se puede aplicar el principio del valor máximo a esta función, es decir, ésta alcanza sus valores máximo y mínimo o bien para $t = 0$, o bien para $x = 0$, ó $x = l$. Sin embargo, por hipótesis se tiene:

$$v(x, 0) = 0, \quad v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

Por esto,

$$v(x, t) \equiv 0,$$

[1]) En el p. 3 del § 2 este teorema será reforzado, quitándose la condición de continuidad para $t = 0$.

es decir,

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

De aquí se deduce que la solución del primer problema de contorno es única.

Demostremos además varios corolarios directos del principio del valor máximo. En lo sucesivo diremos simplemente «solución de la ecuación de la conducción del calor», en lugar de enumerar con más detalle las propiedades de las funciones, que satisfacen, además, a las condiciones iniciales y de frontera.

1. Si dos soluciones de la ecuación de la conducción del calor $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ satisfacen a las condiciones

$$u_1(x, 0) \leqslant u_2(x, 0),$$
$$u_1(0, t) \leqslant u_2(0, t), \quad u_1(l, t) \leqslant u_2(l, t),$$

entonces

$$u_1(x, t) \leqslant u_2(x, t)$$

para todos los valores de $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

En efecto, la diferencia $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ satisface a las hipótesis del principio del valor máximo y, además,

$$v(x, 0) \geqslant 0, \quad v(0, t) \geqslant 0, \quad v(l, t) \geqslant 0.$$

Por esto,

$$v(x, t) \geqslant 0 \quad \text{para} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T,$$

puesto que si no la función $v(x, t)$ tendría un valor mínimo negativo en la región

$$0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T.$$

2. Si tres soluciones de la ecuación de la conducción del calor

$$u(x, t), \quad \underline{u}(x, t), \quad \bar{u}(x, t)$$

satisfacen a las condiciones

$$\underline{u}(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant \bar{u}(x, t) \quad \text{para} \quad t = 0, \ x = 0 \ \text{y} \ x = l,$$

entonces estas mismas desigualdades se cumplen idénticamente, es decir, para todo x y t en $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Este enunciado es una aplicación del corolario 1 a las funciones

$$u(x, t), \ \bar{u}(x, t) \quad \text{y} \quad u(x, t), \ \underline{u}(x, t).$$

3. Si para dos soluciones de la ecuación de la conducción del calor $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ tiene lugar la desigualdad

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant \varepsilon \ \text{para} \ t = 0, \ x = 0, \ x = l,$$

entonces

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant \varepsilon$$

idénticamente, es decir, tiene lugar para todo x y t en

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Esta afirmación se desprende del corolario 2, si se aplica a las soluciones de la ecuación de la conducción del calor

$$\begin{aligned} &\underline{u}(x, t) = -\varepsilon, \\ &u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t), \\ &\bar{u}(x, t) = \varepsilon. \end{aligned}$$

El corolario 3 permite establecer la dependencia continua de la solución del primer problema de contorno de los valores inicial y de frontera. Si se toma en cierto problema físico, en lugar de la solución de la ecuación de la conducción del calor que corresponde a las condiciones inicial y de frontera

$$u(x, 0) = \varphi(x), \; u(0, t) = \mu_1(t), \; u(l, t) = \mu_2(t),$$

la solución $u_1(x, t)$ correspondiente a otros valores inicial y de frontera, determinados por las funciones $\varphi^*(x)$, $\mu_1^*(t)$, $\mu_2^*(t)$, que no se diferencian, en los límites de la exactitud dada ε, de las funciones $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$:

$$|\varphi(x) - \varphi^*(x)| \leqslant \varepsilon, \quad |\mu_1(t) - \mu_1^*(t)| \leqslant \varepsilon,$$
$$|\mu_2(t) - \mu_2^*(t)| \leqslant \varepsilon,$$

entonces la función $u_1(x, t)$ se diferenciará de la $u(x, t)$ en los límites de la misma exactitud ε:

$$|u(x, t) - u_1(x, t)| \leqslant \varepsilon.$$

En esto consiste, precisamente, el principio de la determinación física del problema.

Hemos efectuado el estudio detallado del problema sobre la unicidad y la determinación física del problema en el ejemplo del primer problema de contorno para un segmento acotado. El teorema de unicidad del primer problema de contorno para una región acotada en el espacio de dos o tres dimensiones puede ser demostrada repitiendo textualmente los razonamientos expuestos más arriba.

Problemas semejantes surgen en el estudio de otros problemas, varios de los cuales hemos planteado en el p. 4. Estos problemas exigen algunos cambios en el método de la demostración.

La unicidad del problema para una región no acotada (véase el p. 7), o del problema sin condiciones iniciales, tiene lugar sólo

si se imponen ciertas condiciones complementarias a las funciones estudiadas.

7. Teorema de unicidad para la recta infinita. Al resolver el problema en la recta infinita, es fundamental la condición de acotación de la función buscada en toda la región, es decir, la existencia de un M tal que $|u(x, t)| < M$ para todos los $-\infty < x < +\infty$ y $t \geqslant 0$.

Si $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ son funciones continuas, acotadas en toda la región de variación de las variables (x, t), que satisfacen a la ecuación de la conducción del calor

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty,\ t > 0) \tag{19}$$

y a la condición

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) \quad (-\infty < x < \infty),$$

entonces

$$u_1(x, t) \equiv u_2(x, t) \quad (-\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0).$$

Tomemos, como siempre, la función

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t).$$

Esta función es continua, satisface a la ecuación de la conducción del calor, es acotada en toda la región:

$$|v(x, t)| \leqslant |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)| < 2M \quad (-\infty < x < \infty,$$

$t \geqslant 0$) y satisface a la condición

$$v(x, 0) = 0.$$

El principio del valor máximo, que hemos aplicado para demostrar la unicidad del problema para el segmento, aquí no es aplicable, puesto que en una región no acotada la función $v(x, t)$ puede no alcanzar valores máximos en ningún punto Para aplicar este principio, consideremos la región

$$|x| \leqslant L,$$

donde L es un número auxiliar, que luego aumentaremos indefinidamente, y la función

$$V(x, t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right). \tag{25}$$

La función $V(x, t)$ es continua, satisface a la ecuación de la conducción del calor, lo cual se puede comprobar derivando y, además, posee las propiedades siguientes:

$$V(x, 0) \geqslant |v(x, 0)| = 0,$$
$$V(\pm L, t) \geqslant 2M \geqslant v(\pm L, t). \tag{26}$$

Para la región acotada $|x| \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$, es válido el principio del valor máximo. Aplicando el corolario 2 del punto anterior a las funciones $u = -V(x, t)$, $u = v(x, t)$ y $\bar{u} = V(x, t)$ y teniendo en cuenta (26), se obtiene:

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right) \leqslant v(x, t) \leqslant \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right).$$

Fijemos ciertos valores de (x, t) y, utilizando la arbitrariedad de L, lo aumentaremos indefinidamente. Pasando al límite cuando $L \to \infty$, se obtiene:

$$v(x, t) \equiv 0,$$

lo cual demuestra el teorema.

§ 2. METODO DE SEPARACION DE LAS VARIABLES

1. Problema de contorno homogéneo. Pasemos a la resolución del primer problema de contorno para la ecuación de la conducción del calor en el segmento:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (0 < x < l, \ t > 0) \tag{1}$$

con la condición inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2}$$

y las condiciones de frontera

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned}\right\} \quad (t \geqslant 0). \tag{3}$$

Comenzaremos el estudio del primer problema general de contorno por la resolución del siguiente problema canónico:

hallar la solución continua en la región cerrada $(0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T)$ de la ecuación homogénea

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{4}$$

que satisfaga a la condición inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{2}$$

y a las condiciones homogéneas de frontera

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

Para resolver este problema, analicemos primero cómo se estila en el método de separación de las variables, el problema auxiliar fundamental:

hallar la solución de la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

que no sea idénticamente nula, que satisfaga a las condiciones homogéneas de frontera

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{5}$$

y que se represente en la forma

$$u(x, t) = X(x)\,T(t), \tag{6}$$

donde $X(x)$ es una función sólo de la variable x, y $T(t)$, sólo de t.

Sustituyendo la forma supuesta de la solución (6) en la ecuación (4) y dividiendo ambos miembros de la igualdad entre a^2XT, se obtiene:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{7}$$

donde $\lambda = \text{const}$, puesto que el primer miembro de la igualdad depende sólo de t, y el segundo, sólo de x.

De aquí se deduce que

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$

$$T' + a^2\lambda T = 0. \tag{8'}$$

Las condiciones de frontera (5) dan:

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{9}$$

De esta manera, para determinar la función $X(x)$ se obtiene el problema sobre los valores propios (problema de Sturm—Liouville)

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{10}$$

analizado al resolver la ecuación de las oscilaciones en el capítulo II (véase § 3, p. 1). Allí demostramos que sólo para valores del parámetro λ iguales a

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{11}$$

existen soluciones no triviales de la ecuación (8), iguales a

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x. \tag{12}$$

A estos valores λ_n les corresponden las soluciones de la ecuación (8')

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}, \tag{13}$$

donde C_n son coeficientes por ahora indeterminados.

Volviendo al problema auxiliar fundamental, se advierte que las funciones

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \tag{14}$$

son soluciones particulares de la ecuación (4), que satisfacen a las condiciones de frontera nulas.

Resolvamos ahora el problema (1). Escribamos formalmente la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x. \tag{15}$$

La función $u(x, t)$ satisface a las condiciones de frontera, puesto que la satisfacen todos los términos de la serie. Al pedir que se cumplan las condiciones iniciales, se obtiene

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \tag{16}$$

es decir, C_n son los coeficientes de Fourier de la función $\varphi(x)$ al desarrollarla en serie de senos en el intervalo $(0, l)$:

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \cdot d\xi. \tag{17}$$

Consideremos ahora la serie (15) con los coeficientes C_n, determinados mediante la fórmula (17), y demostremos que esta serie satisface a todas las condiciones del problema (1). Para esto, hay que demostrar que la función $u(x, t)$, determinada por la serie (15), es derivable, satisface a la ecuación en la región $0 < x < l$, $t > 0$ y es continua en los puntos de la frontera de esta región (para $t = 0$, $x = 0$, $x = l$).

Como la ecuación (4) es lineal, en virtud del principio de superposición, la serie formada por soluciones particulares, también será solución, si ésta converge y se la puede derivar término a término dos veces con respecto a x, y una vez con respecto a t (véase el lema del capítulo 2, § 3, p. 3). Demostremos que si $t \geqslant \bar{t} > 0$ ($\bar{t}$ es un número auxiliar cualquiera), las series de las derivadas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

convergen uniformemente. En efecto,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left| -C_n\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2n^2e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x\right| <$$

$$< |C_n|\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\cdot a^2n^2e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}.$$

En lo sucesivo formularemos las condiciones complementarias a que debe satisfacer la función $\varphi(x)$. Supongamos primeramente que $\varphi(x)$ es acotada, $|\varphi(x)| < M$; entonces

$$|C_n| = \left|\frac{2}{l}\right|\left|\int_0^l \varphi(\xi)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi\right| < 2M,$$

de donde se deduce que

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| < 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2n^2e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2\bar{t}} \qquad \text{para } t \geqslant \bar{t}$$

y análogamente

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| < 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2\bar{t}} \qquad \text{para } t \geqslant \bar{t}.$$

En general,

$$\left|\frac{\partial^{h+l}u_n}{\partial t^h\,\partial x^l}\right| < 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2h+l}\cdot n^{2h+l}\cdot a^{2h}\cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2\bar{t}} \quad \text{para } t \geqslant \bar{t}.$$

Investiguemos la convergencia de la serie mayorante $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$, donde

$$\alpha_n = Nn^q e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2\bar{t}}. \tag{15'}$$

En virtud del criterio de D'Alembert, esta serie converge, puesto que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{n^q}\,\frac{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2(n^2+2n+1)\bar{t}}}{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2n^2\bar{t}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2(2n+1)\bar{t}} = 0.$$

De aquí se desprende la posibilidad de derivar la serie (15) término a término cualquier número de veces, en la región $t \geqslant \bar{t} > 0$.

Ahora bien, aplicando el principio de superposición, concluimos que la función definida por esta serie satisface a la ecuación (4). En virtud de la arbitrariedad de $\bar{t}$, esto tiene lugar para todo $t > 0$. Con esto queda demostrado que para $t > 0$ la serie (15) representa una función derivable el número necesario de veces y que satisface a la ecuación (4)[1]).

Si la función $\varphi(x)$ es continua, tiene una derivada continua a trozos y satisface a las condiciones $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(l) = 0$, la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \tag{15}$$

determina una función continua para $t \geqslant 0$.

Efectivamente, de la desigualdad

$$|u_n(x, t)| < |C_n| \quad (\text{para } t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l),$$

se deduce directamente la convergencia uniforme de la serie (15) para $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, lo que demuestra la justeza de la afirmación hecha, si se tiene en cuenta que para una función $\varphi(x)$ continua y lisa a trozos, la serie de los valores absolutos de los coeficientes de Fourier converge, si $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$[2]).

De esta forma, el problema de determinación de la solución del primer problema de contorno para la ecuación homogénea con condiciones de frontera nulas y condición inicial continua y lisa a trozos, está resuelto totalmente.

2. Función de la fuente. Transformemos la solución obtenida (15), sustituyendo C_n por sus valores:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi\right] \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x =$$

$$= \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi\right] \varphi(\xi) \, d\xi.$$

---

[1]) Al demostrar que la serie (15) satisface a la ecuación $u_t = a^2 u_{xx}$ para $t > 0$, se utilizó sólo la acotación de los coeficientes de Fourier C_n, la cual, en particular, tendrá lugar para cualquier función acotada $\varphi(x)$.

[2]) Véase el cap. II, § 3, p. 3.

El cambio de lugar de la suma y la integración siempre es lícito para $t > 0$, en virtud de que la serie entre paréntesis converge uniformemente con respecto a ξ para $t > 0$[1]).

Introduzcamos la notación

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi. \qquad (18)$$

Utilizando la función $G(x, \xi, t)$, se puede representar a la función $u(x, t)$ en la forma

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi. \qquad (19)$$

La función $G(x, \xi, t)$ se llama *función de la fuente puntual instantánea* o, con más detalle, función de la influencia térmica de una fuente puntual instantánea de calor.

Demostremos que la función de la fuente $G(x, \xi, t)$, considerada como función de x, representa la distribución de la temperatura en la barra $0 \leqslant x \leqslant l$ en el momento de tiempo t, si la temperatura en el momento inicial $t = 0$ es igual a cero y en este momento en el punto $x = \xi$ se desprende instantáneamente cierta cantidad de calor (cuya magnitud determinaremos más tarde), y en los extremos de la barra se mantiene todo el tiempo la temperatura nula.

La expresión «cantidad de calor Q que se desprende en el punto ξ», indica, como siempre, que se toma el calor que se genera en un intervalo «pequeño» cerca del punto estudiado ξ. La variación de la temperatura $\varphi_\varepsilon(\xi)$, causada por la aparición de calor en las proximidades del punto, será, evidentemente, igual a cero fuera del intervalo $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$, en el cual se genera calor, y dentro de este intervalo $\varphi_\varepsilon(\xi)$ se puede considerar una función positiva, continua y derivable, para la cual

$$c\rho \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi = Q, \qquad (20)$$

puesto que el primer miembro de esta ecuación representa, precisamente, la cantidad de calor que causa la variación de la temperatura en la magnitud $\varphi_\varepsilon(\xi)$. El proceso de propagación de la temperatura se determina en este caso por la fórmula (19):

$$u_\varepsilon(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi. \qquad (21)$$

[1]) La serie $\Sigma \alpha_n$, donde α_n se determina mediante la fórmula (15'), para $q = 0$ es mayorante de la serie entre corchetes.

Efectuemos ahora el paso al límite cuando $\varepsilon \to 0$. Tomando en cuenta la continuidad de G para $t > 0$ y la igualdad (20), y aplicando el teorema del valor medio para valores fijos de x, t, tendremos:

$$u_\varepsilon(x, t) = \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} G(x, \xi, t)\, \varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi =$$

$$= G(x, \xi^*, t) \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\xi)\, d\xi = G(x, \xi^*, t)\frac{Q}{c\rho}, \qquad (21')$$

donde ξ^* es cierto punto intermedio del intervalo $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. En virtud de la continuidad de la función $G(x, \xi, t)$ con respecto a ξ para $t > 0$, se obtiene:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(x, t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi, t) =$$

$$= \frac{Q}{c\rho}\cdot\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi. \qquad (22)$$

De aquí se deduce que $G(x, \xi, t)$ representa la temperatura en el punto x en el momento t, causada por la acción de una fuente puntual instantánea de potencia $Q = c\rho$, situado en el momento $t = 0$ en el punto ξ del intervalo $(0, l)$.

Señalemos la siguiente propiedad de la función $G(x, \xi, t)$: esta función es $G(x, \xi, t) \geqslant 0$ para cualesquiera x, ξ y $t > 0$. En efecto, consideremos una función inicial $\varphi_\varepsilon(x)$ que posea las propiedades enumeradas más arriba, y la solución que le corresponde (21'). De la no negatividad de las condiciones inicial y de frontera, en virtud del principio del valor máximo, se sigue que

$$u_\varepsilon(x, t) \geqslant 0$$

para todo $0 \leqslant x \leqslant l$ y $t > 0$. De aquí, aplicando la fórmula (21') se tiene:

$$u_\varepsilon(x, t) = G(x, \xi^*, t)\frac{Q}{c\rho} \geqslant 0 \quad (\text{para } t > 0). \qquad (21'')$$

Pasando al límite cuando $\varepsilon \to 0$, de (21') se obtiene la desigualdad

$$G(x, \xi, t) \geqslant 0 \text{ para } 0 \leqslant x, \xi \leqslant l \text{ y } t > 0,$$

la cual, precisamente, había que demostrar.

Este resultado tiene un significado físico sencillo. Sin embargo, establecerlo directamente partiendo de la fórmula (19) sería dificultoso, puesto que $G(x, \xi, t)$ se representa mediante una serie de signo variable.

3. Problemas de contorno con condiciones iniciales discontinuas. La teoría que acabamos de exponer se refiere a las soluciones de la ecuación de la conducción del calor que son continuas en la región cerrada $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Estas condiciones de continuidad son muy restrictivas. En efecto, tomemos el problema más sencillo, sobre el enfriamiento de una barra calentada uniformemente con temperatura nula en sus extremos. Las condiciones complementarias tienen la forma

$$u(x, 0) = u_0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Si $u_0 \neq 0$, la solución de este problema debe ser discontinua en los puntos $(0, 0)$ y $(l, 0)$. Este ejemplo demuestra que las condiciones planteadas más arriba de continuidad del valor inicial y las condiciones de su conjunción con los valores de frontera, excluyen de la consideración casos que son de importancia práctica. Sin embargo, la fórmula (19) da la solución del problema de contorno también en este caso.

En las aplicaciones, a menudo se utilizan fórmulas que se salen de los límites de las condiciones para su aplicación, sin plantear en absoluto el problema sobre las condiciones de aplicación de las fórmulas. La fundamentación sucesiva de todas las fórmulas sería muy engorrosa, y muchas veces distraería la atención del investigador de las facetas cuantitativas y cualitativas del fenómeno, que son características de la esencia física del proceso.

Sin embargo, nosotros consideramos necesario, al menos en los ejemplos más sencillos, fundamentar el aparato matemático necesario para la resolución de los problemas fundamentales.

Consideremos los problemas de contorno con funciones iniciales continuas a trozos, sin suponer que la función inicial está unida a las condiciones de frontera. Esta clase de condiciones complementarias es suficientemente general para las necesidades de la práctica, y suficientemente sencilla para la exposición de la teoría. Nuestro fin es demostrar que la misma fórmula (19) da la solución del problema planteado. Realizaremos su estudio en varias etapas. Demostremos previamente el teorema:

La solución de la ecuación de la conducción del calor

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (0 < x < l,\ t > 0), \tag{4}$$

continua en la región cerrada ($0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$) y que satisface a las condiciones

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{5}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

donde $\varphi(x)$ es una función arbitraria cualquiera, que se anula para $x = 0$, $x = l$, está determinada unívocamente y se representa mediante la fórmula

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

Este teorema fue demostrado más arriba bajo la hipótesis de que se cumplía la condición complementaria de que la función $\varphi(\xi)$ poseía derivada continua a trozos.

Eliminemos esta condición. Consideremos la sucesión de funciones continuas, derivables a trozos, $\varphi_n(\xi)$ ($\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0$), que converge uniformemente hacia $\varphi(x)$. (Como $\varphi_n(x)$ se puede tomar, por ejemplo, las funciones representadas mediante líneas quebradas, que coinciden con $\varphi(x)$ en los puntos $\frac{l\cdot k}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.) Las funciones $u_n(x, t)$, determinadas por la función (19) a partir de $\varphi_n(x)$, satisfacen a todas las condiciones del teorema, puesto que $\varphi_n(x)$ satisfacen a la condición de ser derivables a trozos. Estas funciones convergen uniformemente, y determinan, en el límite, una función continua $u(x, t)$. En efecto, para cualquier ε se puede indicar un $n(\varepsilon)$ tal que

$$|\varphi_{n_1}(x) - \varphi_{n_2}(x)| < \varepsilon \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \text{ si } n_1, n_2 \geqslant n(\varepsilon),$$

puesto que estas funciones, por hipótesis, convergen uniformemente. De aquí, en virtud del principio de los valores máximos se deduce que también

$$|u_{n_1}(x, t) - u_{n_2}(x, t)| < \varepsilon$$
$$(0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T), \text{ si } n_1, n_2 \geqslant n(\varepsilon),$$

lo cual demuestra la convergencia uniforme de la sucesión de funciones $u_n(x, t)$ hacia cierta función continua $u(x, t)$.

Si se pasa al límite bajo el signo integral, fijando un punto (x, t), se obtiene que la función

$$u(x, t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x, t) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^l G(x, \xi, t)\,\varphi_n(\xi)\,d\xi = \int_0^l G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

es continua en la región cerrada $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, y satisface a la condición inicial (2). En virtud de la nota al pie de la pág. 231, no es difícil probar que ésta satisface también a la ecuación (4) para $t > 0$. La demostración del teorema queda concluida.

La fórmula (19) da la única solución continua del problema considerado.

Demostremos el *teorema de unicidad* para el caso *de una función inicial* $\varphi(x)$ *continua a trozos*, sin suponer que esta función está unida a las condiciones de frontera. Demostremos que la función, continua en la región $t > 0$, que satisface a la ecuación de la conducción del calor

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{4}$$

en la región $0 < x < l$, $t > 0$, a las condiciones de frontera nulas

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \tag{5}$$

y a la condición inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2}$$

está determinada unívocamente, si:

1) ésta es continua en los puntos de continuidad de la función $\varphi(x)$ y

2) es acotada en la región cerrada $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}_0$, donde $\bar{t}_0$ es un número positivo arbitrario.

Supongamos que esta función existe. Evidentemente, en virtud del teorema anterior, ésta puede ser representada en la región $t > \bar{t}$ mediante la fórmula

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t - \bar{t})\, \varphi_{\bar{t}}(\xi)\, d\xi \quad (t > \bar{t} > 0) \tag{19'}$$

para todo $\bar{t}$, donde $\bar{t}$ es un valor auxiliar,

$$0 < \bar{t} \leqslant t, \quad \varphi_{\bar{t}}(x) = u(x, \bar{t}).$$

Efectuemos el paso al límite en esta fórmula cuando $\bar{t} \to 0$, manteniendo constantes a x y a t. Demostremos[1]) que es posible el paso al límite bajo el signo integral y que, en consecuencia, la función $u(x, t)$ se puede representar como la integral

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi \qquad [\varphi(\xi) = u(\xi, 0)], \tag{19}$$

que la determina unívocamente.

---

[1]) El teorema que se demuestra más abajo es un caso particular del teorema de Lebesgue sobre la posibilidad del paso al límite bajo el signo integral, si la sucesión de funciones $F_n(x)$ converge casi en todas partes hacia una función límite sumable $F(x)$, y si esta sucesión está acotada por una función sumable. Esta demostración se efectúa para evitar el uso de conceptos de la teoría de los conjuntos. Si se utilizan dichos conceptos, se puede demostrar, en forma totalmente análoga, el teorema de que la solución de la ecuación de la conducción del calor $u(x, t)$ que satisface a las condiciones de frontera nulas, está determinada unívocamente:

1) si $u(x, t) \leqslant F(x)$, donde $F(x)$ es cierta función sumable y

2) si

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = \varphi(x),$$

casi en todas partes, donde $\varphi(x)$ es una función inicial sumable dada.

Fig. 38

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ los puntos de discontinuidad de la función $\varphi(x)$. Haciendo $x_0 = 0$ y $x_{n+1} = l$ (fig. 38) y tomando segmentos cerrados I_k $(x_k + \delta \leqslant x \leqslant x_{k+1} - \delta)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, donde δ es cierto número fijo suficientemente pequeño, no es difícil advertir que el integrando de (19') tiende uniformemente hacia el integrando de (19) en cada segmento I_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. En los segmentos $\bar{I}_k$ $(x_k - \delta \leqslant x \leqslant x_k + \delta)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$, $\bar{I}_0$ $(x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \delta)$ e $\bar{I}_{n+1}$ $(x_{n+1} - \delta \leqslant x \leqslant x_{n+1})$, los integrandos de (19) y (19') están acotados por cierto número N para todo $\bar{t}$ $(0 \leqslant \bar{t} \leqslant \bar{t}_0)$, en virtud de la hipótesis de la acotación de la función $u(x, t)$, y en virtud de la continuidad de $G(x, \xi, t)$ para $0 \leqslant \xi \leqslant l$, $t > 0$. Dividiendo la diferencia de las integrales (19) y (19') en $2n + 3$ integrales, tomadas sobre I_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ e $\bar{I}_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n + 1)$, se observa que esta diferencia se puede hacer menor que un número ε dado de antemano, si

$$\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2n+3}\,\frac{1}{4N},$$

de modo que

$$\left| \int\limits_{\bar{I}_k} [G(x, \xi, t-\bar{t})\, \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)]\, d\xi \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2n+3}$$

y si $\bar{t}$ se escoge tan pequeño que

$$|G(x, \xi, t-\bar{t})\, \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)| <$$

$$< \frac{1}{l}\,\frac{\varepsilon}{2n+3} \quad \text{para} \quad t \leqslant \bar{t} \ \text{en} \ I_k \ (k = 0, 1, \ldots, n),$$

de modo que

$$\left| \int\limits_{I_k} [G(x, \xi, t-\bar{t})\, \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)]\, d\xi \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2n+3} \quad \text{para} \quad t \leqslant \bar{t}\ (k = 0, 1, \ldots, n).$$

De aquí se deduce la desigualdad

$$\left| \int\limits_0^l [G(x, \xi, t-\bar{t})\, \varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)]\, d\xi \right| < \varepsilon \quad \text{para} \quad t \leqslant \bar{t},$$

que demuestra la legitimidad del paso al límite cuando $\bar{t} \to 0$ bajo el signo integral. De esta manera, si existe una función $u(x, t)$ que satisfaga a las condiciones del teorema, ésta se representa en la forma (19), lo cual demuestra la unicidad de tal función.

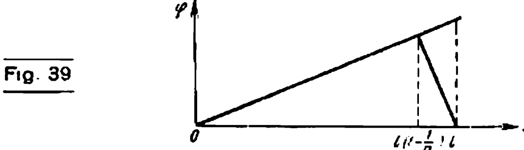


Fig. 39

Demostremos ahora que la fórmula (19) representa la solución acotada de la ecuación (4) que satisface a las condiciones (2) para cualquier función continua a trozos $\varphi(x)$, y que es continua en todos los puntos de continuidad de $\varphi(x)$.

Demostraremos este teorema en dos etapas. Demostremos que es válido si $\varphi(x)$ es una función lineal:

$$\varphi(x) = cx. \tag{2'}$$

Tomemos la sucesión de funciones continuas auxiliares (fig. 39)

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} cx \text{ para } 0 \leqslant x \leqslant l\left(1-\frac{1}{n}\right), \\ \alpha(l-x) \text{ para } l\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqslant x \leqslant l, \quad \alpha=(n-1)c. \end{cases}$$

Las funciones $u_n(x, t)$, determinadas mediante la fórmula (19) para $\varphi_n(x)$, son soluciones continuas de la ecuación de la conducción del calor con condiciones de frontera nulas y condiciones iniciales

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x).$$

Como

$$\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

entonces, en virtud del principio de los valores máximos,

$$u_n(x, t) \leqslant u_{n+1}(x, t).$$

La función $U_0(x) = cx$ es una solución continua de la ecuación de la conducción del calor. En virtud del principio del valor máximo,

$$u_n(x, t) \leqslant U_0(x),$$

puesto que esta desigualdad tiene lugar para $x = 0$, $x = l$ y $t = 0$. De este modo, $u_n(x, t)$ es una sucesión monótonamente no decreciente, acotada superiormente por la función $U_0(x)$, de donde se deduce que esta sucesión converge. No es difícil ver que

$$u(x, t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x, t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^l G(x, \xi, t)\,\varphi_n(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_0^l G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi \leqslant U_0(x),$$

puesto que el paso al límite bajo el signo integral es lícito. En virtud de la nota al pie de la pág. 231, esta función satisface a la ecuación y a las condiciones de frontera nulas para $t > 0$. Demostremos que esta función es continua para $t = 0$ si $0 \leqslant x < l$. Sea $x_0 < l$. Tomemos n de modo que $x_0 < l\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. En este caso $\varphi_n(x_0) = U_0(x_0)$. Tomando en cuenta que

$$u_n(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant U_0(x)$$

y que

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} u_n(x, t) = \lim_{x \to x_0} U_0(x) = \varphi(x_0),$$

se concluye que existe el límite

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ t \to 0}} u(x, t) = \varphi(x_0),$$

que no depende de la forma en que tienden $x \to x_0$ y $t \to 0$. De aquí se sigue, precisamente, la continuidad de $u(x, t)$ en el punto $(x_0, 0)$. Esta función es acotada, puesto que no supera a $U_0(x)$. De esta manera, para $\varphi(x) = cx$ el teorema queda demostrado.

Mediante el cambio de x por $l - x$, se demuestra que el teorema es válido para

$$\varphi(x) = b(l - x). \tag{2''}$$

De aquí se deduce que éste es válido para cualquier función del tipo

$$\varphi(x) = B + Ax,$$

puesto que una función así se puede obtener sumando (2′) y (2″). Continuando, de aquí se deduce también que el teorema es válido para cualquier función continua, sin suponer que $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Efectivamente, cualquier función $\varphi(x)$ de este tipo se puede representar en la forma

$$\varphi(x) = \left[\varphi(0) + \frac{x}{l}(\varphi(l) - (0))\right] + \psi(x),$$

donde el sumando entre corchetes es una función lineal, y $\psi(x)$, una función continua, que se anula en los extremos del segmento: $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Como ya hemos probado que para cada sumando el teorema es aplicable, de aquí se deduce que éste es válido también para $\varphi(x)$.

Demostremos ahora el teorema para cualquier función $\varphi(x)$ continua a trozos. La fórmula (19) determina también en este caso la solución, que satisface a la ecuación y a las condiciones de frontera nulas.

Supongamos que x_0 es un punto de continuidad de la función $\varphi(x)$. Demostremos que para cualquier ε se puede hallar un $\delta(\varepsilon)$ tal que $|u(x, t)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$, si $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$ y $t<\delta(\varepsilon)$. En virtud de la continuidad de la función $\varphi(x)$ en el punto x_0, existe un $\eta(\varepsilon)$ tal que

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para } |x-x_0|<\eta(\varepsilon),$$

de donde

$$\varphi(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi(x_0)+\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } |x-x_0|<\eta(\varepsilon). \tag{23}$$

Escribamos las funciones continuas derivables auxiliares $\bar{\varphi}(x)$ y $\underline{\varphi}(x)$:

$$\left.\begin{aligned}\bar{\varphi}(x)&=\varphi(x_0)+\frac{\varepsilon}{2} && \text{para} && |x-x_0|<\eta(\varepsilon),\\ \bar{\varphi}(x)&\geqslant\varphi(x) && \text{para} && |x-x_0|>\eta(\varepsilon),\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

$$\left.\begin{aligned}\underline{\varphi}(x)&=\varphi(x_0)-\frac{\varepsilon}{2} && \text{para} && |x-x_0|<\eta(\varepsilon),\\ \underline{\varphi}(x)&\leqslant\varphi(x) && \text{para} && |x-x_0|>\eta(\varepsilon).\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

En el intervalo $|x-x_0|>\eta(\varepsilon)$, las funciones $\bar{\varphi}$ y $\underline{\varphi}$ satisfacen sólo a las condiciones (a) y (b), siendo en lo restante arbitrarias. En virtud de las desigualdades (23), será

$$\underline{\varphi}(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant\bar{\varphi}(x). \tag{24}$$

Tomemos las funciones

$$\bar{u}(x, t)=\int_0^l G(x, \xi, t)\,\bar{\varphi}(\xi)\,d\xi,$$

$$\underline{u}(x, t)=\int_0^l G(x, \xi, t)\,\underline{\varphi}(\xi)\,d\xi.$$

En virtud de la continuidad de las funciones $\bar{\varphi}(x)$ y $\underline{\varphi}(x)$, las funciones $\bar{u}(x, t)$ y $\underline{u}(x, t)$ son continuas en el punto x_0, es decir, existe un $\delta(\varepsilon)$ tal que

$$\left.\begin{aligned}|\bar{u}(x, t)-\bar{\varphi}(x)|&\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\\ |\underline{u}(x, t)-\underline{\varphi}(x)|&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\right\} \quad \text{para } |x-x_0|<\delta(\varepsilon), \quad t<\delta(\varepsilon),$$

de donde

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}(x, t) \leqslant \bar{\varphi}(x) + \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) + \varepsilon,\\ \underline{u}(x, t) \geqslant \underline{\varphi}(x) - \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) - \varepsilon\end{aligned}\right\} \text{ para } |x - x_0| < \delta(\varepsilon),\ t < \delta(\varepsilon).$$

En virtud de que la función $G(x, \xi, t)$ no es negativa, de la fórmula (24) se deduce que

$$\underline{u}(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant \bar{u}(x, t). \tag{25}$$

De aquí se obtienen las desigualdades

$$\varphi(x)_0 - \varepsilon \leqslant u(x, t) \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon \text{ para } |x - x_0| < \delta(\varepsilon),\ t < \delta(\varepsilon)$$

o bien

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon \text{ para } |x - x_0| < \delta(\varepsilon),\ t < \delta(\varepsilon),$$

que es lo que se quería demostrar. La acotación de la función $|u(x, t)|$ se deduce de (25) y de la acotación de las funciones $\bar{u}(x, t)$ y $\underline{u}(x, t)$. Con esto el teorema queda demostrado.

4. Ecuación no homogénea de la conducción del calor. Consideremos la ecuación no homogénea de la conducción del calor

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \tag{1}$$

con la condición inicial

$$u(x, 0) = 0 \tag{26}$$

y las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0,\\ u(l, t) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Buscaremos la solución $u(x, t)$ de este problema en forma de serie de Fourier en las funciones propias del problema (11), es decir, en las funciones $\left\{\operatorname{sen} \frac{\pi h}{l} x\right\}$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x, \tag{27}$$

considerando a t como un parámetro. Para hallar la función $u(x, t)$ hay que determinar las funciones $u_n(t)$. Representemos a $f(x, t)$ en forma de la serie

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x,$$

donde

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi,\ t)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi. \qquad (28)$$

Sustituyendo la forma supuesta de la solución en la ecuación inicial (1), tendremos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x\left\{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2u_n(t)+\dot{u}(t)-f_n(t)\right\}=0.$$

Esta ecuación será satisfecha si todos los coeficientes del desarrollo son iguales a cero, es decir, si

$$\dot{u}_n(t)=-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t)+f_n(t). \qquad (29)$$

Utilizando la condición inicial para $u(x,\ t)$

$$u(x,\ 0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(0)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x=0,$$

se obtiene la condición inicial para $u_n(t)$:

$$u_n(0)=0. \qquad (30)$$

Resolviendo la ecuación diferencial ordinaria (29) con la condición inicial nula (30)[1]), se halla

$$u_n(t)=\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)}f_n(\tau)\,d\tau. \qquad (31)$$

Sustituyendo la expresión (31) para $u_n(t)$ en la fórmula (27), se obtiene la solución del problema inicial en la forma

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)}f_n(\tau)\,d\tau\right]\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x. \qquad (32)$$

Apliquemos la expresión (28) para $f_n(\tau)$ y transformemos la solución hallada (32):

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi\right\}f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=$$

$$=\int_0^t\int_0^l G(x,\ \xi,\ t-\tau)\,f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (33)$$

---

[1]) Véase la letra pequeña al final del p. 4, § 3, cap. II.

donde

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \qquad (34)$$

coincide con la función de la fuente, determinada por la fórmula (18).

Aclaremos el significado físico de la solución obtenida

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau. \qquad (33)$$

Supongamos que la función $f(\xi, \tau)$ es diferente de cero sólo en un entorno suficientemente pequeño del punto $M_0(\xi_0, \tau_0)$

$$\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + \Delta\tau.$$

La función $F(\xi, \tau) = c\rho f(\xi, \tau)$ es la densidad de las fuentes térmicas. La cantidad total de calor que se genera en el segmento $(0, l)$ durante todo el tiempo de acción de la fuente (es decir, durante $\Delta\tau$), es igual a

$$Q = \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} c\rho f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau. \qquad (35)$$

Apliquemos el teorema del valor medio a la expresión

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau =$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau = G(x, \bar{\xi}, t-\bar{\tau}) \cdot \frac{Q}{c\rho} = \bar{u}(x, t),$$

donde

$$\xi_0 < \bar{\xi} < \xi_0 + \Delta\xi, \quad \tau_0 < \bar{\tau} < \tau_0 + \Delta\tau.$$

Pasando al límite cuando $\Delta\xi \to 0$ y $\Delta\tau \to 0$, se obtiene la función

$$u(x, t) = \lim_{\substack{\Delta\xi \to 0 \\ \Delta\tau \to 0}} \bar{u}(x, t) = \frac{Q}{c\rho} G(x, \xi_0, t-\tau_0), \qquad (36)$$

que se puede interpretar como la función de la influencia de una fuente instantánea de calor, concentrada en el punto ξ_0 en el momento τ_0.

Si se conoce la función $\frac{Q}{c\rho} G(x, \xi, t-\tau)$, que es la acción de la fuente instantánea unitaria concentrada, la acción de las

fuentes distribuidas continuamente con densidad $F(x, t) = c\rho f(x, t)$, debe expresarse por la fórmula (33), en correspondencia con el significado físico de la función $G(x, \xi, t-\tau)$.

De esta manera, la influencia térmica de las fuentes de calor que actúan en la región $(\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi)$ $(\tau_0, \tau_0 + \Delta\tau)$ está dada por la expresión

$$G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) \Delta\xi \Delta\tau \left(\frac{Q}{c\rho} = f(\xi, \tau) \Delta\xi \Delta\tau\right).$$

Si las fuentes están distribuidas en forma continua, sumando las influencias térmicas de las fuentes que actúan en toda la región $0 \leqslant \xi \leqslant l$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, se obtiene, después de pasar al límite cuando $\Delta\xi \to 0$ y $\Delta\tau \to 0$,

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau.$$

De esta forma, partiendo del significado físico de la función de la fuente $G(x, \xi, t)$, se podría haber escrito directamente la expresión (33) para la función que da la solución de la ecuación inhomogénea.

Teniendo la forma en la cual debe representarse la solución del problema, se pueden investigar las condiciones de aplicación de esta fórmula con respecto a la función $f(\xi, \tau)$. Nosotros no efectuaremos dicha investigación.

Hemos estudiado aquí la ecuación no homogénea con condiciones iniciales nulas. Si la condición inicial es diferente de cero, a esta solución se le debe agregar la de la ecuación homogénea con la condición inicial dada $u(x, 0) = \varphi(x)$, que fue hallada en el p. 1.

5. Primer problema general de contorno. Analicemos el primer problema general de contorno para la ecuación de la conducción del calor:

hallar la solución de la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \tag{1}$$

con las condiciones complementarias

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Introduzcamos la nueva función incógnita $v(x, t)$,

$$v(x, t) = U(x, t) + v(x, t), \tag{37}$$

que representa la desviación de cierta función conocida $U(x, t)$.

Esta función $v(x, t)$ se determinará como la solución de la ecuación

$$v_t - a^2 v_{xx} = \bar{f}(x, t),$$
$$\bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_t - a^2 U_{xx}]$$

con las condiciones complementarias

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - U(x, 0),$$
$$v(0, t) = \bar{\mu}_1(t), \quad \bar{\mu}_1(t) = \mu_1(t) - U(0, t),$$
$$v(l, t) = \bar{\mu}_2(t), \quad \bar{\mu}_2(t) = \mu_2(t) - U(l, t).$$

Escojamos la función auxiliar $U(x, t)$ de forma que sea

$$\bar{\mu}_1(t) = 0 \quad \text{y} \quad \bar{\mu}_2(t) = 0,$$

para lo cual es suficiente hacer[1])

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)]$$

De este modo, la determinación de la función $u(x, t)$ que da la solución del primer problema general de contorno se redujo a hallar la función $v(x, t)$ que da la solución del problema de contorno con condiciones de frontera nulas. El método de determinar la función $v(x, t)$ se expone en el p. 4.

El esquema formal que acabamos de exponer para resolver los problemas con términos inhomogéneos en la ecuación y en las condiciones de frontera, no siempre es cómodo para representar la función buscada $u(x, t)$. Las dificultades que surgen para determinar la función auxiliar $v(x, t)$ dependen de la función $U(x, t)$, de la cual se busca la desviación.

En particular, para los problemas con segundos miembros estacionarios es más cómodo separar la solución estacionaria y buscar la desviación de esta solución[2]).

Consideremos, por ejemplo, el problema para la barra acotada $(0, l)$, cuyos extremos se mantienen a temperaturas constantes u_0 y u_1:

$$u_t = a^2 u_{xx},$$
$$u(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u(0, t) = u_0,$$
$$u(l, t) = u_1.$$

---

[1]) Véase el cap. II, § 3, p. 5

[2]) Véase el cap. II, § 3, p. 6

Buscaremos la solución en forma de la suma

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

donde $\bar{u}(x)$ es la temperatura estacionaria, y $v(x, t)$, la desviación de dicha temperatura.

Para las funciones $\bar{u}(x)$ y $v(x, t)$ tendremos las condiciones

$$\bar{u}'' = 0, \qquad v_t = a^2 v_{xx};$$

$$\bar{u}(0) = u_0, \qquad v(x, 0) = \varphi(x) - \bar{u}(x) = \varphi_1(x);$$

$$\bar{u}(l) = u_1, \qquad v(0, t) = 0,$$

$$v(l, t) = 0.$$

De aquí se halla:

$$\bar{u}(x) = u_0 + \frac{x}{l}(u_1 - u_0).$$

La función $v(x, t)$, determinada por la condición inicial y las condiciones homogéneas de frontera, se halla sin dificultad por el método de separación de las variables.

EJERCICIOS

1. Deducir la ecuación para el proceso de calentamiento de un alambre fino homogéneo por una corriente eléctrica constante, si en su superficie tiene lugar un intercambio térmico con el medio ambiente.

2. Deducir la ecuación de la difusión en un medio que se mueve uniformemente en la dirección del eje x con velocidad w. Analizar el caso de una variable independiente.

3. Partiendo de las ecuaciones de Maxwell, suponiendo que $E_x = E_z = 0$, $H_z = 0$ y despreciando las corrientes de desplazamiento, demostrar que en un medio conductor homogéneo la componente E_y del campo electromagnético satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t},$$

donde σ es la conductibilidad del medio, y c, la velocidad de la luz. Deducir la ecuación para H_x.

4. Dar una interpretación física de las siguientes condiciones de frontera en los problemas de conducción del calor y de difusión:

a) $u(0, t) = 0$, b) $u_x(0, t) = 0$,

c) $u_x(0, t) - hu(0, t) = 0$, $(h > 0)$.

$u_x(l, t) + hu(l, t) = 0$

5. Resolver el problema sobre el enfriamiento de una barra homogénea calentada uniformemente con temperatura nula en los extremos, suponiendo que no hay intercambio térmico en la superficie lateral.

6. La temperatura inicial de una barra es $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$ para $0 < x < l$. La temperatura de los extremos se mantiene constante, $u(0, t) = u_1$; $u(l, t) = u_2$ para $0 < t < \infty$. Hallar la temperatura de la barra, si no hay intercambio térmico en la superficie lateral. Hallar la temperatura estacionaria.

7. Resolver el ejercicio 6 bajo las siguientes condiciones de frontera: en un extremo se mantiene la temperatura constante, y el otro extremo está aislado térmicamente.

8. Resolver el problema del calentamiento de un alambre fino homogéneo mediante una corriente eléctrica constante, si la temperatura inicial, la de frontera y la del medio ambiente son iguales a cero.

9. Un cilindro de longitud l, lleno de aire a la presión y la temperatura del medio ambiente, se abre de un extremo en el momento inicial de tiempo, y de la atmósfera circundante, donde la concentración de cierto gas es igual a u_0, comienza la difusión del gas en el cilindro. Hallar la cantidad de gas que se difunde en el cilindro durante un tiempo t, si la concentración inicial de gas en el cilindro es igual a cero.

10. Resolver el problema 9 bajo la hipótesis de que el extremo izquierdo del cilindro está cerrado por una membrana semiimpermeable.

11. Resolver el problema sobre el enfriamiento de una barra homogénea de superficie lateral aislada térmicamente, si su temperatura inicial es $u(x, 0) = \varphi(x)$, y en los extremos hay un intercambio térmico con el medio, de temperatura nula. Considerar el caso particular $\varphi(x) = u_0$.

12. Resolver el ejercicio 11, suponiendo que la temperatura del medio ambiente es igual a U_0.

13. Resolver el ejercicio 11, considerando que en la superficie lateral tiene lugar un intercambio térmico con el medio, cuya temperatura:

a) es igual a cero,

b) es constante e igual a u_1.

14. Hallar la temperatura permanente de una barra, despreciando el intercambio térmico en la superficie lateral y considerando que un extremo de la barra está térmicamente aislado, y al segundo extremo se le conecta un flujo térmico que varía armónicamente con el tiempo.

15. Resolver el ejercicio 14, considerando que un extremo de la barra tiene temperatura nula, y la temperatura del segundo extremo varía armónicamente con el transcurso del tiempo.

16. Una barra $(0, l)$ está formada de dos trozos homogéneos de igual sección transversal, que se unen en el punto $x = x_0$ y poseen las características a_1, k_1 y a_2, k_2 respectivamente. Hallar la temperatura permanente en esta barra (ondas térmicas), si un extremo de ella $(x = 0)$ se mantiene a temperatura nula, y la temperatura del segundo varía sinusoidalmente con el tiempo.

17. El extremo izquierdo de la barra compuesta del ejercicio 16 se mantiene a temperatura igual a cero, y el derecho, a temperatura $u(l, t) = u_1$; la temperatura inicial de la barra es igual a cero. Hallar su temperatura $u(x, t)$ en el régimen regular (primer término del desarrollo).

18. Hallar la temperatura $u(x, t)$ de una barra, cuya temperatura inicial es igual a cero, si las condiciones de frontera tienen la forma

$$u(0, t) = Ae^{-\alpha t}, \quad u(l, t) = B,$$

donde A, B y $\alpha > 0$ son constantes.

§ 3. PROBLEMAS EN LA RECTA INFINITA

1. Propagación del calor en la recta infinita. Función de la fuente para una región no acotada. Consideremos en la recta infinita el problema con condiciones iniciales (problema de Cauchy):

hallar la función acotada $u(x, t)$, definida en la región $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, que satisfaga a la ecuación de conducción del calor

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \tag{1}$$

y a la condición inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

Si $\varphi(x)$ es una función continua, el cumplimiento de la condición inicial se entenderá en el sentido de que $u(x, t)$ es continua para $t = 0$, es decir,

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ x \to x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0).$$

Como hemos visto en el p. 7 del § 1, la solución de la ecuación de conducción del calor se determina unívocamente por sus condiciones iniciales, si ésta es acotada. Por esto, en el enunciado de los teoremas se introduce la condición de acotación.

Ante todo, daremos el esquema formal de resolución del problema planteado, que se basa en la separación de las variables.

Buscaremos la solución no trivial acotada de la ecuación (1) que se represente en forma del producto

$$u(x, t) = X(x)\, T(t). \tag{3}$$

Sustituyendo la expresión (3) en (1), se obtiene:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2,$$

donde λ^2 es el parámetro de la separación. De aquí se deduce que

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0, \tag{4}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \tag{5}$$

Resolviendo las ecuaciónes (4) y (5), se hallan las soluciones particulares de la ecuación (1) del tipo

$$u_\lambda(x, t) = A(\lambda)\, e^{-\lambda^2 a^2 t \pm i\lambda x}, \tag{6}$$

que satisfacen a la condición de acotación. Aquí λ es un número real cualquiera, $-\infty < \lambda < \infty$; por esto en (6) tomaremos el signo «más» y formaremos la función

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)\, e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda. \tag{7}$$

Si las derivadas que figuran en la ecuación (1) se pueden calcular derivando bajo el signo integral en (7), la función (7), evidentemente, satisfará a la ecuación (1), por ser superposición de soluciones particulares de esta ecuación.

Al imponer el cumplimiento de la condición inicial para $t = 0$, tendremos

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda. \tag{8}$$

Apliquemos ahora la fórmula de la transformación inversa de la integral de Fourier:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi. \tag{9}$$

Sustituyendo (9) en (7) y cambiando el orden de integración, se obtiene:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi \right) e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda \right) \psi(\xi)\, d\xi. \tag{10}$$

La integral interna en (10) es igual a[1])

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \tag{11}$$

---

[1]) Véase B. M. Budak, S. V. Fomín, *Integrales Múltiples y Series*, ed. «Naúka», 1965.

Sustituyendo (11) en (10), se obtiene la representación integral de la solución buscada

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{12}$$

donde

$$G(x, \xi; t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}. \tag{13}$$

La función $G(x, \xi; t)$, determinada por la fórmula (13), se llama a menudo solución fundamental de la ecuación de la conducción del calor.

Se puede demostrar, por comprobación directa, que la función

$$G(x, \xi; t-t_0) = \frac{Q}{c\rho 2\sqrt{\pi a^2 (t-t_0)}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \tag{13'}$$

es la temperatura en el punto x en el momento de tiempo t, si en el momento inicial del tiempo $t = t_0$ en el punto ξ se genera una cantidad de calor $Q = c\rho$.

La función $G(x, \xi, t-t_0)$ satisface a la ecuación de la conducción del calor con respecto a las variables (x, t)[1]), lo cual se puede comprobar por derivación directa.

La cantidad de calor que hay en el eje x en el momento $t > t_0$ es igual a

$$c\rho \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t-t_0)\,dx = \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} =$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = Q = c\rho,$$

---

[1]) En efecto,

$$G_x = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x-\xi}{2[a^2(t-t_0)]^{3/2}}\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_{xx} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2}\, \frac{1}{[a^2(t-t_0)]^{3/2}} + \frac{(x-\xi)^2}{4[a^2(t-t_0)]^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_t = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{a^2}{2[a^2(t-t_0)]^{3/2}} + \frac{a^2(x-\xi)^2}{4[a^2(t-t_0)]^{5/2}} \right] e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

es decir,

$$G_t = a^2 G_{xx}.$$

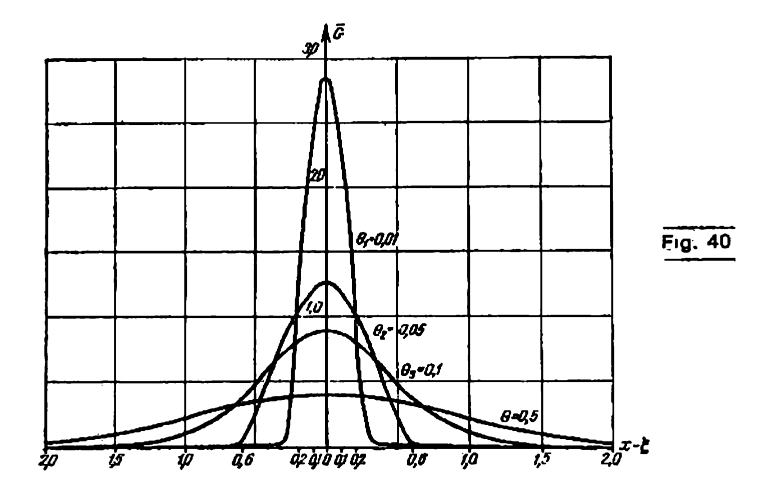


Fig. 40

puesto que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \sqrt{\pi}$$

$$\left(\alpha = \frac{x-\xi}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \quad d\alpha = \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right).$$

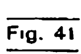
De este modo, la cantidad de calor en la recta no cambia con el transcurso del tiempo. La función $G(x, \xi, t-t_0)$ depende del tiempo sólo mediante el argumento $\theta = a^2(t-t_0)$, de manera que esta función se puede escribir en la forma

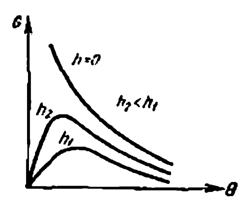
$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\theta}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\theta}}. \qquad (13'')$$

En la fig. 40 se representa la gráfica de la función G en dependencia de x para diferentes valores de θ. Casi toda la superficie que delimita esta curva se halla sobre el intervalo

$$(\xi-\varepsilon, \ \xi+\varepsilon),$$

donde ε es un número arbitrariamente pequeño, siempre que $\theta = a^2(t-t_0)$ sea un número suficientemente pequeño. La magnitud de esta superficie, multiplicada por $c\rho$, es igual





a la cantidad de calor que se genera en el momento inicial. De esta forma, para pequeños valores $t - t_0 > 0$, casi todo el calor está concentrado en un entorno pequeño del punto ξ. De lo expuesto se deduce que en el momento t_0 toda la cantidad de calor se encuentra en el punto ξ.

Analizando la variación de temperatura en el punto fijo $x = \xi + h$ con el transcurso del tiempo, para $h = 0$, es decir, para $x = \xi$, se obtiene

$$G_{x=\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}.$$

De esta manera, la temperatura en el punto donde se genera calor es infinitamente grande para pequeñas θ.

Si $x \neq \xi$, es decir, $h \neq 0$, la función G se representa en forma del producto de dos factores

$$G_{x\neq\xi} = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}\right] e^{-\frac{h^2}{4\theta}}.$$

El segundo factor es menor que la unidad: para θ grandes es ≈ 1, para θ pequeñas es ≈ 0. De aquí se desprende que $G_{x\neq\xi} \approx G_{x=\xi}$ para θ grandes; $G_{x\neq\xi} \ll G_{x=\xi}$ para θ pequeñas. Cuanto menor sea h, es decir, cuanto más próximo se halle x a ξ, mayor será el segundo factor. Las gráficas de las funciones $G_{x=\xi}$ y $G_{x\neq\xi}$ para $h_2 < h_1$ se representan en la fig. 41.

No es difícil ver que

$$\lim_{\theta\to 0} G_{x\neq\xi} = 0.$$

Calculando el límite de la indeterminación, se halla:

$$\lim_{\theta\to 0}\left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}\right] e^{-\frac{h^2}{4\theta}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\theta\to 0} \frac{-\frac{1}{2}\theta^{-\frac{3}{2}}}{\frac{h^2}{4\theta^2} e^{\frac{h^2}{4\theta}}} = 0.$$

La fórmula (13′) muestra que en cualquier punto x, la temperatura creada por una fuente puntual instantánea que actúa en el momento inicial $t = 0$, es diferente de cero para momentos de tiempo arbitrariamente pequeños. Un hecho semejante se podría interpretar como el resultado de una propagación de temperatura infinitamente rápida (velocidad infinita). Sin embargo, esto contradice a las concepciones cinético-moleculares sobre la naturaleza del calor. Tal contradicción se obtiene porque al deducir la ecuación de la conducción del calor hemos utilizado concepciones fenomenológicas sobre la propagación del calor, sin tomar en cuenta la inercia del proceso del movimiento de las moléculas.

Ahora estudiaremos las condiciones de aplicación de la fórmula (12).

Demostremos que la fórmula

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi, \qquad (12')$$

llamada *integral de Poisson*, representa, para cualquier función acotada $|\varphi(\xi)| < M$, a la solución acotada de la ecuación de la conducción del calor, para $t > 0$, que tiende en forma continua hacia $\varphi(x)$ cuando $t \to 0$, en todos los puntos de continuidad de esta función.

Demostremos previamente el lema (*principio generalizado de superposición*).

Si la función $U(x, t, \alpha)$ satisface, con respecto a las variables (x, t), a la ecuación diferencial lineal

$$L(U) = 0$$

para cualquier valor fijo del parámetro α, la integral

$$u(x, t) = \int U(x, t, \alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha$$

es también solución de la misma ecuación, $L(u) = 0$, si las derivadas que figuran en el operador diferencial lineal $L(U)$ pueden ser calculadas derivando bajo el signo integral.

La demostración de este lema es sumamente sencilla. El operador diferencial lineal $L(U)$ es la suma de derivadas de la función U con ciertos coeficientes, que dependen de x y t. La derivación de la función u, por hipótesis, se puede efectuar bajo el signo integral. De aquí se deduce que

$$L(u) = \int L(U(x, t, \alpha))\, \varphi(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

es decir, que la función $u(x, t)$ satisface a la ecuación $L(u) = 0$.

Recordemos las condiciones suficientes para que sea posible la derivación bajo el signo de una integral que depende de un parámetro.

La función

$$F(x)=\int_a^b f(x, \alpha)\, d\alpha$$

es derivable bajo el signo integral para límites finitos a y b, si $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha)$ es una función continua de las variables x y α en la región de su variación (véase B. M. Budak, S. V. Fomín, *Integrales Múltiples y Series*, ed. «Naúka», 1965).

Tampoco es difícil ver que la función

$$F_1(x)=\int_a^b f(x, \alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha$$

es derivable bajo el signo integral para límites finitos a y b, bajo las mismas condiciones con respecto a la función $f(x, \alpha)$ y para una función arbitraria, acotada (y aún absolutamente integrable) $\varphi(\alpha)$. Si los límites de integración son infinitos, en este caso se exige la convergencia uniforme de la integral que se obtiene después de derivar el integrando con respecto al parámetro (véase la ob. cit.).

Estas mismas observaciones tienen lugar también para las integrales múltiples que dependen de parámetros.

Para las ecuaciones lineales $L(u)=0$, tiene lugar el principio de superposición, que consiste en que la función

$$u(x, t)=\sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x, t),$$

que se representa como la suma de un número finito de soluciones particulares, es también solución de la ecuación. Si se tiene una solución $u(x, t, \alpha)$, que depende de un parámetro, la suma integral

$$\sum u(x, t, \alpha_n) C_n \quad (C_n=\varphi(\alpha_n)\,\Delta\alpha) \tag{14}$$

es también solución de la ecuación $L(u)=0$. El lema demostrado, al igual que el de la pág. 107, establece las condiciones bajo las cuales el límite de la suma (14), que en nuestro caso es igual a

$$u(x, t)=\int U(x, t, \alpha)\, \varphi(\alpha)\, d\alpha,$$

es también solución de la ecuación $L(u)=0$. Desde este punto de vista, el lema demostrado, así como el de la pág. 107, es natural llamarlo *principio generalizado de superposición*.

Estudiemos ahora la integral (12′). Demostremos, primeramente, que si la función $\varphi(x)$ es acotada, $|\varphi(x)| < M$, la integral (12′) converge, y es una función acotada. En efecto,

$$|u(x, t)| < M \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi =$$

$$= M \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = M \left(\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}}\right),$$

puesto que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi}.$$

Demostremos ahora que la integral (12′) satisface a la ecuación de la conducción del calor para $t > 0$. Para esto, es suficiente demostrar que las derivadas de esta integral, para $t > 0$, se pueden calcular derivando bajo el signo integral.

En el caso de límites finitos de integración esto es lícito, puesto que todas las derivadas de la función

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

son continuas para $t > 0$. Para que sea posible la derivación bajo el signo de integral impropia, es suficiente probar que la integral obtenida después de derivar el integrando converge uniformemente. Efectuaremos este análisis en el ejemplo de la derivada primera con respecto a x.

De este modo, para demostrar que la función (12) es derivable con respecto a x, así como también la igualdad

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (G(x, \xi, t)) \varphi(\xi) d\xi,$$

es suficiente demostrar la convergencia uniforme de la integral del segundo miembro. Además, para que la función sea derivable en el punto (x_0, t_0), es suficiente demostrar la convergencia uniforme de la integral en cierta región de valores de las variables que contenga a los valores investigados (x_0, t_0), por ejemplo, en la región

$$t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2, \quad |x| \leqslant \bar{x}.$$

La condición suficiente para que la integral converja uniformemente (análoga al criterio de convergencia uniforme de una serie) es que exista una función positiva $F(\xi)$, que no dependa

de los parámetros (x, t), que sea mayorante de la función $|G_x(x, \xi, t)\varphi(\xi)|$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}G(x, \xi, t)\varphi(\xi)\right| \leqslant F(\xi), \quad \xi > \bar{x}, \quad \xi < -\bar{x}, \tag{15}$$

y cuya integral sea convergente:

$$\int_{x_1}^{\infty} F(\xi)\,d\xi < \infty, \quad \int_{-\infty}^{x_1} F(\xi)\,d\xi < \infty. \tag{15'}$$

La magnitud x_1 indica cierto número, a partir del cual se cumple la desigualdad (15).

Hallemos la acotación de la magnitud absoluta de la expresión bajo el signo integral en la fórmula para $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi, t)\right|\cdot|\varphi(\xi)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{|\xi - x|}{2[a^2t]^{3/2}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}|\varphi(\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2\sqrt{\pi}}\frac{|\xi| + \bar{x}}{2[a^2t_1]^{3/2}}e^{-\frac{(\xi-\bar{x})^2}{4a^2t_2}} = F(\xi) \quad \text{para} \quad \xi < \bar{x}, \tag{16}$$

para cualesquiera $|x| \leqslant \bar{x}$ y $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. No es difícil comprobar la convergencia de la integral (15′) de la función $F(\xi)$. La integral

$$\int_{x_1}^{\infty} F(\xi)\,d\xi = \int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{|\xi| + \bar{x}}{2[a^2t_1]^{3/2}}e^{-\frac{(\xi-\bar{x})^2}{4a^2t_2}}d\xi =$$

$$= \int_{x_1-\bar{x}}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\xi_1 + 2\bar{x}}{2[a^2t_1]^{3/2}}\cdot e^{-\frac{\xi_1^2}{4a^2t_2}}d\xi$$

$$(\xi_1 = |\xi| - \bar{x})$$

converge, puesto que en el integrando hay un factor del tipo $(a\xi + b)\,e^{-c\xi^2}$. De aquí concluimos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi.$$

En forma completamente análoga se demuestra la posibilidad del cálculo de todas las demás derivadas bajo el signo integral. Con esto queda demostrado que la función (12′) satisface a la ecuación de la conducción del calor.

Demostremos ahora la propiedad fundamental de la integral (12'), a saber, que

$$u(x, t) \to \varphi(x_0) \text{ para } t \to 0 \text{ y } x \to x_0$$

en todos los puntos de continuidad de la función $\varphi(x)$.

De esta manera, supongamos que $\varphi(x)$ es continua en cierto punto x_0. Debemos demostrar que

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ x \to x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0),$$

es decir, que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon)$ tal que

$$|u(x,t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon,$$

siempre que

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ y } |t| < \delta(\varepsilon).$$

En virtud de la hipótesis de que $\varphi(x)$ es continua en el punto x_0, existe un $\eta(\varepsilon)$ tal que

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6}, \tag{17}$$

si

$$|x - x_0| < \eta.$$

Dividiendo el intervalo de integración en partes, representemos a $u(x, t)$ como la suma de tres términos:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \ldots d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_2}^{\infty} \ldots d\xi = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t), \tag{18}$$

donde

$$x_1 = x_0 - \eta \text{ y } x_2 = x_0 + \eta.$$

El sumando principal de esta suma, u_2, se puede representar en la forma

$$u_2(x, t) = \frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} [\varphi(\xi) - \varphi(x_0)]\, d\xi = I_1 + I_2.$$

La integral I_1 se calcula directamente:

$$I_1 = \frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{\sqrt{a^2t}} d\xi = \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2t}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

donde

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2t}}, \quad d\alpha = \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}. \tag{19}$$

Si $|x - x_0| < \eta$, el límite superior se vuelve positivo, y el inferior, negativo, y para $t \to 0$, el límite superior tiende hacia $+\infty$, y el inferior, hacia $-\infty$. De aquí se sigue que

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ x \to x_0}} I_1 = \varphi(x_0).$$

De esta manera, existe un δ_1 tal que

$$|I_1 - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6}, \tag{20}$$

siempre que

$$|x - x_0| < \delta_1 \text{ y } |t| < \delta_1.$$

Demostremos que las demás integrales, I_2, u_1 y u_3 son pequeñas. Acotemos ante todo la integral I_2:

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} |\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| d\xi.$$

De las igualdades (18) se ve que para

$$x_1 < \xi < x_2$$

tiene lugar la desigualdad

$$|\xi - x_0| < \eta.$$

Aplicando la desigualdad (16) y la siguiente:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\alpha^2} d\alpha < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1,$$

para x' y x'' cualesquiera, se obtiene

$$|I_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi =$$

$$= \frac{\varepsilon}{6} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2t}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha < \frac{\varepsilon}{6}, \tag{21}$$

donde la nueva variable α se determina mediante la fórmula (19). Acotemos

$$|u_3(x, t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \int_{x_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi \right| <$$

$$< \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_2 - x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \to 0 \quad \text{para} \quad \begin{matrix} x \to x_0 \\ t \to 0 \end{matrix} \qquad (22)$$

y análogamente

$$|u_1(x, t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi \right| <$$

$$< \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1 - x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha \to 0 \quad \text{para} \quad \begin{matrix} x \to x_0 \\ t \to 0, \end{matrix} \qquad (23)$$

puesto que si $x \to x_0$, entonces $x_2 - x > 0$ y $x_1 - x < 0$, y si $t \to 0$, entonces en los últimos términos de (22) y (23) los límites inferior y superior tienden a $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente. Por lo tanto, existe un δ_2 tal que

$$|u_3(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad |u_1(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad (24)$$

si

$$|x - x_0| < \delta_2 \text{ y } |t| < \delta_2.$$

Utilizando las acotaciones establecidas (22), (23), se obtiene:

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| = |u_1 + [I_1 - \varphi(x_0)] + I_2 + u_3| \leqslant$$

$$\leqslant |u_1| + |I_1 - \varphi(x_0)| + |I_2| + |u_3| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \qquad (25)$$

siempre que

$$|x - x_0| < \delta$$

y

$$|t| < \delta,$$

donde δ es el mínimo de los números δ_1 y δ_2.

De esta forma, hemos demostrado que la función

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi \qquad (12')$$

es acotada, satisface a la ecuación de la conducción del calor y a la condición inicial.

Si el valor inicial no se da para $t = 0$, sino para $t = t_0$, la expresión de $u(x, t)$ adquiere la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2(t - t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{12''}$$

La unicidad de la solución obtenida para una función continua $\varphi(x)$ se deduce del teorema demostrado en el § 2, p. 3. Si la función inicial $\varphi(x)$ tiene un número finito de puntos de discontinuidad, la integral (12″) representa la solución acotada de la ecuación (1), que es continua en todas partes, a excepción de los puntos de discontinuidad de la función $\varphi(x)$[1]).

Consideremos, en calidad de ejemplo, el problema siguiente: **hallar la solución de la ecuación de la conducción del calor, si la temperatura inicial (para $t = t_0 = 0$) tiene valores constantes, pero diferentes para $x > 0$ y $x < 0$, a saber:**

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 & \text{para } x > 0, \\ T_2 & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

Aplicando la fórmula (12′), se obtiene la solución del problema en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} =$$

$$= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2}\, d\alpha + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha =$$

$$= \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2}\, d\alpha, \tag{26}$$

[1]) Utilizando el método expuesto en el p. 3 del § 2, se puede comprobar que la función $u(x, t)$ se determina unívocamente por las condiciones enumeradas.

puesto que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha^2}\,d\alpha-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-z}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-z}^{0} e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$

$$\left(z=\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right).$$

En particular, si

$$T_2=0,\quad T_1=1,$$

entonces

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right)\qquad\left(z=\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right).$$

El perfil de la temperatura en el momento dado t se representa por la curva

$$f(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

donde z es la abscisa del punto en el cual se determina la temperatura, si se toma como unidad de longitud el valor $2\sqrt{a^2t}$, en dependencia de t. La construcción de esta curva no ofrece dificultad, puesto que la integral

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

llamada comúnmente *integral de los errores*, se encuentra con frecuencia en la teoría de las probabilidades, y para ésta existen tablas detalladas[1]).

---

[1]) Véase, por ejemplo, A. A. Márkov, *Curso de la Teoría de las Probabilidades*, donde se dan las tablas de esta integral con seis cifras decimales. Véase también una tabla más concisa al final de este libro.

La fórmula (26), para T_1 y T_2 arbitrarios, puede ser escrita en la forma

$$u(x, t) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{2} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

De aquí se ve que en el punto $x = 0$ la temperatura es constante todo el tiempo, e igual a la semisuma de los valores iniciales a izquierda y derecha, puesto que $\Phi(0) = 0$.

La solución de la ecuación no homogénea

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (-\infty < x < \infty, \quad t > 0)$$

con condiciones iniciales nulas:

$$u(x, 0) = 0,$$

se puede representar, evidentemente, mediante la fórmula

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau,$$

como se desprende del significado de la función $G(x, \xi, t)$ (véase el p. 4 del § 2). Nosotros no estudiaremos con más detalle esta función, ni tampoco las condiciones de su aplicacion, que deben ser impuestas a la función $f(x, t)$.

2. Problemas de contorno para la semirrecta. Como ya fue indicado en el § 1, p. 4, en los casos en que interesa la distribución de la temperatura en las proximidades de uno de los extremos de la barra y la influencia del otro extremo es insignificante, se conviene en que dicho extremo se halla en el infinito. Esto nos conduce al problema de la determinación de la solución de la ecuación de la conducción del calor

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

en la semirrecta $x > 0$ para valores de $t > 0$, que satisfaga a la condición inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (x > 0)$$

y a la condición de frontera, la cual, según el carácter dado del régimen de frontera, se toma en una de las formas siguientes:

$$u(0, t) = \mu(t) \text{ (primer problema de contorno)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \nu(t) \quad \text{(segundo problema de contorno)},$$

o bien

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda [u(0, t) - \theta(t)] \quad \text{(tercer problema de contorno)}.$$

En lo sucesivo, nos limitaremos a estudiar en detalle sólo el *primer problema de contorno*, que consiste en hallar la solución de la ecuación de la conducción del calor, bajo las condiciones complementarias

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu(t). \tag{28}$$

Para que las condiciones del problema determinen una solución única, es necesario imponer ciertas condiciones en el infinito. Exijamos, como condición complementaria, que la función $u(x, t)$ sea acotada en todas partes:

$$|u(x, t)| < M \text{ para } 0 < x < \infty \text{ y } t \geqslant 0,$$

donde M es cierta constante. De aquí se deduce que la función inicial $\varphi(x)$ debe satisfacer también a la condición de acotación

$$|\varphi(x)| < M.$$

La solución del problema planteado se puede representar en forma de la suma

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

donde $u_1(x, t)$ es la influencia sólo de las condiciones iniciales, y $u_2(x, t)$, la influencia sólo de la condición de frontera. Estas funciones se pueden determinar como las soluciones de la ecuación (1) que satisfacen a las condiciones

$$u_1(x, 0) = \varphi(x), \quad u_1(0, t) = 0 \tag{28'}$$

y

$$u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(0, t) = \mu(t). \tag{28''}$$

Es evidente que la suma de estas funciones satisfará a las condiciones (28). Demostremos, previamente, dos lemas con respecto a la función $u(x, t)$ que se determina por la integral de Poisson

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi)\, d\xi. \tag{29}$$

1. Si la función $\psi(x)$ es impar, es decir, si

$$\psi(x) = -\psi(-x),$$

entonces la función (29)

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi)\, d\xi$$

se anula para $x = 0$,

$$u(0, t) = 0.$$

Aquí se supone, claro está, que la integral que determina a la función $u(x, t)$ converge, lo cual tiene lugar si $\psi(x)$ está acotada. El integrando de la expresión

$$u(0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{\xi^2}{4a^2 t}} \psi(\xi)\, d\xi$$

es impar con respecto a ξ, puesto que es el producto de una función impar por una par. La integral de una función impar entre límites simétricos con respecto al origen de coordenadas es igual a cero; por consiguiente,

$$u(0, t) = 0,$$

lo cual demuestra el lema.

2. **Si la función $\psi(x)$ es par, o sea,**

$$\psi(x) = \psi(-x),$$

la derivada de la función $u(x, t)$, dada por la fórmula (29), es igual a cero para $x = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$$

para todo $t > 0$.

Efectivamente,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\xi)}{2(a^2 t)^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \psi(\xi)\, d\xi \,\Big|_{x=0} = 0,$$

puesto que para $x = 0$ el integrando es impar, si $\psi(\xi)$ es par.

Pasemos ahora a escribir la función $u_1(x, t)$ que satisfaga a las condiciones (28′).

Introduzcamos la función auxiliar $U(x, t)$, definida en la recta infinita $-\infty < x < \infty$ y que satisface a la ecuación, así como también a las condiciones

$$U(0, t) = 0,$$

$$U(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{para} \quad x > 0.$$

Esta función, aplicando el lema, se puede determinar mediante la función inicial $\Psi(x)$, que coincide con $\varphi(x)$ para $x > 0$ y que es su continuación impar para $x < 0$, es decir,

$$\Psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{para} \quad x > 0, \\ -\varphi(-x) & \text{para} \quad x < 0, \end{cases}$$

de forma que

$$U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Psi(\xi)\, d\xi.$$

Tomando los valores de la función $U(x, t)$ sólo en la región que nos interesa, $x \geqslant 0$, se obtiene:

$$u(x, t) = U(x, t) \quad \text{para} \quad x \geqslant 0.$$

Aplicando la definición de la función $\Psi(x)$, tendremos:

$$U(x, t) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Psi(\xi)\, d\xi =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi,$$

donde se hizo el cambio $\xi' = -\xi$ en la primera integral y se aplicó la igualdad

$$\Psi(\xi) = -\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi').$$

Uniendo ambas integrales, se obtiene la función buscada

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} \varphi(\xi)\, d\xi \qquad (30)$$

en forma que no contiene funciones auxiliares. Obsérvese que para $x = 0$ la expresión entre llaves se anula, y $u_1(0, t) = 0$.

Aplicando el lema 2, no es difícil comprobar que la solución de la ecuación de la conducción del calor con la condición de frontera homogénea de segunda especie $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x}(0, t) = 0$ y con la condición inicial $\bar{u}_1(x, 0) = \varphi(x)$ se representa en la forma

$$\bar{u}_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} \varphi(\xi)\, d\xi. \qquad (30')$$

Apliquemos la fórmula obtenida a la resolución del problema sobre el enfriamiento de una barra calentada uniformemente, en cuya frontera se mantiene una temperatura constante, que tomaremos igual a cero. El problema consiste en determinar la solución de la ecuación de la conducción del calor que satisfaga

a las condiciones

$$v_1(x, t_0) = T, \quad v_1(0, t) = 0.$$

Teniendo en cuenta que la condición inicial se da no para $t = 0$, sino para $t = t_0$, se obtiene, en lugar de la fórmula (30),

$$v_1(x, t) = \frac{T}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}\} \frac{d\xi}{\sqrt{a^2(t-t_0)}}. \quad (31)$$

Dividiendo la integral en dos sumandos e introduciendo las variables

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \qquad \alpha_1 = \frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}},$$

se obtiene:

$$v_1(x, t) = T\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right), \quad (31')$$

donde

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$$

es la integral de los errores.

Determinemos ahora la función $u_2(x, t)$, que representa la segunda parte de la solución del primer problema de contorno.

Sea

$$\mu(t) = \mu_0 = \text{const.}$$

La función

$$\bar{v}(x, t) = \mu_0 \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) \quad (32)$$

es la solución de la ecuación de la conducción del calor que satisface a las condiciones

$$\bar{v}(x, t_0) = \mu_0, \qquad \bar{v}(0, t) = 0.$$

De aquí se deduce que la función

$$v(x, t) = \mu_0 - \bar{v}(x, t) = \mu_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right)\right] \quad (33)$$

es precisamente la buscada, puesto que ésta satisface a la misma ecuación y a las condiciones

$$v(x, t_0) = 0 \ (x > 0) \text{ y } v(0, t) = \mu_0 \ (t > t_0).$$

Representemos a $v(x, t)$ en la forma

$$v(x, t) = \mu_0 U(x, t),$$

donde

$$U(x, t) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \qquad (34)$$

es la solución del mismo problema que $v(x, t)$ para $\mu_0 = 1$.

Por definición, la función $U(x, t)$ tiene sentido sólo para $t \geqslant t_0$. Continuemos la definición de esta función, haciendo

$$U(x, t) \equiv 0 \quad \text{para} \quad t < t_0.$$

Es evidente que esta definición concuerda con el valor de la función $U(x, t)$ para $t = 0$ y que la función definida de esta manera satisfará a la ecuación de la conducción del calor para todo t cuando $x > 0$. El valor de frontera de esta función (para $x = 0$) es una función escalonada, igual a cero para $t < t_0$ e igual a la unidad para $t > t_0$. La función $U(x, t)$ se encuentra con gran frecuencia en las aplicaciones y es un eslabón auxiliar para la determinación de $u_2(x, t)$.

Analicemos un segundo problema auxiliar, que consiste en la determinación de la solución de la ecuación de la conducción del calor con las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$v(x, t_0) = 0, \quad v(0, t) = \mu(t) = \begin{cases} \mu_0 \text{ para } t_0 < t < t_1, \\ 0 \text{ para } t > t_1. \end{cases}$$

No es difícil demostrar por verificación directa que

$$v(x, t) = \mu_0 [U(x, t - t_0) - U(x, t - t_1)].$$

En general, si la función de frontera $\mu(t)$ está dada en forma de la función escalonada

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0 & \text{para} \quad t_0 < t \leqslant t_1, \\ \mu_1 & \text{para} \quad t_1 < t \leqslant t_2, \\ \dots & \dots\dots\dots\dots \\ \mu_{n-1} & \text{para} \quad t_{n-1} < t \leqslant t_n, \end{cases}$$

razonando de modo completamente análogo se obtiene que la solución del problema de contorno con tal función $\mu(t)$ se puede escribir como sigue:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-2} \mu_i [U(x, t - t_i) - U(x, t - t_{i+1})] + \\ + \mu_{n-1} U(x, t - t_{n-1}). \qquad (35)$$

Aplicando el teorema del incremento finito, se obtiene:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-2} \mu_i \frac{\partial U(x, t-\tau)}{\partial t}\bigg|_{\tau_i} \Delta\tau + \mu_{n-1} U(x, t-t_{n-1}) \qquad (36)$$

$$\text{para } t_i \leqslant \tau_i \leqslant t_{i+1}.$$

Estudiemos ahora el problema de determinar la solución $u(x, t)$ de la ecuación de la conducción del calor con condición inicial nula y condición de frontera

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (t > 0),$$

donde $\mu(t)$ es una función arbitraria, continua a trozos. Es fácil obtener una solución aproximada de este problema en la forma (36), si se sustituye la función $\mu(t)$ por una función constante a trozos. Pasando al límite, cuando los intervalos en que la función auxiliar es constante disminuyen, se obtiene que el límite de la suma (36) será igual a

$$\int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-\tau)\,\mu(\tau)\,dt,$$

puesto que para $x > 0$

$$\lim_{t-t_{n-1}\to 0} \mu_{n-1} U(x, t-t_{n-1}) = 0.$$

Es evidente que la solución buscada $u_2(x, t)$ del segundo problema debe ser igual a

$$u_2(x, t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-\tau)\,\mu(\tau)\,d\tau. \qquad (37)$$

No nos detendremos con detalle en la licitud del paso al límite y el análisis de las condiciones de aplicación de esta fórmula con respecto a la función $\mu(\tau)$.

No es difícil comprobar que

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{a^2x}{[a^2t]^{3/2}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} =$$

$$= -2a^2\frac{\partial G}{\partial x}(x, 0, t) = 2a^2\frac{\partial G}{\partial \xi}\bigg|_{\xi=0} \quad \left(G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\right)$$

De este modo, la solución buscada, en el caso de una función arbitraria $\mu(t)$, se puede representar en la forma

$$u_2(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t} \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}\,e^{-\left[\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]}\mu(\tau)\,d\tau,$$

o bien

$$u_2(x, t) = 2a^2 \int_{t_0}^{t} \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, 0, t - \tau)\, \mu(\tau)\, d\tau^{1}). \qquad (38)$$

Obsérvese que al obtener la fórmula (38) en ninguna parte se aplicaron las propiedades especiales de la ecuación de la conducción del calor, aparte de su linealidad. Tampoco hemos aplicado la forma analítica de la función $U(x, t)$, sino sólo el hecho de que ésta satisface a las condiciones de frontera o iniciales

$$U(0, t) = 1 \quad \text{para} \quad t > 0,$$
$$U(x, 0) = 0 \quad \text{para} \quad x > 0,$$

o bien

$$U(0, t) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > 0, \\ 0 & \text{para } t < 0. \end{cases}$$

Es evidente que si se estudia la resolución de cierta ecuación diferencial lineal con la condición de frontera

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (t > 0),$$

las condiciones iniciales nulas y las condiciones complementarias de frontera nulas, si éstas tienen lugar (por ejemplo, para $x = l$), la solución de este problema se puede representar en la forma

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial}(x, t - \tau)\, \mu(\tau)\, d\tau, \qquad (39)$$

donde $U(x, t)$ es la solución del problema de contorno análogo para

$$U(0, t) = 1.$$

El principio formulado aquí, llamado *principio de Duhamel*, demuestra que la dificultad fundamental al resolver problemas de contorno la representa un valor de frontera constante. Si el problema de contorno con valor de frontera constante está resuelto, la solución del problema de contorno con condición de frontera variable está dada por la fórmula (39). Este principio se usa con frecuencia al resolver muchos problemas de contorno, exponiendo la solución sólo para una condición de frontera constante, sin explicar que la solución del problema de contorno con $\mu(t)$ variable se da por la fórmula (39).

---

[1]) Esta representación de la solución del primer problema de contorno con condiciones iniciales nulas se da aquí para comodidad de la comparación con la solución del mismo problema que se obtiene en el cap. V, § 4, por otro método.

La suma de las funciones

$$u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

da la solución del primer problema de contorno para la semirrecta, para la ecuación homogénea.

Utilizando la fórmula (27) del p. 1 del § 3 y el principio de la continuación impar, no es difícil comprobar que la solución de la ecuación no homogénea

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (0 < x < \infty, \quad t > 0)$$

con condiciones inicial y de frontera ($u(0, t) = 0$) nulas, se expresa por la fórmula

$$u_3(x, t) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \quad (40)$$

La suma

$$u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) = u(x, t)$$

da la solución del primer problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$
$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

§ 4. PROBLEMAS SIN CONDICIONES INICIALES

Si se estudia el proceso de la conducción del calor en un momento suficientemente alejado del inicial, la influencia de las condiciones iniciales prácticamente no influye en la distribución de la temperatura en el momento de la observación. En este caso, se plantea el problema de hallar la solución de la ecuación de la conducción del calor que satisfaga a las condiciones de frontera de uno de los tres tipos, dados para todo $t > -\infty$. Si la barra está acotada, se dan las condiciones de frontera en ambos extremos de ésta. Para una barra semiinfinita se da sólo una condición de frontera.

Consideremos el primer problema de contorno para una barra semiinfinita:

hallar la solución acotada de la ecuación de la conducción del calor en la región $x > 0$, que satisfaga a la condición

$$u(0, t) = \mu(t), \quad (1)$$

donde $\mu(t)$ es una función dada. Se supone que las funciones $u(x, t)$ y $\mu(t)$ están acotadas en todas partes, es decir, que

$$|u(x, t)| < M,$$
$$|\mu(t)| < M.$$

Como se demostrará más abajo (véase la letra pequeña), la función $u(x, t)$ se determina unívocamente. Tomemos el caso que se encuentra con mayor frecuencia de la condición de frontera

$$\mu(t) = A\cos\omega t. \tag{2}$$

Este problema fue estudiado ya por Fourier, y aplicado por primera vez en la determinación de las oscilaciones térmicas del terreno[1]).

Escribamos la condición de frontera en la forma

$$\mu(t) = Ae^{i\omega t}. \tag{2'}$$

De la linealidad de la ecuación de la conducción del calor, se deduce que las partes real e imaginaria de cierta solución compleja de ésta satisfacen por separado a la misma ecuación.

Si se ha hallado la solución de la ecuación de la conducción del calor que satisface a la condición (2'), su parte real satisface a la condición (2), y la imaginaria, a la condición

$$u(0, t) = \mu_1(t) = A\operatorname{sen}\omega t.$$

Consideremos, pues, el problema:

$$\left.\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) &= Ae^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Buscaremos su solución en la forma

$$u(x, t) = Ae^{\alpha x + \beta t}, \tag{4}$$

donde α y β son constantes por ahora desconocidas.

Sustituyendo la expresión (4) en la ecuación (3) y en la condición de frontera, se halla:

$$\alpha^2 = \frac{1}{a^2}\beta,$$

$$\beta = i\omega,$$

---

[1]) Véase el apéndice I.

de donde

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\sqrt{i} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \pm \left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} \right].$$

Para $u(x, t)$, se tiene:

$$u(x, t) = Ae^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + i\left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right)}. \qquad (5)$$

La parte real de esta solución,

$$u(x, t) = Ae^{\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} \cos\left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right), \qquad (6)$$

satisface a la ecuación de la conducción del calor y a la condición de frontera (2). La fórmula (6), según la elección del signo, determina no una, sino dos funciones. Sin embargo, sólo la función que corresponde al signo de menos satisface a la condición de acotación. De esta manera, la solución del problema planteado se obtiene en la forma

$$u(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} \cos\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x + \omega t\right). \qquad (7)$$

Análogamente se resuelve el problema sin condiciones iniciales para el segmento acotado:

$$\left.\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) &= A\cos\omega t, \\ u(l, t) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Escribiendo la condición de frontera en la forma

$$\hat{u}(0, t) = Ae^{-i\omega t}, \qquad \hat{u}(l, t) = 0,$$

buscaremos la solución en la forma

$$\hat{u}(x, t) = X(x)e^{-i\omega t}. \qquad (9)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (8), se obtiene la ecuación para la función $X(x)$:

$$X'' + \frac{i\omega}{a^2}X = 0, \quad \text{o bien} \quad X'' + \gamma^2 X = 0,$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{i\omega}{a^2}} = \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}(1+i) \qquad (10)$$

y las condiciones complementarias

$$X(0) = A, \quad X(l) = 0. \tag{11}$$

De aquí se obtiene, para la función $X(x)$:

$$X(x) = A\frac{\operatorname{sen}\gamma(l-x)}{\operatorname{sen}\gamma l} = X_1(x) + iX_2(x), \tag{12}$$

donde X_1 y X_2 son las partes real e imaginaria de la función $X(x)$. Para la función $\hat{u}(x, t)$ se obtiene la expresión

$$\hat{u}(x, t) = A\frac{\operatorname{sen}\gamma(l-x)}{\operatorname{sen}\gamma l}e^{-i\omega t}. \tag{13}$$

Tomando la parte real de la función $\hat{u}(x, t)$, se halla la solución del problema inicial sin condiciones iniciales en la forma

$$u(x, t) = X_1(x)\cos\omega t + X_2(x)\operatorname{sen}\omega t. \tag{14}$$

Aquí no damos la expresión explícita de X_1 y X_2, aunque esto no es difícil de efectuar.

Si la función de frontera es la combinación de armónicos de distintas frecuencias, la solución de este problema se puede obtener como superposición de las soluciones que corresponden a cada armónico por separado.

Demostremos la unicidad del problema sin condiciones iniciales para la semirrecta. Partiremos de la fórmula

$$u(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}u(0, \tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} -\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}\right\}u(\xi, t_0)\,d\xi = I_1 + I_2 \tag{15}$$

$$(t \geqslant t_0),$$

que expresa cualquier solución acotada de la ecuación de la conducción del calor mediante su valor inicial $u(x, t_0)$ y su valor de frontera $u(0, t) = \mu(t)$ en la región $x \geqslant 0$, $t \geqslant t_0$.

Demostremos que

$$\lim_{t_0\to-\infty} I_2(x, t) = 0, \tag{16}$$

si

$$|u(x, t)| < M$$

para todo t. En efecto,

$$|I_2| < \frac{M}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int\limits_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha_1^2} d\alpha_1 - \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha_2^2} d\alpha_2 \right\} =$$

$$= \frac{M}{\sqrt{\pi}} 2 \int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}} e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

donde

$$\alpha_1 = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} \text{ y } \alpha_2 = \frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}.$$

De aquí se sigue la igualdad (16), puesto que x y t están fijos, y $t_0 \to -\infty$. Si en la fórmula (15) se fijan x y t y se tiende $t_0 \to -\infty$, entonces $u(x, t)$ será igual al límite sólo del primer sumando, y obtenemos la fórmula

$$u(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau, \tag{17}$$

que demuestra que no puede haber dos soluciones diferentes de nuestro problema. También se puede demostrar que para cualquier función acotada continua a trozos $\mu(t)$, la fórmula (17) representa la solución del problema planteado.

Análogamente se puede estudiar el problema sin condiciones iniciales para el segmento acotado ($0 \leqslant x \leqslant l$). Este problema, sin la condición de acotación, tiene varias soluciones, puesto que la función

$$u_n(x, t) = Ce^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x$$

expresa, para todo n, la solución del problema con valores de frontera nulos. Sin embargo, las soluciones de este tipo no están acotadas cuando $t \to -\infty$, y no cuesta trabajo demostrar la unicidad de la solución acotada del problema planteado.

EJERCICIOS DEL CAPITULO III

1. Hallar la función de influencia de una fuente puntual instantánea de calor para:

a) una barra semiacotada con las condiciones de frontera de primera y segunda especie, si no hay intercambio térmico en la superficie lateral;

b) una barra no acotada, si hay intercambio térmico en la superficie lateral;

c) una barra semiacotada, si hay intercambio térmico en la superficie lateral y con condiciones de frontera de los dos primeros tipos.

2. Hallar la función de influencia de una fuente puntual instantánea de calor para una barra semiacotada de superficie lateral ais-

lada térmicamente para el tercer problema de contorno

$$\left[\text{condición de frontera del tipo } \frac{\partial u}{\partial x} - hu(0, t) = f(t)\right].$$

3. Resolver la ecuación de la conducción del calor para los casos a), b), c) del ejercicio 1, si:

1) en el punto $x = \xi_0$ actúa una fuente de calor $Q = Q(t)$, en particular $Q = Q_0 = \text{const}$;

2) está dada la distribución inicial de la temperatura $u(x, 0) = \varphi(x)$, en particular,

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_0 \text{ para } 0 < x < l, \\ 0 \text{ fuera del intervalo } (0, l); \end{cases}$$

3) las fuentes térmicas están distribuidas con densidad $f(x, t)$ por toda la barra, y la temperatura inicial es igual a cero; analizar, en particular, el caso $f = q_0 = \text{const}$ (fuentes estacionarias).

4. Una barra semiacotada de superficie lateral aislada térmicamente fue calentada uniformemente hasta la temperatura

$$u(x, 0) = u_0 = \text{const} \ (x > 0).$$

El extremo de la barra, a partir del momento $t = 0$, se mantiene a temperatura igual a 0,

$$u(0, t) = 0 \qquad (t > 0).$$

Hallar la temperatura de la barra $u(x, t)$ y, utilizando las tablas de la integral de los errores

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

construir las gráficas con respecto a x en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant l$ de la función $u(x, t)$ para $t = \frac{l^2}{16a^2}$, $t = \frac{l^2}{2a^2}$, $t = \frac{l^2}{a^2}$.

Indicación. Es cómodo introducir las variables sin dimensión

$$x' = \frac{x}{l}, \quad \theta = \frac{a^2 t}{l^2}, \quad v = \frac{u}{u_0}.$$

5. El extremo de un cilindro semiacotado se abre en el momento inicial de tiempo $t = 0$ en la atmósfera, donde la concentración de cierto gas es igual a u_0.

Hallar la concentración del gas en el cilindro $u(x, t)$ para $t > 0$ y $x > 0$, si la concentración inicial es $u(x, t) = 0$. Utilizando las tablas de la integral de los errores, establecer al cabo de cuánto tiempo en la capa que se encuentra a una distancia l del extremo del cilindro la concentración del gas alcanzará el 95% de la concentración exterior. Hallar la ley del movimiento del frente de concentración constante.

6. Al extremo de una barra semiacotada, cuya temperatura inicial era igual a cero, se le conecta un flujo térmico $ku_x(0, t) = q(t)$. Hallar la temperatura $u(x, t)$ de la barra, si:

a) ésta está aislada térmicamente por sus costados;

b) en la superficie lateral de la barra hay un intercambio térmico (por la ley de Newton) con el medio, de temperatura nula.

Estudiar el caso particular $q = q_0 = \text{const}$.

7. El extremo de una barra semiacotada se mantiene a temperatura constante u_0; en la superficie lateral de ésta tiene lugar un intercambio térmico con el medio, cuya temperatura constante es igual a u_1. La temperatura inicial de la barra es nula. Hallar la temperatura $u(x, t)$ de la barra.

8. Resolver los ejercicios 6a, 6b, considerando que $u(x, 0) = u_0 = \text{const.}$

9. Hallar la temperatura permanente a lo largo de una barra semiacotada de superficie lateral aislada térmicamente, en cuyo extremo
a) está dada la temperatura $u(0, t) = A \cos \omega t$;
b) está dado el flujo térmico $Q(t) = B \operatorname{sen} \omega t$;
c) tiene lugar un intercambio térmico, por la ley de Newton, con un medio cuya temperatura varía segun la ley $v(t) = C \operatorname{sen} \omega t$.

10. Utilizando el método de las reflexiones, escribir la función de influencia de una fuente puntual instantánea para una barra acotada de superficie lateral aislada térmicamente, con condiciones de frontera de primera y segunda especie.

11. Una barra no acotada está formada por dos barras homogéneas que se unen en el punto $x = 0$ y poseen las características a_1, k_1 y a_2, k_2 respectivamente. La temperatura inicial es

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 & \text{para } x < 0, \\ T_2 & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

Hallar la temperatura $u(x, t)$ de la barra para el caso en que la superficie lateral esté aislada térmicamente.

APENDICES DEL CAPITULO III

I. ONDAS TERMICAS

El problema de la propagación de las ondas térmicas en el terreno es uno de los primeros ejemplos de aplicación de la teoría matemática de la conducción del calor, desarrollada por Fourier, al estudio de los fenómenos de la naturaleza.

La temperatura en la superficie de la tierra tiene, como es sabido, una periodicidad diaria y anual muy marcada. Estudiemos el problema de la propagación de las oscilaciones térmicas periódicas en el terreno, que consideraremos como un semiespacio homogéneo $0 \leqslant x \leqslant \infty$. Este es un problema característico sin condiciones iniciales, puesto que cuando los procesos térmicos se repiten muchas veces en la superficie, la influencia de la temperatura inicial será menor que la influencia de otros factores que nosotros despreciamos (por ejemplo, la no homogeneidad del terreno). Se llega así al problema siguiente[1]):

[1]) Véase S. Carslaw, *Teoría de la Conducción del Calor*, cap. III, Gostejizdat, 1947.

hallar la solución acotada de la ecuación de la conducción del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 \leqslant x < \infty, \ -\infty < t), \tag{1}$$

que satisfaga a la condición

$$u(0, t) = A \cos \omega t. \tag{2}$$

Este problema fue estudiado en el capítulo III. Su solución tiene la forma (véase el cap. III, § 4, (7))

$$u(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x - \omega t\right). \tag{3}$$

En base a la solución obtenida, se puede dar la siguiente característica del proceso de propagación de una onda térmica en el terreno. Si la temperatura de la superficie cambia periódicamente durante un tiempo largo, en el terreno también se establecen oscilaciones de temperatura con el mismo período, y además:

1. La amplitud de las oscilaciones disminuye exponencialmente con la profundidad:

$$A(x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x},$$

es decir, si las profundidades crecen en progresión aritmética, las amplitudes disminuyen en progresión geométrica (primera ley de Fourier).

2. Las oscilaciones térmicas en el terreno tienen lugar con un desvío de fase. El tiempo δ de retardo de los máximos (mínimos) de temperatura en el terreno con respecto a los momentos correspondientes en la superficie es proporcional a la profundidad:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2\omega a^2}}x$$

(segunda ley de Fourier).

3. La profundidad de penetración del calor en el terreno depende del período de las oscilaciones de temperatura en la superficie. El cambio relativo de la amplitud térmica es igual a

$$\frac{A(x)}{A} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}x}.$$

Esta fórmula muestra que cuanto menor es el período, menor es la profundidad de penetración de la temperatura. Para oscilaciones térmicas con períodos T_1 y T_2, las profundidades x_1 y x_2,

en las cuales tiene lugar un cambio relativo igual de temperatura, están ligadas por la relación

$$x_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\, x_1$$

(tercera ley de Fourier). Así, por ejemplo, la comparación de las oscilaciones diarias y anuales, para las cuales $T_2 = 365\ T_1$, muestra que

$$x_2 = \sqrt{365}\, x_1 = 19{,}1 x_1,$$

es decir, que la profundidad de penetración de las oscilaciones anuales, a igual amplitud en la superficie, sería 19,1 veces mayor que la profundidad de penetración de las oscilaciones diarias.

En calidad de ejemplo, expondremos los resultados de las observaciones de las oscilaciones térmicas anuales en el observatorio Gosh en el Priamurie[1]):

Profundidad (en m)	Amplitudes (en °C)
1	11,5
2	6,8
3	4,2
4	2,6

Estos datos muestran que la amplitud de las oscilaciones anuales en la profundidad de 4 m disminuye hasta un 13,3% de su valor en la superficie, que es igual a 19,5°.

En base a estos datos, se puede determinar el coeficiente de conductividad de temperatura del terreno:

$$\ln \frac{A(x)}{A} = -\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\, x, \qquad a^2 = \frac{\omega x^2}{2 \ln^2 \dfrac{A(x)}{A}},$$

de donde se halla que el coeficiente de conductividad de temperatura del terreno es igual a

$$a^2 = 4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{cm}^2}{\text{seg}}.$$

El tiempo de retardo de la temperatura máxima en la profundidad de 4 m alcanza a 4 meses.

---

[1]) Véase M. I. Sumguín, S. P. Kashurin, N. I. Tolstijin, V. F. Tumel, *Teoría General de la Congelación*, cap. V, ed. de la Acad. de Ciencias de la URSS, 1940.

Sin embargo, debe tenerse en cuenta que la teoría expuesta aquí se refiere a la propagación del calor en un terreno seco, o en las rocas de las montañas. La presencia de humedad complica los fenómenos térmicos en el terrero; en la congelación tiene lugar el desprendimiento de calor latente, que no se tiene en cuenta por esta teoría.

La conductividad de temperatura es una de las características del calor de importancia para el estudio de sus propiedades físicas, así como también para diferentes cálculos técnicos. Uno de los métodos de laboratorio de determinación de la conductividad de temperatura está basado en el estudio de la propagación de las ondas térmicas en las barras[1]).

Supongamos que en el extremo de una barra suficientemente larga se mantiene una temperatura periódica $\mu(t)$. Representando esta función en forma de la serie de Fourier

$$\mu(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{T}t+b_n\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{T}t\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left[\frac{2\pi n}{T}(t-\delta_n^0)\right],$$

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

$$\delta_n^0=\frac{T}{2\pi n}\left(\pi+\operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n}\right),$$

donde T es el período, y tomando las ondas térmicas correspondientes a cada sumando, se obtiene que la temperatura $u(x, t)$, para todo x, será una función periódica del tiempo y su armónico n-ésimo es igual a

$$u_n(x, t)=a_n(x)\cos\frac{2\pi n}{T}t+b_n(x)\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{T}t=$$

$$=A_n e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}}x}\cos\left[\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}}x-\frac{2\pi n}{T}t+\delta_n^0\right],$$

o bien

$$\frac{\sqrt{a_n^2(x_1)+b_n^2(x_1)}}{\sqrt{a_n^2(x_2)+b_n^2(x_2)}}=e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}}(x_1-x_2)}.$$

[1]) *Prácticas de Física*, curso especializado, t. I., ed. Gostejizdat, 1945, ejercicio 35.

Esta fórmula muestra que si se mide la temperatura en ciertos dos puntos x_1 y x_2 durante un período completo, entonces, hallando los coeficientes $a_n(x_1)$, $b_n(x_1)$, $a_n(x_2)$, $b_n(x_2)$ mediante el análisis armónico, se puede determinar el coeficiente de conductividad de temperatura de la barra a^2.

Las oscilaciones periódicas de la temperatura en la barra se pueden generar, por ejemplo, del siguiente modo. Coloquemos uno de los extremos de la barra en un horno eléctrico y conectemos y desconectemos la corriente durante intervalos iguales de tiempo. Como resultado de este calentamiento periódico, en la barra, al cabo de cierto tiempo, se establecerán oscilaciones periódicas de temperatura; midiendo, con un elemento termoeléctrico, las temperaturas $u(x_1, t)$ y $u(x_2, t)$ en dos puntos x_1 y x_2 durante un período completo de variación del régimen de frontera, y sometiendo u_1 y u_2 al análisis descrito más arriba, se puede determinar el coeficiente a^2 de conductividad de temperatura del material del cual está hecha la barra. Es natural que para la aplicación de la teoría que acabamos de exponer, la barra debe estar aislada térmicamente por sus costados, así como también se debe efectuar el control de la temperatura del otro extremo de la barra, para poder aplicar la teoría de las ondas térmicas en una barra semiinfinita.

Para poder aplicar la teoría de las ondas térmicas en una barra semiinfinita, hay que comprobar que la temperatura en el extremo libre de la barra es constante. Esto se controla mediante un elemento termoeléctrico complementario.

II. INFLUENCIA DE LA DESINTEGRACION RADIACTIVA EN LA TEMPERATURA DE LA CORTEZA TERRESTRE

Para juzgar el estado térmico interno de la Tierra, tenemos pocos datos, que se obtienen de observaciones en su superficie. Las nociones fundamentales sobre el campo térmico de la corteza terrestre consisten en lo siguiente. Las oscilaciones diarias y anuales de temperatura tienen lugar en una capa superficial relativamente fina (del orden de los 10 a 20 m para las oscilaciones anuales). Más abajo de esta capa, la temperatura varía muy lentamente con el transcurso del tiempo.

Las observaciones en las minas y en los pozos, que se refieren a los 2 ó 3 km superiores de la corteza terrestre, muestran que la temperatura se eleva con la profundidad por término medio en 3°C por cada 100 m.

Las primeras tentativas de dar una explicación teórica del gradiente geotérmico observado, que tuvieron lugar a fines del

siglo pasado, encontraron dificultades insuperables[1]). Estas tentativas partían de la representación del enfriamiento de la Tierra, calentada en el pasado. La temperatura inicial, que caracteriza este proceso de enfriamiento, debe ser del orden de $T_0 = 1200°$ C (temperatura de fusión de las rocas montañosas); la temperatura superficial tiene orden 0°C y no pudo desviarse en mucho (en más de 100°) de esta magnitud durante todo el período de existencia de la vida en la Tierra. La teoría cuantitativa más sencilla del enfriamiento de la Tierra nos conduce a la resolución de la ecuación de la conducción del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

en el semiespacio $0 < z < \infty$ con las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$u(z, 0) = T_0,$$
$$u(0, t) = 0.$$

La solución de este problema fue analizada en el § 3 del presente capítulo, y está dada por la fórmula

$$u(z, t) = T_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2}\, d\alpha.$$

El gradiente de esta función, para $z = 0$, es igual a

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{a^2 t}}\, e^{-\frac{z^2}{4a^2 t}}\Big|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{a^2 t}}.$$

Sustituyendo aquí los valores conocidos del gradiente geotérmico, $\left.\frac{du}{dz}\right|_{z=0} = \gamma = 3\cdot 10^{-4}\frac{\text{grad}}{\text{cm}}$, $T_0 = 1200\,°\text{C}$, así como también el valor $a^2 = 0{,}006\ \frac{\text{cm}^2}{\text{seg}}$, que corresponde al coeficiente medio de conductividad de temperatura de los granitos y los basaltos, que se determina empíricamente, se obtiene el valor $t = 0{,}85 \times 10^{15}$ seg $= 27\,000\,000$ años para la duración del proceso de enfriamiento. Tal idea de la edad de la Tierra no concordaba en ninguna forma con los datos geológicos. El carácter aproximado de la teoría estudiada (el desprecio de la curvatura de la Tierra, la inconstancia del coeficiente de contuctividad térmica, la inexactitud del valor T_0) no puede, claro está, cambiar el orden

[1]) Véase S. Carslaw, *Teoría de la Conducción del Calor*, cap. III, ed. Gostejizdat, 1947

del valor hallado para la edad de la Tierra, la cual, según los últimos datos, se aprecia aproximadamente en $2\cdot 10^9$ años.

El esquema físico del régimen térmico de la Tierra sufrió una revisión sustancial luego del descubrimiento del fenómeno de la *desintegración radiactiva*. Los elementos radiactivos, desperdigados en la corteza terrestre, al desintegrarse causan su calentamiento, de forma que la ecuación de la conducción del calor debe tener la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+f \qquad \left(f=\frac{A}{c\rho}\right),$$

donde A es la densidad volumétrica de las fuentes térmicas. En base a numerosos experimentos de la radiactividad de las rocas montañosas y su generación de calor, se ha adoptado el valor

$$A=1{,}3\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{cal.}}{\text{cm}^3\,\text{seg}}.$$

Este valor tiene en cuenta el calor que desprende el uranio, el torio y el potasio, conjuntamente con los productos de su desintegración.

Supongamos que la densidad de las fuentes radiactivas dentro del globo terrestre es constante e igual al valor A, determinado para las capas superiores de la corteza terrestre. En este caso, la cantidad de calor que se desprende en todo el globo terrestre durante la unidad de tiempo, será igual a

$$Q=\frac{4}{3}\pi R^3 A.$$

Hagamos una segunda suposición de que la Tierra no se calienta por el calor radiactivo. En este caso, el flujo de calor a través de la unidad de superficie es

$$q=k\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}\geqslant\frac{Q}{4\pi R^2},$$

donde k y $\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}$ son los coeficientes de conductividad térmica y el gradiente geotérmico en la superficie de la Tierra.

De aquí se halla para $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, cuando $z=0$, el valor

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}\geqslant\frac{AR}{3k}\cong 6{,}3\cdot 10^{-2}\,\frac{\text{grad}}{\text{cm}}.$$

donde $R = 6{,}3 \cdot 10^3$ km es el radio de la Tierra, y $k = 0{,}004$, el valor medio del coeficiente de conductividad térmica de las rocas sedimentarias.

De este modo, el gradiente geotérmico, calculado bajo la hipótesis de que la distribución de los elementos radiactivos es constante, y que la Tierra no se calienta por la desintegración radiactiva, supera en dos órdenes al valor observado del coeficiente geotérmico

$$\gamma = 3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{grad}}{\text{cm}}.$$

Eliminemos la hipótesis de la constancia de la distribución de los elementos radiactivos y supongamos que éstos estan distribuidos en una capa de potencia H en la superficie de la Tierra. Despreciando la curvatura de la Tierra, se obtiene, para determinar la temperatura estacionaria, la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \begin{cases} -\dfrac{A}{k} & \text{para} \quad 0 \leqslant z \leqslant H, \\ 0 & \text{para} \quad z > H \end{cases}$$

con las condiciones

$$u(0) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z \to \infty} = 0.$$

Es evidente que la solución del problema planteado es igual a

$$u(z) = \begin{cases} \dfrac{A}{k}\left(Hz - \dfrac{z^2}{2}\right), & 0 \leqslant z \leqslant H, \\ \dfrac{A}{k}\dfrac{H^2}{2}, & z > H, \end{cases}$$

puesto que esta función es continua conjuntamente con su derivada primera para $z = H$ y satisface a las condiciones del problema.

Determinando el valor del gradiente de esta función para $z = 0$, igual a

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{AH}{k},$$

y comparándolo con el valor observado

$$\gamma = 3\cdot 10^{-4}\ \frac{\text{grad}}{\text{cm}},$$

se halla que

$$H = \frac{\gamma k}{A} \cong 10^6\ \text{cm} = 10\ \text{km}.$$

Apreciemos la influencia de la hipótesis hecha de que la temperatura es estacionaria sobre la magnitud del gradiente geotérmico. Para esto, analicemos la solución de la ecuación de la conducción del calor

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f,$$

$$f = \begin{cases} \dfrac{A}{c\rho}, & 0 \leqslant z \leqslant H, \\ 0, & z > H \end{cases}$$

con condiciones iniciales y de frontera nulas:

$$w(z, 0) = 0,$$
$$w(0, t) = 0.$$

La solución de este problema se expresa, como vimos en el § 3, por la integral

$$w(z, t) = \int_0^\infty \int_0^t G(z, \zeta;\ t-\tau) f(\zeta)\, d\tau\, d\zeta,$$

donde G es la función de la fuente para la semirrecta, igual a

$$G(z, \zeta;\ t-\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{a^2(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\}.$$

Calculemos el valor del gradiente para $z = 0$, tomando en cuenta el valor de la función f:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{A}{c\rho 2\sqrt{\pi}} \int_0^H \int_0^t \frac{\zeta}{\sqrt{[a^2(t-\tau)]^3}}\, e^{-\frac{\zeta^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\zeta\, d\tau =$$

$$= \frac{A}{c\rho\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \int_0^{\frac{H^2}{4a^2(t-\tau)}} e^{-\alpha}\, d\alpha\, d\tau =$$

$$= \frac{A}{c\rho\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2\theta}} \left[1 - e^{-\frac{H^2}{4a^2\theta}}\right] d\theta, \quad \text{donde} \quad \theta = t - \tau.$$

De esta manera,

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{A}{c\rho\sqrt{\pi}}\left\{\frac{2\sqrt{t}}{a}-\frac{H}{a^2}\int_{\sigma_0}^{\infty}e^{-\sigma^2}\frac{d\sigma}{\sigma^2}\right\},$$

donde

$$\sigma=\frac{H}{2\sqrt{a^2\theta}},\quad \sigma_0=\frac{H}{2\sqrt{a^2t}},\quad \frac{d\sigma}{\sigma^2}=-\frac{a^2}{H}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\theta}}.$$

Calculemos la integral

$$\int_{\sigma_0}^{\infty}e^{-\sigma^2}\frac{d\sigma}{\sigma^2}=-\left.\frac{e^{-\sigma^2}}{\sigma}\right|_{\sigma_0}^{\infty}-2\int_{\sigma_0}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma=\frac{e^{-\sigma_0^2}}{\sigma_0}-2\int_{\sigma_0}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma,$$

de donde

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{A}{c\rho a^2}\left\{\frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\left[1-e^{-\frac{H^2}{4a^2t}}\right]+H\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{H}{2\sqrt{a^2t}}}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma\right\}. \quad (1)$$

Obsérvese que

$$\lim_{t\to\infty}\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{A}{k}H,$$

puesto que $c\rho a^2 = k$, el límite del primer sumando entre llaves es igual a cero, y el del segundo, igual a H.

Calculemos la desviación de $\frac{\partial w}{\partial z}$ de su valor límite para

$$t = 2\cdot 10^9 \text{ años} = 6\cdot 10^{16} \text{ seg}.$$

El valor de σ_0 es pequeño:

$$\sigma_0=\frac{H}{2\sqrt{a^2t}}=\frac{10^6}{2\sqrt{6\cdot 10^{-3}\cdot 6\cdot 10^{16}}}=\frac{1}{2\cdot 19}\cong 0{,}025.$$

Desarrollando las funciones que figuran en la fórmula (1) en series, se obtiene:

$$\frac{A}{k}H-\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{A}{k}H\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_0}[\sigma_0^2+\ldots]+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sigma_0\right\}\cong\frac{A}{k}H\cdot 0{,}04,$$

es decir, $\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}$ se diferencia de su valor límite en 4%.

No hubiera sido difícil calcular la función $w(z, t)$ para $z > 0$ y comprobar que, para $z \gg H$, $w(z, t)$ aún se diferencia

en mucho de su valor límite para t igual a la edad de la Tierra[1]) (a pesar de que, como hemos visto, el gradiente en la superficie es prácticamente igual a su valor límite).

Los razonamientos que acabamos de exponer son, claro está, sólo de carácter apreciativo. Sin embargo, tomando en cuenta la gran estabilidad de la velocidad de la desintegración radiactiva, que no varía bajo la acción de las temperaturas y presiones que nos son accesibles, debemos llegar a la conclusión de que la concentración de los elementos radiactivos debe disminuir rápidamente con la profundidad, si nos basamos en el valor de A para las capas superiores de la corteza terrestre, establecido mediante numerosas mediciones. Hasta hoy no existe ninguna explicación física que permita establecer la ley de disminución de la concentración de los elementos radiactivos con la profundidad.

III. METODO DE LA SEMEJANZA EN LA TEORIA DE LA CONDUCCION DEL CALOR

Para resolver varios problemas de la conducción del calor, resulta muy útil el *método de la semejanza*. En calidad de ejemplo consideraremos dos problemas.

1. Función de la fuente para la recta infinita. La ecuación de la conducción del calor, como es fácil observar, permanece invariante bajo la transformación de las variables

$$\left.\begin{aligned} x' &= kx, \\ t' &= k^2 t, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

es decir, si las escalas de longitud cambian en k veces, la del tiempo debe cambiarse en k^2 veces.

Ante todo, buscaremos la solución de la ecuación de la conducción del calor

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{2}$$

con la condición inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{para} \quad x > 0, \\ 0 & \text{para} \quad x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Bajo el cambio de escalas indicado más arriba, la condición inicial (3) también permanece invariante; por esto, para la función

---

[1]) Véase A. N. Tíjonov, *Sobre la Influencia de la Desintegración Radiactiva en la Temperatura de la Corteza Terrestre*, Izv. AN URSS, sección de matem. y ciencias nat., 1937, págs. 431-459.

$u(x, t)$ debe tener lugar la igualdad

$$u(x, t) = u(kx, k^2t) \tag{4}$$

para valores cualesquiera de x, t y k.

Haciendo

$$k = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \tag{5}$$

se obtiene:

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{4}\right) = u_0 f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \tag{6}$$

De este modo, u depende sólo del argumento

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}. \tag{7}$$

Calculando las derivadas para u de la fórmula (6),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_0 \frac{d^2 f}{dz^2} \cdot \frac{1}{4t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x \cdot u_0}{4t^{3/2}} \frac{df}{dz} = -u_0 \cdot \frac{z}{2t} \frac{df}{dz},$$

sustituyendo en la ecuación de la conducción del calor (2) y simplificando entre el factor $\frac{u_0}{4t}$, se obtiene:

$$a^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = -2z \frac{df}{dz} \tag{8}$$

con las condiciones complementarias

$$f(-\infty) = 0, \quad f(\infty) = 1, \tag{9}$$

que corresponden al valor inicial para la función u.

Integrando la ecuación (8), tendremos:

$$a^2 \frac{f''}{f'} = -2z, \quad f' = Ce^{-\frac{z^2}{a^2}},$$

$$f = C \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} d\xi = C_1 \int_{-\infty}^{\frac{z}{a}} e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

Aquí el límite inferior se ha escogido de modo que se cumpla la primera condición (9). Para satisfacer a la segunda condición

(9), hay que poner:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

De esta forma,

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}} e^{-\xi^2}\, d\xi = \frac{u_0}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right], \qquad (10)$$

donde

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2}\, d\xi$$

(integral de los errores). Si el valor inicial tiene la forma

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{para } x > \bar{x}, \\ 0 & \text{para } x < \bar{x}, \end{cases} \qquad (11)$$

entonces

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right]. \qquad (12)$$

Resolvamos ahora un segundo problema auxiliar, donde los valores iniciales se dan en la forma

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{para } x_2 < x, \\ u_0 & \text{para } x_1 < x < x_2, \\ 0 & \text{para } x < x_1. \end{cases} \qquad (13)$$

En este caso,

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right].$$

La temperatura inicial u_0 corresponde a una cantidad de calor

$$Q = c\rho\,(x_2 - x_1)\, u_0$$

Si

$$Q = c\rho,$$

entonces

$$u(x, t) = -\frac{1}{x_2 - x_1}\cdot\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right]. \qquad (14)$$

La función de influencia de una fuente concentrada en un punto es, evidentemente, el límite de la función $u(x, t)$ cuando $x_2 - x_1 \to 0$.

El paso al límite en la fórmula (14) nos da:

$$u(x, t) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right]_{\xi=x_1}. \qquad (15)$$

puesto que en el segundo miembro de dicha fórmula se encuentra una razón de diferencias, cuyo límite es la derivada de (15).

Efectuando la derivación, se halla:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4a^2t}}, \qquad (16)$$

es decir, $u(x, t) = G(x, x_1, t)$ es la función de la fuente puntual instantánea.

2. Problemas de contorno para la ecuación cuasilineal de la conducción del calor. Estudiemos la ecuación cuasilineal de la conducción del calor

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = c\rho\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (17)$$

cuyo coeficiente de conductividad térmica depende de la temperatura.

Hallemos la solución de esta ecuación que satisface a las condiciones de frontera e inicial

$$u(0, t) = u_1, \quad u(x, 0) = u_2. \qquad (18)$$

En este caso, la transformación (1) tampoco cambia a la ecuación (17) y a las condiciones complementarias (18). De aquí se deduce que

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = f(z) \quad \left(z = \frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \qquad (19)$$

Utilizando esta expresión, se obtiene para f la ecuación

$$\frac{d}{dz}\left[k(f)\frac{df}{dz}\right] = -2c\rho z\frac{df}{dz} \qquad (20)$$

con las condiciones complementarias

$$f(0) = u_1, \quad f(\infty) = u_2. \qquad (21)$$

Cuando no se logra hallar la función f analíticamente, se la puede determinar mediante la integración numérica.

La ecuación (20) tiene una solución única que satisface a las condiciones (21), bajo hipótesis muy generales con respecto a las

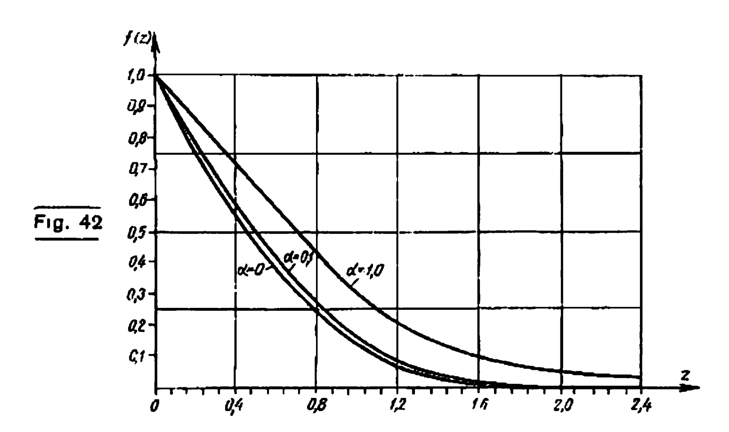


Fig. 42

funciones k y $c\rho$. Sin embargo, no nos detendremos en demostrar esto.

Consideremos, como ejemplo, la ecuación (17), donde $k(u) = k_0 + k_1 u$ es una función lineal, y $c\rho$, una magnitud constante. Variando la escala del tiempo y la de los valores de u, se obtiene, para la función transformada, la ecuación $\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\alpha u)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial u}{\partial t}$ con condiciones iniciales y de frontera $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 1$. Haciendo

$$u(x, t) = f(z), \quad z = \frac{x}{2\sqrt{t}},$$

se obtiene para f la ecuación

$$\frac{d}{dz}\left[(1+\alpha f)\frac{df}{dz}\right] = -2z\frac{df}{dz}, \quad f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0. \quad (22)$$

Si el coeficiente de conductividad térmica $k(u)$ es una función potencial de la temperatura, $k(u) = k_0 u^\sigma$, $k_0 = \text{const} > 0$, $\sigma > 0$, y en lugar de (18) se dan las condiciones $u(0, t) = u_0 t^n$, $n > 0$, $u(x, 0) = 0$, la ecuación (17) para $c\rho = 1$ posee soluciones del tipo $u(x, t) = t^n f(z)$, donde $z = \frac{x}{ct^m}$, $m = \frac{1+n\sigma}{2}$, $c = \text{const} > 0$. En particular, para $n = \sigma$ se obtienen soluciones del tipo de «ondas térmicas», que se propagan con velocidad

finita $c: u(x, t) = u_0 t^n \left(1 - \frac{x}{ct}\right)^{1/n}$ para $x \leqslant ct$, $u(x, t) = 0$ para $x \geqslant ct$ (véase el Complemento I, fig. 87). En la fig. 42 se muestran los resultados de la integración numérica de la ecuación (22) para distintos valores de α.

IV. PROBLEMA DEL CAMBIO DE FASE

Al variar la temperatura de un cuerpo, puede cambiar su estado físico, en particular, al pasar la temperatura por el punto de fusión, tiene lugar el paso de la fase líquida a la sólida (o el paso inverso). En la superficie del cambio de fase se conserva todo el tiempo la temperatura constante. Cuando la superficie del cambio de fase se mueve, hay un desprendimiento del calor latente de solidificación (fusión). Formulemos las condiciones complementarias que deben cumplirse en la superficie de solidificación[1]).

Consideremos el problema plano, cuando la superficie de separación es el plano $x = \xi(t)$. Durante el tiempo t, $t + \Delta t$, la frontera $x = \xi$ se desplaza desde el punto $\xi = x_1$ hasta el $\xi = x_2 = x_1 + \Delta\xi$. Aquí se solidifica una masa $\rho\Delta\xi$ (o se funde, si $\Delta\xi < 0$) y se desprende la cantidad correspondiente de calor $\lambda\rho\Delta\xi$.

Para que tenga lugar el balance térmico, esta cantidad de calor debe ser igual a la diferencia de las cantidades de calor que pasan a través de las fronteras $\xi = x_1$ y $\xi = x_2$, es decir, debe cumplirse la condición

$$\left[k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x_1} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x_2} \right] \Delta t = \lambda\rho\,\Delta\xi,$$

donde k_1 y k_2 son los coeficientes de conductividad térmica de la primera y la segunda fase y λ, el calor latente de fusión.

Pasando al límite cuando $\Delta t \to 0$, obtenemos la condición complementaria en la frontera de separación en la siguiente forma:

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=\xi} = \lambda\rho \frac{d\xi}{dt}.$$

Esta condición tiene lugar tanto para el proceso de solidificación $\left(\text{cuando } \Delta\xi > 0 \text{ y } \frac{d\xi}{dt} > 0\right)$, como para el de fusión (cuando

[1]) Véase F. Frank y R. Mises, *Ecuaciones Diferenciales e Integrales de la Física matemática*, cap XIII, ed. Gostejizdat, 1937.

$\Delta\xi < 0$ y $\frac{d\xi}{dt} < 0\Big)$; el sentido del proceso se determina por el signo del primer miembro.

Consideremos el proceso de congelación del agua, en el cual la temperatura del cambio de fase es igual a cero. Tomaremos la masa de agua $x \geqslant 0$, limitada por un lado por el plano $x = 0$. En el momento inicial $t = 0$, el agua posee una temperatura constante $c > 0$. Si en la superficie $x = 0$ se mantiene todo el tiempo una temperatura constante $c_1 < 0$, la frontera de congelación $x = \xi$ penetrará con el transcurso del tiempo dentro del líquido.

El problema sobre la distribución de la temperatura cuando hay un cambio de fase y sobre la velocidad del movimiento de la frontera de separación de las fases (por ejemplo, dentro del agua que se congela), se reduce a la resolución de las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{para} \quad 0 < x < \xi, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad \text{para} \quad \xi < x < \infty \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

con las condiciones complementarias

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= c_1 \quad \text{para} \quad x = 0, \\ u_2 &= c \quad \text{para} \quad t = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

y las condiciones en la frontera de congelación

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{para} \quad x = \xi, \tag{3}$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=\xi} = \lambda\rho \frac{d\xi}{dt}, \tag{4}$$

donde k_1, a_1^2 y k_2, a_2^2 son los coeficientes de conductividad térmica y de conductividad de temperatura de las fases sólida y líquida respectivamente. El problema (1)—(4) se llama con frecuencia problema de Stephan, problema del cambio de fase, o problema de la congelación.

Buscaremos la solución del problema en la forma

$$u_1 = A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right),$$

$$u_2 = A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right),$$

donde A_1, B_1, A_2 y B_2 son constantes por ahora indeterminadas, y Φ, la integral de los errores:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi.$$

Al satisfacer a las condiciones (2) y (3), se obtiene:

$$A_1 = c_1, \quad A_2 + B_2 = c$$

de la condición (2) y

$$A_1 + B_1 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_1\sqrt{t}}\right) = 0,$$

$$A_2 + B_2 \Phi\left(\frac{\xi}{2a_2\sqrt{t}}\right) = 0$$

de la condición (3). Las últimas condiciones deben tener lugar para valores de t cualesquiera. Esto es posible sólo si se cumple la igualdad

$$\xi = \alpha \sqrt{t}, \tag{5}$$

donde α es cierta constante. La relación (5) determina la ley del movimiento de la frontera de congelación.

Para las constantes A_1, B_1, A_2, B_2 y α se obtienen las expresiones

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= c_1, & B_1 &= -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)}, \\ A_2 &= -\frac{c\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}, & B_2 &= \frac{c}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Para determinar la constante α, hay que utilizar la relación (1)

$$\frac{k_1 c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} + \frac{k_2 c e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{a_2\left[1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right]} = -\lambda\rho\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{7}$$

La solución de esta ecuación trascendente nos da el valor de α. La existencia de al menos una solución para $c_1 < 0$, $c > 0$,

ya se desprende de que cuando α varía desde 0 hasta ∞, el primer miembro de la ecuación varía desde $-\infty$ hasta $+\infty$[1]), y el segundo, desde 0 hasta $-\infty$. En el caso en que c sea igual a la temperatura de fusión ($c = 0$), las expresiones (6) y (7) para hallar los coeficientes toman una forma más sencilla:

$$A_2 = B_2 = 0,$$

$$A_1 = c_1, \quad B_1 = -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} \tag{6'}$$

y

$$\frac{k_1 c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} = -\lambda\rho\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{7'}$$

Haciendo $\frac{\alpha}{2a_2} = \beta$, se puede escribir la ecuación (7′) en la forma que sigue:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\beta^2}}{\Phi(\beta)} = -D\beta,$$

donde la constante D se determina mediante la expresión

$$D = \frac{\lambda\rho a_1^2}{k_1 c_1} < 0.$$

Utilizando la gráfica de la función $\varphi(\beta') = \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{\pi}\,\varphi(\beta)}$, expuesta en la fig. 43, se puede determinar gráficamente el valor de α con facilidad.

La solución del problema sobre la congelación también se puede obtener mediante el método de semejanza, expuesto en el apéndice III de este capítulo. El problema de la congelación es en cierto sentido un caso límite de los problemas de contorno no lineales, estudiados en el apéndice III. En efecto, los coeficientes de conductividad térmica y de capacidad calorífica en el problema de la congelación son funciones constantes a trozos y, además, para $u = 0$ la capacidad calorífica tiene un valor infinitamente grande. Este caso se puede obtener como el límite, cuando $\varepsilon \to 0$, si el calor latente no se desprende instantáneamente, sino en cierto intervalo $-\varepsilon$, $+\varepsilon$, cumpliéndose, además,

---

[1]) Para la representación asintótica de la función $1 - \Phi(z)$ para $z \to \infty$, véase la pág. 806.

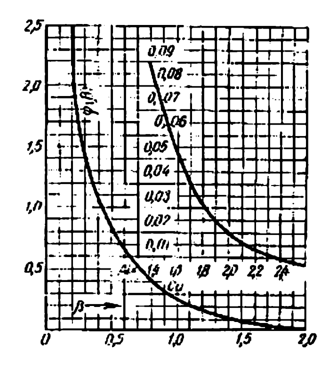


Fig. 43

la condición

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} c(u)\,du = \lambda.$$

Sin embargo, este problema se puede resolver también directamente, aplicando el método de semejanza. No es difícil comprobar que todas las condiciones del problema permanecen invariantes, si se aumenta la escala de longitud en k veces, y la del tiempo, en k^2 veces. Esto significa que la solución del problema depende del argumento $\frac{x}{\sqrt{t}}$, es decir, que

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

De aquí se deduce, en particular, que el movimiento de la isoterma nula se describirá mediante la ecuación $\xi = \alpha\sqrt{t}$, donde α es el valor del argumento para el cual $f(\alpha) = 0$. Para hallar la función f se tienen las siguientes condiciones:

$$a_1^2 \frac{d^2 f_1}{dz^2} = -2z \frac{df_1}{dz} \quad \text{para} \quad 0 < z < \alpha,$$

$$a_2^2 \frac{d^2 f_2}{dz^2} = -2z \frac{df_2}{dz} \quad \text{para} \quad \alpha < z < \infty;$$

$$f_1(0) = c_1; \quad f_2(\infty) = c; \quad f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0;$$

$$k_1 f_1'(\alpha) - k_2 f_2'(\alpha) = \lambda\rho \frac{\alpha}{2}.$$

Por esto, la función $f(z)$ tiene la forma siguiente:

$$f(z)=\begin{cases} f_1(z)=A_1+B_1\Phi\left(\dfrac{z}{2a_1}\right), & \text{si} \quad 0<z<\alpha, \\ f_2(z)=A_2+B_2\Phi\left(\dfrac{z}{2a_2}\right), & \text{si} \quad \alpha<z<\infty. \end{cases}$$

Para determinar las constantes A_1, B_1, A_2, B_2, debemos utilizar las condiciones (3) y (4), de las cuales se desprenden las fórmulas (6). Para la determinación de α se obtiene la condición (7). De esta forma, la parte analítica de la resolución es igual en ambos métodos.

Los razonamientos que acabamos de exponer demuestran que el problema sobre la congelación se puede resolver también en los casos en que el calor latente se desprende no a una temperatura fija, sino en cierto intervalo de temperaturas. Por un método semejante, se puede resolver el problema si hay no una, sino varias temperaturas críticas, lo cual se encuentra en las transformaciones de fases en el proceso de paso de una estructura cristalina a otra, por ejemplo, en la recristalización del acero. El método más efectivo de resolución numérica de los problemas sobre cambios de fase, es el método de las diferencias finitas, que se puede aplicar al caso de dos y tres variables espaciales, si hay varios cambios de fase (véase el Complemento I, § 4).

V. ECUACION DE EINSTEIN—KOLMOGOROV

Las partículas microscópicas que se encuentran en un medio en estado de suspensión libre, efectúan un movimiento desordenado, que se llama browniano. Designemos la posibilidad de que una partícula, que sale del punto M_0 en el momento t_0, se halle en el momento t en un entorno pequeño ΔV del punto M, por la función

$$W(M, t; M_0, t_0)\cdot\Delta V. \tag{1}$$

La probabilidad aquí se comprende en el sentido de que si durante cierto intervalo pequeño $t_0+\Delta t$ del punto M_0 sale una cantidad suficientemente grande N de partículas (y la interacción entre éstas es despreciablemente pequeña), la concentración de estas partículas para $\Delta t\to 0$ en el punto M, en el momento t, será igual a $W(M, t; M_0, t_0)$, si se toma como unidad de masa toda la masa de partículas que salen del punto M_0.

En la difusión de un gas, que tiene lugar en cierto medio (por ejemplo, en el aire), nos encontramos con un fenómeno semejan-

te. La función $W(M, t; M_0, t_0)$ es la función de una fuente puntual que corresponde a la masa unitaria.

Es evidente que

$$\int W(M, t; M_0, t_0)\, dV_M = 1 \quad (t > t_0) \tag{2}$$

y que si la concentración inicial de las partículas en cierto momento t_0 es igual a $\varphi(M)$, la concentración $u(M, t)$ de estas partículas en el momento $t > t_0$ será igual a

$$u(M, t) = \int W(M, t; P, t_0)\, \varphi(P)\, dV_P, \tag{3}$$

donde la integral se toma por todo el espacio.

De la última igualdad se obtiene la ecuación[1])

$$W(M, t; M_0, t_0) = \int W(M, t; P, \theta)\, W(P, \theta; M_0, t_0)\, dV_P \tag{4}$$
$$(t_0 < 0 < t),$$

que tiene lugar para todo valor $t_0 < \theta < t$. Esta última ecuación es llamada *ecuación de Einstein-Kolmogórov*.

Demostremos que bajo condiciones determinadas, impuestas a la función $W(M, t; M_0, t_0)$, la solución de la ecuación de Einstein-Kolmogórov satisface a cierta ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico. Analicemos el caso en que la posición del punto M se caracteriza por una sola coordenada x. Supongamos que la función $W(x, t; x_0, t_0)$ satisface a las condiciones siguientes:

1°

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\overline{x - \xi}}{\tau} = \lim \frac{1}{\tau} \int (x - \xi)\, W(x, t + \tau; \xi, t)\, dx = A(\xi, t). \tag{5}$$

Si durante el tiempo τ la partícula pasa de la posición ξ a la posición x, entonces $\frac{\overline{x - \xi}}{\tau}$ es la velocidad media de la partícula. De este modo, la primera condición significa la imposición de que exista la velocidad finita del movimiento ordenado de la partícula.

2°

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\overline{(x - \xi)^2}}{\tau} = \lim \frac{1}{\tau} \int (x - \xi)^2\, W(x, t + \tau, \xi, t)\, dx = 2B(\xi, t). \tag{6}$$

La magnitud $(x - \xi)^2$ no depende de la dirección del desplazamiento del punto x con respecto al ξ. El valor medio del cuadrado

---

[1]) Véase M. A. Leontóvich, *Física Estadística*, cap. VI, ed. Gostejizdat, 1944; A. N. Kolmogórov, *Métodos Analíticos de la Teoría de las Probabilidades*, Uspéji Matematícheskij Naúk, fasc. V, 1938.

de la desviación durante un tiempo τ

$$\overline{(x-\xi)^2} = \int (x-\xi)^2\, W(x,\, t+\tau;\ \xi,\, t)\, dx$$

se considera, por lo general, como medida del desorden del movimiento en este intervalo de tiempo. La condición 2° indica la hipótesis de la dependencia lineal de la media del cuadrado con respecto al tiempo para pequeños τ.

3°

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\overline{|x-\xi|^3}}{\tau} = \lim \frac{1}{\tau} \int |x-\xi|^3 \cdot W(x,\, t+\tau;\ \xi,\, t)\, dx = 0. \quad (7)$$

La función $W(x,\, t+\tau;\ \xi,\, t)$, que es función de la fuente puntual, debe disminuir rápidamente, para pequeños valores de τ, cuando $|x-\xi| \to \infty$, y crecer cuando $|x-\xi|$ es pequeño.

Para obtener la ecuación diferencial de Einstein-Kolmogórov, multipliquemos ambos miembros de la ecuación (4) por una función arbitraria $\psi(x)$, que se anule conjuntamente con su derivada en las fronteras de la región de integración, e integremos sobre toda esta región:

$$\int W(x,\, t+\tau;\ x_0,\, t_0)\, \psi(x)\, dx =$$
$$= \int W(\xi,\, t;\ x_0,\, t_0)\, d\xi \int W(x,\, t+\tau;\ \xi,\, t)\, \psi(x)\, dx.$$

Desarrollando en el segundo miembro la función $\psi(x)$ en serie de Taylor con respecto a $x-\xi$:

$$\psi(x) = \psi(\xi) + \psi'(\xi)(x-\xi) + \frac{\psi''(\xi)}{2}(x-\xi)^2 + \frac{\psi'''(\xi^*)}{3!}(x-\xi)^3,$$

donde ξ^* es un valor intermedio, comprendido entre x y ξ, y dividiendo entre τ, tendremos, después de transformaciones sencillas:

$$\int \psi(x) \frac{W(x,\, t+\tau;\ x_0,\, t_0) - W(x,\, t;\ x_0,\, t_0)}{\tau}\, dx =$$
$$= \int W(\xi,\, t;\ x_0,\, t_0) \left[\psi'(\xi) \frac{\overline{x-\xi}}{\tau} + \psi''(\xi) \frac{\overline{(x-\xi)^2}}{2\tau} \right] d\xi +$$
$$+ \frac{1}{3!\tau} \int\int \psi'''(\xi^*)(x-\xi)^3\, W(\xi,\, t;\ x_0,\, t_0)\, W(x,\, t+\tau;\ \xi,\, t)\, d\xi\, dx.$$

Suponiendo que $\psi'''(x)$ está acotada:

$$|\psi'''(x)| < A$$

y teniendo en cuenta que

$$\int W(\xi, t;\ x_0, t_0)\, d\xi = 1,$$

se obtiene:

$$\left| \frac{1}{\tau} \iint \psi'''(\xi^*)(x-\xi)^3 W(\xi, t;\ x_0, t_0) W(x, t+\tau;\ \xi, t)\, d\xi\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A}{\tau} \int |x-\xi|^3 W(x, t+\tau;\ \xi, t)\, dx = \frac{A\,\overline{|x-\xi|^3}}{\tau}.$$

De la condición 3° se deduce que esta expresión tiende a cero cuando $\tau \to 0$. Por esto, pasando al límite cuando $\tau \to 0$ y aplicando las condiciones 1°, 2°, se obtiene:

$$\int \psi(x) \frac{\partial W(x, t;\ x_0, t_0)}{\partial t} dx =$$

$$= \int W(\xi, t;\ x_0, t_0)[\psi'(\xi) A(\xi, t) + \psi''(\xi) B(\xi, t)]\, d\xi.$$

Después de integrar por partes el segundo miembro, tomando en cuenta que la función ψ se anula conjuntamente con su derivada en la frontera de la región de integración, se obtiene:

$$\int \psi(x) \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial (AW)}{\partial x} - \frac{\partial^2 (BW)}{\partial x^2} \right] dx = 0.$$

Como esta relación debe tener lugar para una función $\psi(x)$ arbitraria, para la función de la probabilidad $W(x, t;\ x_0, t_0)$ se obtiene la *ecuación diferencial de Einstein-Kolmogórov*

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial (AW)}{\partial x} + \frac{\partial^2 (BW)}{\partial x^2}. \tag{8}$$

La ecuación obtenida es de tipo parabólico, en forma semejante a la ecuación de la conducción del calor, y se puede escribir en la forma

$$W_t = \frac{\partial}{\partial x}(BW_x) + \alpha W_x + \beta W, \tag{9}$$

donde

$$\alpha = -A + B_x,\ \beta = -A_x + B_{xx} - \alpha_x.$$

De la ecuación (9) se aprecia que la magnitud B tiene el significado físico de coeficiente de la difusión. Si el proceso considerado es homogéneo en el espacio y el tiempo, es decir, la función W depende sólo de la diferencia $\xi = x - x_0$ y $\theta = t - t_0$, los

coeficientes A y B no dependen de x y t, y son constantes. La ecuación (8) es en este caso una ecuación con coeficientes constantes:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -A\frac{\partial W}{\partial x} + B\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Si la función W depende sólo de $|x-\xi|$, es decir, si las probabilidades de desplazamiento a derecha e izquierda en distancias iguales del punto ξ son iguales, es evidente que A debe ser nulo. Analíticamente, esto se desprende de la fórmula (5), en virtud de que el integrando es impar.

En este caso, la ecuación (8) es la ecuación más simple de la conducción del calor

$$\frac{\partial W}{\partial t} = B\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{11}$$

VI. FUNCION δ

1. Definición de la función δ. Conjuntamente con las magnitudes distribuidas en forma continua (masa, carga, fuentes térmicas, impulso mecánico, etc.), con frecuencia hay que operar con magnitudes concentradas (masa puntual, carga puntual, fuente puntual de calor, impulso concentrado, etc.). No se debe olvidar que estos conceptos son «imágenes límite» y pueden ser caracterizadas mediante el concepto de «funciones generalizadas»[1]).

Teniendo en cuenta el significado físico del problema, consideremos el potencial en el punto M (véase el capítulo IV, § 5) de la masa unitaria, concentrada dentro de cierto volumen T en un entorno del punto M_0. Tomemos cierta sucesión de funciones $\{\rho_n\}$ $(\rho_n > 0)$, cada una de las cuales es igual a cero fuera de la esfera $S_{\varepsilon_n}^{M_0}$ de radio ε_n, con centro en el punto M_0, donde $\varepsilon_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y para las cuales, a partir de un cierto n,

$$\iiint_T \rho_n(P)\,d\tau_P = \iiint_{S_{\varepsilon_n}^{M_0}} \rho_n(P)\,d\tau_P = 1. \tag{1}$$

Considerando la sucesión de funciones

$$u_n = \iiint_T \frac{\rho_n}{r}\,d\tau,$$

[1]) Para más detalles, véase R. Courant, *Partial Differential Equations*, New-York-London, 1962, así como también I. M. Guelfand y E. G. Shilov, *Funciones Generalizadas y Operaciones con éstas*, ed. Fizmatguiz, 1959. (Véase también L. Schwartz, *Théorie des distributions*, t. 1, 2, Hermann, París, 1950, 1951. (*N. de la Red.*).

que son los potenciales de las masas, distribuidas con densidades ρ_n, y efectuando el paso al límite cuando $n \to \infty$, se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{r_{M_0M}}. \tag{2}$$

Este resultado, evidentemente, no depende de la elección de la sucesión $\{\rho_n\}$. A pesar de que la sucesión $\{u_n\}$ converge hacia $\frac{1}{r}$, la sucesión $\{\rho_n\}$ no tiene límite en la clase de las funciones derivables a trozos considerada. La «imagen límite», que corresponde a la sucesión $\{\rho_n\}$, se llama función δ (M, M_0).

La propiedad fundamental, que determina a la función δ, es la siguiente relación operacional formal:

$$\iiint_T \delta(M_0, M) f(M)\, d\tau_M = \begin{cases} f(M_0), & \text{si} \quad M_0 \in T, \\ 0, & \text{si} \quad M_0 \notin T, \end{cases} \tag{3}$$

siendo $f(M)$ una función arbitraria continua del punto M. Teniendo en cuenta que para $n \to \infty$ las funciones ρ_n tienden uniformemente a cero en cualquier región que no contiene al punto M_0, y crecen indefinidamente en el entorno $S_{\varepsilon_n}^{M_0}$ del punto M_0, a veces definen a la función δ, formalmente, mediante las relaciones

$$\left.\begin{aligned} \delta(M, M_0) &= 0 \quad \text{para} \quad M \neq M_0, \\ \delta(M, M_0) &= \infty \quad \text{para} \quad M = M_0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

y

$$\iiint_T \delta(M, M_0)\, d\tau_M = \begin{cases} 1 \quad \text{para} \quad M_0 \in T, \\ 0 \quad \text{para} \quad M_0 \notin T. \end{cases} \tag{5}$$

La igualdad (5) es una consecuencia evidente de la fórmula (3) para $f = 1$.

Al estudiar las sucesiones de funciones en distintos problemas, hay que tratar con diferentes definiciones de convergencia.

Se dice que la sucesión de funciones

$$\{u_n(x)\} = u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_n(x),\ \ldots \tag{6}$$

converge uniformemente en el intervalo (a, b), si para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que para $n, m > N$, para cualquier x de (a, b) se cumple la condición

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon \text{ para } n, m > N.$$

Se dice que la sucesión (6) converge en media en el intervalo (a, b), si para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que para $n, m > N$, es

$$\int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2 \, dx < \varepsilon.$$

Se dice que la sucesión (6) converge débilmente en el intervalo (a, b), si para cualquier función continua f existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) u_n(x) \, dx.$$

Al estudiar sucesiones convergentes, con frecuencia se introducen los *elementos límite* de éstas. Consideremos la clase de funciones continuas en el intervalo (a, b). En el caso de la convergencia uniforme, el elemento límite pertenece a la misma clase de funciones, cosa que no siempre tiene lugar para la convergencia en media y la convergencia débil.

Si el elemento límite no pertenece a la clase considerada de funciones, se introducen los elementos límite, ampliando la clase inicial. Aquí por ampliación se entiende el conjunto de los elementos iniciales y los elementos límite. Con el concepto de ampliación nos encontramos en la teoría del número real, cuando se introducen los números irracionales como elementos límite, que se determinan por la clase de sucesiones equivalentes.

Al hablar de elementos límite en el sentido de la convergencia débil, diremos que dos sucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ tienen un mismo elemento límite, si éstas son equivalentes, es decir, si la sucesión $\{u_n - v_n\}$ converge débilmente hacia cero:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) [u_n(x) - v_n(x)] \, dx = 0.$$

Llamaremos a la sucesión de funciones no negativas $\{\delta_n\}$ sucesión local normalizada del punto x_0, si la función δ_n es igual a cero fuera del intervalo $(x_0 - \varepsilon_n, x_0 + \varepsilon_n)$, donde

$$\varepsilon_n \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

y

$$\int_a^b \delta_n(x) \, dx = 1.$$

Es evidente que la sucesión $\{\delta_n\}$ converge débilmente. El elemento límite de la sucesión $\{\delta_n\}$ se llama comúnmente *función* δ del punto x_0.

En el caso en que el elemento límite u, en el sentido de la convergencia débil, de la sucesión $\{u_n\}$ se sale de la clase de funciones u_n, la integral del producto de cierta función $f(x)$ por el elemento u se define como el límite

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,u_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,u\,dx.$$

Es evidente que para la función δ del punto x_0 tiene lugar la igualdad

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x_0,x)\,dx=f(x_0).$$

Esta relación se toma a menudo como definición de la función δ.

2. **Desarrollo de la función δ en serie de Fourier.** La función δ se puede definir también como la imagen límite de otras sucesiones, equivalentes en el sentido de la convergencia débil a la sucesión $\delta_n(x)$, citada más arriba, de funciones locales normalizadas del punto x_0.

Tomemos la sucesión de funciones

$$\bar{\delta}_n(x_0,x)=\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{m=1}^{n}\left(\cos\frac{m\pi}{l}x_0\cdot\cos\frac{m\pi}{l}x+\operatorname{sen}\frac{m\pi}{l}x_0\cdot\operatorname{sen}\frac{m\pi}{l}x\right)=$$
$$=\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{m=1}^{n}\cos\frac{m\pi}{l}(x-x_0),\qquad(7)$$

o, en forma compleja,

$$\bar{\delta}_n(x,x_0)=\frac{1}{2l}\sum_{-n}^{n}e^{im\frac{\pi}{l}(x-x_0)},\qquad(7')$$

definida en el intervalo $(-l,l)$.

Es evidente que para cualquier función $g(x)$, que se desarrolle en serie de Fourier, tiene lugar la siguiente igualdad límite:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l}\bar{\delta}_n(x_0,x)\,g(x)\,dx=g(x_0),\qquad(8)$$

la cual demuestra que en la clase de funciones $\{g(x)\}$, que se desarrollan en series de Fourier, la sucesión $\bar{\delta}_n(x_0,x)$ escrita más arriba es equivalente, en el sentido de la convergencia débil,

a la sucesión $\overline{\delta}_n(x_0, x)$, o sea, que

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \cos\frac{m\pi}{l}(x_0 - x), \tag{9}$$

si esta igualdad se entiende desde el punto de vista expuesto más arriba de convergencia débil.

Desde este mismo punto de vista, tiene lugar la igualdad

$$\delta(x_0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\,\varphi_n(x_0), \tag{10}$$

donde $\{\varphi_n(x)\}$ es un sistema completo ortogonal y normalizado de funciones, definido en cierto intervalo (a, b), así como también la igualdad

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x_0 - x)}\,dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos k(x_0 - x)\,dk. \tag{11}$$

Demostremos que en el cálculo de integrales que contienen a la función δ se puede aplicar la serie (9), efectuando la integración término a término del integrando.

Consideremos cierta función $g(x)$, que se desarrolla en serie de Fourier, y la integral

$$\int_{-l}^{l} g(x)\,\delta(x_0, x)\,dx.$$

Sustituyendo aquí en lugar de $\delta(x_0, x)$ su expresión, dada por la fórmula (9), efectuemos la integración de la serie que se encuentra bajo el signo integral. Como resultado, se obtiene:

$$g(x) = \frac{\bar{g}_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\bar{g}_m \cos\frac{\pi m}{l} x + \bar{\bar{g}}_m \operatorname{sen}\frac{\pi m}{l} x \right), \tag{11'}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} \bar{g}_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} g(x_0)\,dx_0, \\ \bar{g}_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} g(x_0) \cos\frac{\pi m}{l} x_0\,dx_0, \\ \bar{\bar{g}}_m &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} g(x_0) \operatorname{sen}\frac{\pi m}{l} x_0\,dx_0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

La confrontación de la fórmula (11) con la igualdad

$$\int_{-l}^{l} \delta(x, x_0)\, g(x)\, dx = g(x_0) \qquad (-l < x_0 < l),$$

demuestra que la integración término a término de la serie de la función δ que hemos efectuado nos conduce a un resultado correcto.

De este modo, en la clase de funciones que se desarrollan en serie de Fourier, la sucesión de sumas parciales

$$\frac{1}{2l} \sum_{n=-k}^{k} e^{i\frac{\pi n}{l}(x-x')}$$

es equivalente a la sucesión local normalizada $\{\delta_n\}$.

Otras formas de representación de la función δ están también basadas en la aplicación de ciertas sucesiones funcionales, equivalentes en el sentido de la convergencia débil a la sucesión $\{\delta_n\}$.

3. Aplicación de la función δ a la composición de la función de la fuente. Consideremos el siguiente problema:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{13}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{14}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{15}$$

A la función dada $\varphi(x)$ le corresponde una solución única del problema

$$u(x, t) = \mathscr{L}[\varphi(x)].$$

Supongamos que el operador $\mathscr{L}$ se puede representar en la forma

$$u(x, t) = \mathscr{L}[\varphi(x)] = \int_{0}^{l} G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{16}$$

donde $G(x, \xi, t)$ es el núcleo del operador $\mathscr{L}$.

Para hallar el núcleo $G(x, \xi, t)$, hagamos:

$$\varphi(x) = \delta(x - x_0). \tag{14'}$$

Sustituyendo en la fórmula (16) $\varphi(x)$ por la función δ, se obtiene:

$$u(x, t) = G(x, x_0, t), \tag{17}$$

es decir, $G(x, x_0, t)$ es solución del problema (13) con la condición inicial (14').

Representemos a la función δ en forma de la serie de Fourier

$$\delta(x-x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x_0.$$

El núcleo G, evidentemente, debe buscarse en forma de la suma

$$G(x,x_0,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x, \tag{18}$$

cada sumando de la cual debe satisfacer a la ecuación de la conducción del calor. De aquí se deduce que

$$A_n(t)=B_n e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.$$

De la condición inicial se obtiene de inmediato:

$$B_n=\frac{2}{l}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x_0.$$

De esta manera, se obtiene, formalmente, la expresión

$$G(x,x_0,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x\operatorname{sen}\frac{n\pi}{l}x_0 \tag{19}$$

para el núcleo G, que coincide con la representación de la función de la fuente que fue estudiada en el § 3. La solución del problema (13)—(15) se da mediante la fórmula (16), donde $G(x, x_0, t)$ es la función definida por la fórmula (19).

De forma semejante se puede hallar la expresión para la función de la fuente en la recta no acotada. La función G se determinará en este caso por las condiciones

$$u_t-a^2u_{xx}=0\quad(-\infty<x<\infty), \tag{20}$$

$$u(x,0)=\varphi(x)=\delta(x-x_0). \tag{21}$$

Teniendo en cuenta el desarrollo de la función δ en la integral de Fourier

$$\delta(x-x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\lambda(x-x_0)\,d\lambda,$$

buscaremos a $G(x, x_0, t)$ en la forma

$$G(x,x_0,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}A_\lambda(t)\cos\lambda(x-x_0)\,d\lambda. \tag{22}$$

De la ecuación (20) se halla:

$$A_\lambda(t) = A_\lambda^{(0)} e^{-a^2\lambda^2 t}. \tag{23}$$

Haciendo $t = 0$ y comparando las fórmulas (23) y (21), se obtiene:

$$A_\lambda^{(0)} = 1.$$

De esta forma,

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda(x - x_0)\, d\lambda.$$

El cálculo de esta integral nos da:

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}.$$

De aquí se deduce que la solución del problema sobre la propagación de una temperatura inicial en la recta infinita debe expresarse por la fórmula

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{24}$$

La determinación de los límites de aplicación de las fórmulas obtenidas por el método de la función δ debe ser estudiada especialmente.

Consideremos ahora, en calidad de ejemplo, la ecuación no homogénea

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{F(x, t)}{c\rho}, \tag{25}$$

donde $F(x, t)$ es la densidad de las fuentes térmicas distribuidas. Si en el punto $x = \xi$, en el momento $t = t_0$, se ha situado una fuente instantánea de calor de potencia Q_0, entonces

$$F(x, t) = Q_0 \delta(x - \xi)\, \delta(t - t_0). \tag{26}$$

Hallemos la solución de la ecuación no homogénea

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q_0}{c\rho} \delta(x - \xi)\, \delta(t - t_0) \qquad (t_0 > 0) \tag{27}$$

con la condición inicial nula

$$u(x, 0) = 0.$$

Teniendo en cuenta la representación integral

$$\delta(x - \xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\lambda(x - \xi)\, d\lambda.$$

buscaremos la función $u(x, t)$ en la forma

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}u_\lambda(t)\cos\lambda(x-\xi)\,d\lambda.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (27), se obtiene la ecuación para $u_\lambda(t)$:

$$\dot{u}_\lambda(t)+a^2\lambda^2u_\lambda(t)=\frac{Q_0}{c\rho}\delta(t-t_0)$$

con la condición inicial

$$u_\lambda(0)=0.$$

Como es sabido, la solución de la ecuación no homogénea

$$\dot{u}+a^2u=f(t),\qquad u(0)=0,$$

tiene la forma

$$u(t)=\int_0^t e^{-a^2(t-\tau)}f(\tau)\,d\tau. \tag{28}$$

En nuestro caso,

$$u_\lambda(t)=\frac{Q_0}{c\rho}\int_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\delta(\tau-t_0)\,d\tau=\begin{cases}0 \text{ para } t<t_0,\\ \dfrac{Q_0}{c\rho}e^{-a^2\lambda^2(t-t_0)}\\ \qquad\text{para } t>t_0.\end{cases} \tag{29}$$

De este modo,

$$u(x,t)=\frac{Q_0}{c\rho}\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-a^2\lambda^2(t-t_0)}\cos\lambda(x-\xi)\,d\lambda=\frac{Q_0}{c\rho}G(x-\xi,\ t-t_0),$$

donde

$$G(x,\xi,t-t_0)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-t_0)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

es la función de influencia de una fuente puntual instantánea.

Un método semejante de composición de la función de influencia se aplica frecuentemente en la física teórica [1]).

---

[1]) Para más detalles sobre la exposición de la teoría de la función δ y varios ejemplos de su aplicación, véase el libro de D. D. Ivanenko y A. A. Sokolov, *Teoría Clásica del Campo*, cap. I, ed. Gostejizdat, 1951.

CAPITULO IV

ECUACIONES DE TIPO ELIPTICO

Al estudiar los procesos estacionarios de distinta naturaleza física (oscilaciones, conducción del calor, difusión y otros) se obtienen, por lo general, ecuaciones de tipo elíptico. La ecuación más frecuente de este tipo es la *ecuación de Laplace*

$$\Delta u = 0.$$

La función u se llama *armónica* en la región T, si es continua en esta región conjuntamente con sus derivadas de hasta segundo orden y satisface a la ecuación de Laplace.

En el estudio de las propiedades de las funciones armónicas fueron desarrollados diferentes métodos matemáticos, que resultaron fructíferos también al aplicarlos a las ecuaciones de tipos hiperbólico y parabólico.

§ 1. PROBLEMAS QUE SE REDUCEN A LA ECUACION DE LAPLACE

1. Campo térmico estacionario. Planteamiento de los problemas de contorno. Consideremos un campo térmico estacionario. En el capítulo III fue demostrado que la temperatura de un campo térmico no estacionario satisface a la ecuación diferencial de la conducción del calor

$$u_t = a^2 \Delta u \qquad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right).$$

Si el proceso es estacionario, se establece una distribución de temperatura $u(x, y, z)$ que no varía con el tiempo y, por consiguiente, satisface a la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

Si hay fuentes de calor, se obtiene la ecuación

$$\Delta u = -f, \qquad f = \frac{F}{k}, \tag{2}$$

donde F es la densidad de las fuentes térmicas, y k, el coeficiente de conductividad térmica. La ecuación no homogénea de Laplace (2) se llama con frecuencia *ecuación de Poisson*.

Consideremos cierto volumen T, delimitado por la superficie Σ. El problema sobre la distribución estacionaria de la temperatura $u(x, y, z)$ dentro del cuerpo T se formula de la siguiente manera:

hallar la función $u(x, y, z)$ que satisface dentro de T a la ecuación

$$\Delta u = -f(x, y, z) \tag{2}$$

y a la condición de frontera, que puede ser tomada en una de las formas siguientes:

I. $u = f_1$ en Σ (**primer problema de contorno**),

II. $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ en Σ (**segundo problema de contorno**),

III. $\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0$ en Σ (**tercer problema de contorno**),

donde f_1, f_2, f_3, h son funciones dadas, $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada dirigida por la normal exterior a la superficie Σ [1]).

El significado físico de estas condiciones de frontera es evidente (véase el cap. III, § 1). El primer problema de contorno para la ecuación de Laplace a menudo se llama *problema de Dirichlet*, y el segundo, *problema de Neumann*.

Si se busca la solución en la región T_0, que es interna (o externa) con respecto a la superficie Σ, el problema correspondiente se llama problema de contorno interior (o exterior).

2. Corriente potencial de un líquido. Potencial de una corriente estacionaria y de un campo electrostático. En calidad de segundo ejemplo, consideremos la corriente potencial de un líquido sin

[1]) Es evidente que la distribución estacionaria de la temperatura se puede establecer sólo si el flujo total a través de la frontera de la región es igual a cero. De aquí se deduce que la función f_2 debe satisfacer a la condición complementaria:

$$\iint_{\Sigma} f_2 \, d\sigma = 0$$

fuentes. Supongamos que dentro de cierto volumen T de frontera Σ tiene lugar la corriente estacionaria de un líquido incompresible (la densidad ρ = const), que se caracteriza por la velocidad $\boldsymbol{v}(x, y, z)$. Si la corriente del líquido es irrotacional, la velocidad $\boldsymbol{v}$ es un vector potencial, es decir,

$$\boldsymbol{v} = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{3}$$

donde φ es una función escalar, llamada *potencial de la velocidad.* Si no hay fuentes, entonces

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0. \tag{4}$$

Sustituyendo aquí la expresión (3) para $\boldsymbol{v}$, se obtiene:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0,$$

o bien

$$\Delta\varphi = 0, \tag{5}$$

es decir, el potencial de la velocidad satisface a la ecuación de Laplace.

Supongamos que en un medio conductor homogéneo se tiene una corriente estacionaria de densidad volumétrica $\boldsymbol{j}(x, y, z)$. Si en el medio no hay fuentes volumétricas de corriente, entonces

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{6}$$

El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ se determina mediante la densidad de la carga a partir de la ley diferencial de Ohm

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{j}}{\lambda}, \tag{7}$$

donde λ es la conductibilidad del medio. Como el proceso es estacionario, el campo eléctrico es irrotacional, o *potencial* [1]), es decir, existe una función escalar $\varphi(x, y, z)$ para la cual

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (\boldsymbol{j} = -\lambda \operatorname{grad} \varphi). \tag{8}$$

De aquí, en base a las fórmulas (6) y (7), se concluye que

$$\Delta\varphi = 0, \tag{9}$$

es decir, que el potencial del campo eléctrico de una corriente estacionaria satisface a la ecuación de Laplace.

Consideremos el campo eléctrico de cargas estacionarias. De la permanencia del proceso se deduce que

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \tag{10}$$

[1]) De la segunda ley de Maxwell, $\frac{\mu}{c}\dot{\boldsymbol{H}} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ se deduce que $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$.

es decir, que el campo es potencial y

$$E = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{8}$$

Sea $\rho(x, y, z)$ la densidad volumétrica de las cargas que hay en el medio, el cual se caracteriza por la constante dieléctrica $\varepsilon = 1$. Partiendo de la ley fundamental de la electrodinámica

$$\iint_S E_n \, dS = 4\pi \Sigma e_i = 4\pi \iiint_T \rho \, d\tau, \tag{11}$$

siendo T cierto volumen, S, la superficie que lo delimita, Σe_i, la suma de todas las cargas dentro de T, y aplicando el teorema de Ostrogradski

$$\iint_S E_n \, dS = \iiint_T \operatorname{div} E \, d\tau, \tag{12}$$

se obtiene:

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho.$$

Sustituyendo aquí la expresión (8) para E, tendremos:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \tag{13}$$

es decir, el potencial electrostático φ satisface a la ecuación de Poisson. Si no hay cargas volumétricas ($\rho = 0$), el potencial φ debe satisfacer a la ecuación de Laplace

$$\Delta\varphi = 0.$$

Los problemas de contorno principales para los procesos considerados son de los tres tipos expuestos antes. No nos detendremos aquí en ciertos otros problemas de contorno, que son característicos para diversos procesos físicos. Algunos de estos problemas se expondrán en los apéndices.

3. Ecuación de Laplace en un sistema de coordenadas curvilíneo. Deduzcamos la expresión para el operador de Laplace en un sistema de coordenadas curvilíneo ortogonal. Supongamos que en el espacio se han introducido, en lugar de las coordenadas cartesianas x, y, z, las coordenadas curvilíneas q_1, q_2, q_3 mediante las fórmulas

$$q_1 = f_1(x, y, z), \; q_2 = f_2(x, y, z), \; q_3 = f_3(x, y, z), \tag{14}$$

resolviendo las cuales con respecto a x, y, z se puede escribir

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \; y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \; z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3). \tag{15}$$

Haciendo $q_1 = C_1$, $q_2 = C_2$, $q_3 = C_3$, donde C_1, C_2, C_3 son constantes, se obtienen tres familias de superficies coordenadas:

$$f_1(x, y, z) = C_1, \; f_2(x, y, z) = C_2 \text{ y } f_3(x, y, z) = C_3. \tag{16}$$

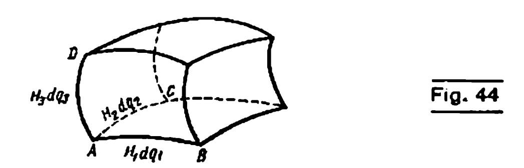


Fig. 44

Consideremos un elemento de volumen en las nuevas coordenadas, limitado por tres pares de superficies coordenadas (fig. 44). A lo largo de la arista AB es $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$, a lo largo de AD es $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, a lo largo de AC, $q_1 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$. Los cosenos directores de la tangente a las aristas AB, AD y AC son proporcionales respectivamente a

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1};$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2};$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3}, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3}.$$

La condición de ortogonalidad de los lados tendrá la forma

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_k} = 0 \qquad (i \neq k). \tag{17}$$

Calculemos el elemento de longitud en estas coordenadas:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_3} dq_3\right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_3} dq_3\right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial q_3} dq_3\right)^2. \tag{18}$$

Abriendo paréntesis y teniendo en cuenta las condiciones de ortogonalidad (17), resulta:

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2. \tag{19}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} H_1^2&=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\right)^2,\\ H_2^2&=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\right)^2,\\ H_3^2&=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

A lo largo de cada arista del volumen elemental cambia sólo una coordenada; por esto, para la longitud de estos lados tendremos, de acuerdo con la fórmula (19):

$$ds_1 = H_1\,dq_1,\quad ds_2 = H_2\,dq_2,\quad ds_3 = H_3\,dq_3, \tag{21}$$

de forma que el elemento de volumen es igual a

$$dv = ds_1\,ds_2\,ds_3 = H_1H_2H_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3. \tag{22}$$

Consideremos ahora cierto campo vectorial $A\,(x,\ y,\ z)$. Calculemos div A, que se determina por la conocida fórmula del análisis vectorial

$$\operatorname{div} A = \lim_{v_M\to 0}\frac{\iint\limits_S A_n\,dS}{v_M}, \tag{23}$$

donde S es la superficie que delimita cierto volumen v_M, el cual contiene al punto considerado M. Apliquemos esta fórmula al elemento de volumen dv, representado en la fig. 44.

Aplicando el teorema del valor medio, se puede representar la diferencia de los flujos del vector A a través de las caras opuestas, por ejemplo, de las caras derecha e izquierda, en la forma

$$Q_1 = A_1\,ds_2\,ds_3|_{q_1+dq_1} - A_1\,ds_2\,ds_3|_{q_1}.$$

Teniendo en cuenta las fórmulas (21), se obtiene:

$$Q_1 = [H_2H_3A_1|_{q_1+dq_1} - H_2H_3A_1|_{q_1}]\,dq_2\,dq_3 = \\ = \frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1)\,dq_1\,dq_2\,dq_3. \tag{24}$$

Análogamente se calculan las otras dos diferencias de flujos a través de caras opuestas:

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1A_2)\,dq_1\,dq_2\,dq_3, \tag{25}$$

$$Q_3 = \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2A_3)\,dq_1\,dq_2\,dq_3. \tag{26}$$

Sustituyendo en la fórmula (23) el valor de $\iint\limits_S A_n\,ds = Q_1 + Q_2 + Q_3$ y utilizando la fórmula (22), se obtiene la expresión de la divergencia en las coordenadas ortogonales curvilíneas

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2A_3)\right]. \tag{27}$$

Supongamos que el campo A es potencial, es decir, que

$$A = \operatorname{grad} u. \tag{28}$$

Entonces

$$A_1 = \frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}; \qquad A_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}; \qquad A_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}. \tag{29}$$

Sustituyendo en (27) las expresiones (29) para A_1, A_2, A_3, se obtiene la expresión para el operador de Laplace:

$$\Delta u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u =$$
$$= \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]. \tag{30}$$

De esta forma, la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en el sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales q_1, q_2 y q_3 se escribe del siguiente modo:

$$\Delta u = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right\} = 0. \tag{31}$$

Consideremos dos casos particulares.

1. **Coordenadas esféricas.** En este caso es $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$, y las fórmulas de transformación (15) son

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Calculemos ds^2:

$$ds^2 = (\operatorname{sen} \theta \cos \varphi \, dr + r \cos \theta \cos \varphi \, d\theta - r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi)^2 + \\ + (\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \, dr + r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi \, d\theta + r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \, d\varphi)^2 + \\ + (\cos \theta \, dr - r \operatorname{sen} \theta \, d\theta)^2.$$

Después de abrir paréntesis y de simplificar, se halla:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \, d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \, d\varphi^2,$$

es decir,

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \operatorname{sen} \theta.$$

Sustituyendo los valores H_1, H_2, H_3 en la fórmula (31), se obtiene la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas:

$$\frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \right] = 0,$$

o, en definitiva,

$$\Delta_{r, \theta, \varphi} u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \qquad (32)$$

2. **Coordenadas cilíndricas.** En este caso es $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$;

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi, \quad z = z,$$

de manera que

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas toma la forma

$$\Delta_{\rho, \varphi, z} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (33)$$

Si la función buscada u no depende de z, la ecuación (33) se simplifica:

$$\Delta_{\rho, \varphi} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \qquad (34)$$

4. Ciertas soluciones particulares de la ecuación de Laplace. Tienen un gran interés las soluciones de la ecuación de Laplace con simetría esférica o cilíndrica, es decir, que dependen sólo de una variable r ó ρ.

La solución de la ecuación de Laplace $u = U(r)$ con simetría esférica se determinará de la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dU}{dr}\right) = 0.$$

Integrando esta ecuación, hallamos

$$U = \frac{C_1}{r} + C_2,$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Haciendo, por ejemplo, $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, se obtiene la función

$$U_0 = \frac{1}{r}, \qquad (35)$$

que se llama con frecuencia *solución fundamental de la ecuación de Laplace en el espacio.*

Análogamente, haciendo

$$u = U(\rho)$$

y aplicando la ecuacion (33) o la (34) se halla la solución con simetría cilíndrica o circular (en el caso de dos variables independientes), en la forma

$$U(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2.$$

Escogiendo $C_1 = -1$ y $C_2 = 0$, tendremos:

$$U_0 = \ln \frac{1}{\rho}. \qquad (36)$$

La función $U_0(\rho)$ se llama con frecuencia *solución fundamental de la ecuación de Laplace en el plano* (para dos variables independientes).

La función $U_0 = \frac{1}{r}$ satisface a la ecuación $\Delta u = 0$ en todas partes, a excepción del punto $r = 0$, donde se vuelve infinita. Salvo el factor de proporcionalidad, ésta coincide con el campo de una carga puntual e, ubicada en el origen de coordenadas; el potencial de este campo es igual a

$$u = \frac{e}{r}.$$

Análogamente, la función $\ln \frac{1}{\rho}$ satisface a la ecuación de Laplace en todas partes, a excepción del punto $\rho = 0$, donde se vuelve infinita (positiva) y coincide, salvo el factor de proporcionalidad, con el campo de una línea cargada (para más detalles véase el § 5, p. 2), cuyo potencial es igual a

$$u = 2e_1 \ln \frac{1}{\rho},$$

donde e_1 es la densidad de la carga, calculada para la unidad de longitud. Estas funciones tienen gran importancia en la teoría de las funciones armónicas.

5. Funciones armónicas y funciones analíticas de variable compleja. Un método muy general de resolución de los problemas bidimensionales para la ecuación de Laplace, es el que utiliza las funciones de variable compleja.

Sea

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

cierta función de la variable compleja $z = x + iy$, siendo u y v funciones reales de las variables x e y. El mayor interés lo tienen las funciones llamadas analíticas, para las cuales existe la derivada

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

El incremento $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ puede, evidentemente, tender a cero de varias maneras. Para cada una de estas maneras de tender Δz a cero se puede obtener, en general, un valor distinto del límite. Sin embargo, si la función $w = f(z)$ es analítica, el límite $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$ no depende del camino elegido.

Las condiciones necesarias y suficientes para que una función sea analítica, son las llamadas *condiciones de Cauchy-Riemann*

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Estas condiciones se pueden obtener, por ejemplo, del siguiente modo.

Sea $w = k + iv = f(z)$ una función analítica. Calculando las derivadas

$$w_x = u_x + iv_x = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_x = \frac{dw}{dz},$$

$$w_y = u_y + iv_y = \frac{\partial w(z)}{\partial z} z_y = i\frac{dw}{dz}$$

y exigiendo la igualdad de los valores de $\frac{dw}{dz}$, determinados de estas dos igualdades, se obtiene:

$$u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{dw}{dz},$$

de donde se deducen las condiciones de Cauchy—Riemann. No nos detendremos en la demostración de que estas condiciones son suficientes.

En la teoría de funciones de variable compleja se demuestra que una función analítica en cierta región G del plano $z = x + iy$, tiene en dicha región derivadas de todos los órdenes, y se desarrolla en serie de potencias. En particular, para esta función, $u(x, y)$ y $v(x, y)$ tienen derivadas continuas de segundo orden con respecto a x e y.

Derivando la primera igualdad de la fórmula (37) con respecto a x, y la segunda con respecto a y, se obtiene:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \text{ o bien } \Delta_2 u = 0.$$

De modo semejante, cambiando el orden de derivación, se halla:

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad \text{o bien} \quad \Delta_2 v = 0.$$

De esta forma, las partes real e imaginaria de la función analítica satisfacen a la ecuación de Laplace. Comúnmente se dice que u y v, las cuales satisfacen a la condición de Cauchy-Riemann, son funciones armónicas conjugadas.

Consideremos la transformación

$$\left.\begin{array}{ll} x = x(u, v), & u = u(x, y), \\ y = y(u, v), & v = v(x, y), \end{array}\right\} \qquad (38)$$

que transforma biunívocamente cierta región G del plano (x, y) en la región G' del plano (u, v), de modo que a cada punto de G le corresponde un punto de G' y recíprocamente, a cada punto de la región G' le corresponde un punto determinado de G.

Sea

$$U = U(x, y)$$

cierta función real con derivadas segundas continuas, definida dentro de la región G.

Analicemos cómo varía en esta transformación el operador de Laplace de la función $U = U[x(u, v), y(u, v)] = \tilde{U}(u, v)$.

Calculemos las derivadas de la función:

$$U_x = \tilde{U}_u u_x + \tilde{U}_v v_x, \qquad U_y = \tilde{U}_u u_y + \tilde{U}_v v_y,$$

$$U_{xx} = \tilde{U}_{uu} u_x^2 + \tilde{U}_{vv} v_x^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_x v_x + \tilde{U}_u u_{xx} + \tilde{U}_v v_{xx},$$

$$U_{yy} = \tilde{U}_{uu} u_y^2 + \tilde{U}_{vv} v_y^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_y v_y + \tilde{U}_u u_{yy} + \tilde{U}_v v_{yy},$$

de donde se obtiene:

$$U_{xx} + U_{yy} = \tilde{U}_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + \tilde{U}_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + \\ + 2\tilde{U}_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + \tilde{U}_u(u_{xx} + u_{yy}) + \tilde{U}_v(v_{xx} + v_{yy}). \quad (39)$$

Si u y v son funciones armónicas conjugadas, la transformación (38) es equivalente a la transformación que se efectúa mediante la función analítica

$$w = f(z) = u + iv \quad (z = x + iy). \quad (40)$$

En este caso, en virtud de las condiciones de Cauchy-Riemann (37), para las funciones u y v deben cumplirse las relaciones

$$u_x^2 + u_y^2 = u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2,$$
$$u_x v_x + u_y v_y = 0.$$

La fórmula (39) adquiere la forma

$$U_{xx} + U_{yy} = (\tilde{U}_{uu} + \tilde{U}_{vv})|f'(z)|^2, \quad (41)$$

o bien

$$\Delta_{uv}\tilde{U} = \frac{1}{|f'(z)|^2}\Delta_{x,y}U. \quad (41')$$

De aquí se deduce que, como resultado de la transformación (40), la función $U(x, y)$, armónica en la región G, se transforma en la $\tilde{U} = U(u, v)$, armónica en la región G', siempre que $|f'(z)|^2 \neq \neq 0$.

6. Transformación de los radios-vector inversos. Al estudiar funciones armónicas, se utiliza con frecuencia la transformación de los radios-vector inversos. Se llama transformación de los

radios-vector inversos en una esfera de radio a[1]) a la transformación en la cual a cada punto M se le pone en correspondencia el punto M' que se halla en la misma semirrecta que parte del origen de coordenadas que el punto M, y cuyo radio vector r' está ligado al radio vector r del punto M por la fórmula

$$r'r = a^2, \quad \text{o bien} \quad r' = \frac{a^2}{r}. \tag{42}$$

En lo sucesivo, consideraremos que $a = 1$, lo cual siempre se puede lograr cambiando la escala de longitudes.

Demostremos que una función armónica de dos variables independientes $u(\rho, \varphi)$ se transforma, mediante la transformación de los radios-vector inversos, en la función armónica

$$v(\rho', \varphi) = u(\rho, \varphi), \quad \text{donde} \quad \rho = \frac{1}{\rho'}. \tag{43}$$

En efecto, la función $u(\rho, \varphi)$ y conjuntamente con ella la $v\left(\frac{1}{\rho}, \varphi\right)$, satisface, como función de las variables ρ y φ, a las ecuaciones

$$\rho^2 \Delta_{\rho, \varphi} u = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

y

$$\rho^2 \Delta_{\rho, \varphi} v = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Pasando a las variables ρ' y φ, se obtiene:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho'} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial \rho} = -\rho' \frac{\partial v}{\partial \rho'},$$

de donde se deduce, precisamente, que $v(\rho', \varphi)$ satisface a la ecuación $\Delta_{\rho, \varphi} v = 0$, puesto que

$$\rho'^2 \Delta_{\rho', \varphi} v = \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'}\left(\rho' \frac{\partial v}{\partial \rho'}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Pasando al caso de tres variables independientes, demostremos que la función

$$v(r', \theta, \varphi) = ru(r, \theta, \varphi), \quad \text{donde} \quad r = \frac{1}{r'}, \tag{44}$$

---

[1]) Esta transformación se llama comúnmente inversión. (*N. del T.*)

satisface a la ecuación de Laplace $\Delta_{r',\theta,\varphi}\, v = 0$, si $u(r, \theta, \varphi)$ es una función armónica de sus variables: $\Delta_{r',\theta,\varphi}\, u = 0$.

La transformación (44) se llama a menudo transformación de Kelvin.

Es fácil probar, mediante la derivación directa, que el primer sumando en el operador de Laplace (32) se transforma en

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}, \tag{45}$$

de modo que

$$r\Delta_{r,\theta,\varphi}u = \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] = 0,$$

o bien

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right] = 0.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r'}\cdot\frac{\partial r'}{\partial r} = -r'^2\frac{\partial v}{\partial r'},$$

se halla que v satisface a la ecuación $\Delta_{r',\theta,\varphi}\, v = 0$, puesto que

$$r'^2\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'^2\frac{\partial v}{\partial r'}\right) + r'^2\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right] = 0,$$

o bien

$$r'^4\Delta_{r',\theta,\varphi}v = 0.$$

§ 2. PROPIEDADES GENERALES DE LAS FUNCIONES ARMÓNICAS

En el presente parágrafo se da la representación integral de las funciones armónicas, que es el aparato fundamental para el estudio de las propiedades generales de estas funciones. Uno de los corolarios importantes de la fórmula integral es el principio del valor máximo, que se aplicará con frecuencia en lo sucesivo, tanto para la demostración del teorema de unicidad como para la resolución de problemas de contorno. Aquí también se da un planteamiento matemático de los problemas de contorno

interiores y exteriores para la ecuación de Laplace, y se demuestra la unicidad y estabilidad de la solución de estos problemas.

1. Fórmulas de Green. Representación integral de la solución. Al estudiar las ecuaciones de tipo elíptico, aplicaremos con frecuencia las fórmulas de Green, que son consecuencia directa de la fórmula de Ostrogradski.

La fórmula de Ostrogradski tiene la forma, en el caso más sencillo[1]):

$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_\Sigma R\cos\gamma\,d\sigma, \tag{1}$$

siendo T cierto volumen delimitado por una superficie Σ suficientemente suave; $R(x, y, z)$, una función arbitraria, continua dentro de $T+\Sigma$ y que tiene derivadas continuas dentro de T; γ, el ángulo entre la dirección del eje z y la normal exterior a Σ. Es fácil comprobar la justeza de esta fórmula, efectuando la integración con respecto a z.

Por lo general, la fórmula de Ostrogradski se escribe en la forma

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)d\tau = \iint_\Sigma \{P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\}\,d\sigma, \tag{2}$$

donde $d\tau = dx\,dy\,dz$ es el elemento de volumen, $\alpha = (\widehat{nx})$, $\beta = (\widehat{ny})$, $\gamma = (\widehat{nz})$ son los ángulos de la normal exterior n a la superficie Σ con los ejes coordenados, P, Q, R, funciones derivables arbitrarias[2]).

Si P, Q, R se consideran como las componentes de cierto vector $A = Pi + Qj + Rk$, la fórmula de Ostrogradski (2) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\iiint_T \operatorname{div} A\,d\tau = \iint_\Sigma A_n\,d\sigma, \tag{2'}$$

donde

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

[1]) Véase B. M. Budak, S. V. Fomín, *Integrales Multiples y Series*, ed. «Naúka», 1965. (o también P. Puig Adam, *Calculo Integral*, Madrid, 1961, pág. 220 (*N. de la Red.*)

[2]) En lo sucesivo supondremos que a las regiones que estudiaremos se les puede aplicar la fórmula de Ostrogradski. Tales son, por ejemplo, las superficies con curvatura continua a trozos, así como también las superficies de Liapunov (véase el § 5).

y

$$A_n = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$$

es la componente del vector A a lo largo de la normal exterior.

Pasemos ahora a deducir las fórmulas de Green.

Sean $u = u(x, y, z)$ y $v = v(x, y, z)$ funciones continuas, conjuntamente con sus derivadas primeras, dentro de $T + \Sigma$ y que tengan derivadas segundas continuas en el interior de T.

Haciendo

$$P = u\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad Q = u\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad R = u\frac{\partial v}{\partial z}$$

y aplicando la fórmula de Ostrogradski (2'), se obtiene la llamada *primera fórmula de Green*

$$\iiint_T u\Delta v\, d\tau = \iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma - \iiint_T \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right) d\tau, \qquad (3)$$

donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ es el operador de Laplace, $\frac{\partial}{\partial n} = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}$ es la derivada en la dirección de la normal exterior.

Si se tiene en cuenta la relación

$$\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v = \nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z},$$

la fórmula de Green se puede representar como sigue:

$$\iiint_T u\Delta v\, d\tau = -\iiint_T \nabla u \nabla v\, d\tau + \iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma. \qquad (3')$$

Cambiando de lugar las funciones u y v, tendremos:

$$\iiint_T v\,\Delta u\, d\tau = -\iiint_T \nabla v \nabla u\, d\tau + \iint_\Sigma v\frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma. \qquad (4)$$

Restando de la igualdad (3') la (4), se obtiene la *segunda fórmula de Green*

$$\iiint_T (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\, d\tau = \iint_\Sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma. \qquad (5)$$

La región T puede estar limitada por varias superficies. Las fórmulas de Green son aplicables también en este caso, debiéndose tomar las integrales de superficie por todas las superficies que limitan la región T.

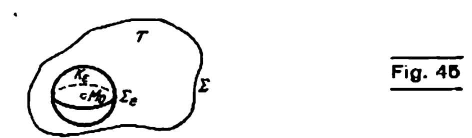


Fig. 45

Para las funciones $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ de dos variables tienen lugar fórmulas análogas de Green. La segunda fórmula de Green en la región S de frontera C tiene la forma

$$\iint_S (u\,\Delta_2 v - v\,\Delta_2 u)\,dS = \int_C \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds,$$

donde $dS = dx\,dy$, ds es el elemento de arco a lo largo de C, $\Delta_2 v = v_{xx} + v_{yy}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ es la derivada en la dirección de la normal n exterior al contorno C.

Como hemos visto (§ 1, p. 4), la función $U_0(M) = \frac{1}{R}$, donde $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ es la distancia entre los puntos $M(x, y, z)$ y $M_0(x_0, y_0, z_0)$, satisface a la ecuación de Laplace para $M \neq M_0$.

Sea $u(M)$ una función armónica, continua conjuntamente con sus derivadas primeras en la región $T + \Sigma$ y que tenga derivadas segundas en T. Consideremos la función $v = \frac{1}{R_{MM_0}}$, donde M_0 es cierto punto interior de la región T. Como esta función tiene dentro de T una discontinuidad en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$, no es posible aplicar directamente la segunda fórmula de Green a las funciones u y v en la región T. Sin embargo, la función $v = \frac{1}{R_{MM_0}}$ está acotada en la región $T - K_\varepsilon$ de frontera $\Sigma + \Sigma_\varepsilon$, donde K_ε es una esfera de radio ε con centro en el punto M_0 y de superficie Σ_ε (fig. 45).

Aplicando la segunda fórmula de Green (5) a las funciones u y $v = \frac{1}{R}$ en la región $T - K_\varepsilon$, se obtiene:

$$\iiint_{T-K_\varepsilon} \left(u\Delta\frac{1}{R} - \frac{1}{R}\Delta u\right) d\tau =$$

$$= \iint_\Sigma \left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma + \iint_{\Sigma_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) d\sigma - \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \tag{6}$$

En el segundo miembro de esta igualdad sólo las dos últimas integrales dependen de ε. Calculando la derivada por la normal exterior a la región $T - K_\varepsilon$ en Σ_ε, se halla que

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\Big|_{\Sigma_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)\Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

de donde

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} u\,d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2}\,4\pi\varepsilon^2 u^* = 4\pi u^*, \tag{7}$$

donde u^* es el valor medio de la función $u(M)$ en la superficie Σ_ε. Transformemos la tercera integral:

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\,4\pi\varepsilon^2\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*, \tag{8}$$

donde $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*$ es el valor medio de la derivada normal $\frac{\partial u}{\partial n}$ en la esfera Σ_ε. Sustituyendo las expresiones (7) y (8) en la fórmula (6) y teniendo en cuenta que $\Delta\left(\frac{1}{R}\right) = 0$ en $T - K_\varepsilon$, tendremos:

$$\iiint\limits_{T-K_\varepsilon}\left(-\frac{1}{R}\right)\Delta u\,d\tau =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\sigma + 4\pi u^* - 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*. \tag{9}$$

Hagamos tender ahora el radio ε a cero. Entonces se obtiene:

1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^* = u(M_0)$, puesto que $u(M)$ es una función continua, y u^*, su valor medio en una esfera de radio ε con centro en el punto M_0;

2) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 0$, puesto que de la continuidad de las derivadas primeras de la función $u(M)$ dentro de T se desprende inmediatamente la acotación de la derivada normal

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

en un entorno del punto M_0;

3) por definición de la integral impropia,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iiint_{T-K_\varepsilon} \left(-\frac{1}{R}\Delta u\right) d\tau = \iiint_T \left(-\frac{1}{R}\Delta u\right) d\tau.$$

Como resultado del paso al límite $\varepsilon \to 0$ indicado, se obtiene la *fórmula integral fundamental de Green*:

$$4\pi u(M_0) =$$

$$= -\iint_\Sigma \left[u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right) - \frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u}{\partial n}\right] d\sigma_P - \iiint_T \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0P}} d\tau, \quad (10)$$

donde $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ es el punto de coordenadas ξ, η, ζ, que se halla en la superficie Σ.

Si el punto M_0 se halla fuera de la región T, entonces $v = \frac{1}{R_{MP}}$ es continua y armónica en todos los puntos de la región T. Por esto, el primer miembro de la fórmula (10) se anula.

Consideremos el caso en que M_0 pertenece a la superficie Σ. Supongamos que Σ tiene en M_0 un plano tangente con coeficientes angulares continuos. La esfera Σ_ε de radio ε con centro en M_0 corta a la superficie Σ y la divide en dos partes, Σ_1 y Σ_2; la parte Σ_1 se encuentra dentro de la esfera K_ε. Apliquemos la fórmula de Green a u y a $v = \frac{1}{R}$ en la región $T - T_1$, donde T_1 es la región delimitada por Σ_1 y por la parte de la esfera Σ'_ε que se halla dentro de T. El esquema general de los razonamientos que nos condujeron a (9) permanece invariante. En este caso, sólo hay que tener en cuenta que la integral tomada sobre $\Sigma_1 + \Sigma'_\varepsilon$ tiende a $2\pi u(M_0)$, e introducir los cambios correspondientes en (7), (8) y (8′). Como resultado se llega a la fórmula que se obtiene de (10) cambiando 4π por 2π.

Uniendo todos los casos escribamos la fórmula fundamental de Green en la forma:

$$\Omega \cdot u(M_0) =$$

$$= \iint_\Sigma \left[\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right] d\sigma_P - \iiint_T \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0P}} d\tau_P, \quad (10')$$

donde Ω toma los valores:

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi, & \text{si el punto } M_0 \text{ se halla dentro de } T, \\ 2\pi, & \text{si el punto } M_0 \text{ se halla en la frontera } \Sigma, \\ 0, & \text{si el punto } M_0 \text{ se halla fuera de } T. \end{cases}$$

Obsérvese que si el punto M_0 es un vértice cónico de la superficie Σ, entonces $\Omega = \alpha$, donde α es la magnitud del ángulo sólido formado por las tangentes a Σ en el punto M_0.

Para una función armónica, es $\Delta u = 0$, y la fórmula (10) toma la forma

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] d\sigma_P \qquad (11)$$

(M_0 se encuentra dentro de T).

De esta forma, el valor de una función armónica en cualquier punto interior de la región se expresa mediante el valor de esta función y de su derivada normal en la superficie de esta región. Aquí se supone que la función u y sus derivadas primeras son continuas en la región y en su frontera. Obsérvese que cada integral

$$\iint_{\Sigma} \mu(P) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P \quad \text{y} \quad \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) \nu(P)\, d\sigma_P, \qquad (12)$$

donde μ y ν son funciones continuas, es una función armónica fuera de la superficie Σ. En efecto, como los integrandos y todas sus derivadas son continuas fuera de la superficie Σ, las derivadas de las funciones (12) de cualquier orden pueden ser calculadas derivando bajo el signo integral. Como, además, las funciones

$$\frac{1}{R_{MP}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \alpha_P + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \beta_P + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \gamma_P$$

satisfacen a la ecuación de Laplace con respecto a las variables $M(x, y, z)$, en virtud del principio generalizado de superposición (véase el lema en la pág. 253), las funciones (12) también satisfacen a la ecuación de Laplace con respecto a las variables x, y, z.

De aquí se deduce un corolario importante: cualquier función armónica es derivable un número infinito de veces dentro de la región en que es armónica[1]). Obsérvese también que una función armónica es analítica (se desarrolla en serie de potencias) en cualquier punto M_0 de la región T. Esto puede probarse

---

[1]) Si para una función u, armónica dentro de T, no se cumple la condición de su continuidad conjuntamente con la derivada primera en la superficie Σ, el teorema de todos modos es válido, cosa que puede comprobarse rodeando al punto M por una región que se halle dentro de T, conjuntamente con su frontera.

mediante razonamientos basados en la misma representación integral (11).

Fórmulas análogas tienen lugar también para las funciones armónicas de dos variables independientes. Sea S cierta región en el plano (x, y), limitada por el contorno C, y n, la dirección de la normal a este contorno, que es exterior con respecto a la región S.

Haciendo en la segunda fórmula de Green $v = \ln \frac{1}{R_{M_0P}}$, donde $R_{M_0P} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ es la distancia de $P(x, y)$ a un punto fijo $M_0(x_0, y_0)$ y razonando en forma semejante al caso tridimensional, se obtiene la fórmula fundamental de Green en el plano:

$$\Omega u(M_0) = \int_C \left[\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] ds_P -$$

$$- \iint_S \Delta u(P) \ln \frac{1}{R_{M_0P}} ds_P,$$

donde

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi, & \text{si } M_0 \text{ se halla dentro de } S, \\ \pi, & \text{si } M_0 \text{ se halla en la frontera } C, \\ 0, & \text{si } M_0 \text{ se halla fuera de } S. \end{cases}$$

Si $u(M)$ es una función armónica dentro de S, y M_0 está dentro de S, entonces

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\ln \frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] ds_P.$$

2. Ciertas propiedades fundamentales de las funciones armónicas. Establezcamos algunas propiedades fundamentales de las funciones armónicas:

1. Si v es una función armónica en la región T, liminada por la superficie Σ, entonces

$$\iint_S \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0, \qquad (13)$$

donde S es cualquier superficie cerrada que se encuentre enteramente en la región T.

En efecto, sustituyendo en la primera fórmula de Green (3′) una función armónica v $(\Delta v = 0)$ y la función $u \equiv 1$, se obtiene

de inmediato la fórmula (13). De esta fórmula se deduce que el segundo problema de contorno ($\Delta u = 0$ en T, $\frac{\partial u}{\partial n} = f \mid_{\Sigma}$) puede tener solución sólo con la condición

$$\iint_{\Sigma} f\, d\sigma = 0.$$

Esta propiedad de las funciones armónicas se puede interpretar como la condición de ausencia de fuentes dentro de la región T.

2. **Si la función $u(M)$ es armónica en cierta región T, y M_0 es un punto dentro de esta región, tiene lugar la fórmula**

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a} u\, d\sigma, \tag{14}$$

donde Σ_a es una esfera de radio a con centro en el punto M_0, que se halla enteramente en la región T (teorema del valor medio).

Este teorema afirma que el valor de una función armónica en cierto punto M_0 es igual al valor medio de esta función en cualquier esfera Σ_a con centro en M_0, si dicha esfera no se sale de la región en que $u(M)$ es armónica.

Apliquemos la fórmula (11) a la esfera K_a con centro en el punto M_0 y de superficie Σ_a:

$$4\pi u(M_0) = -\iint_{\Sigma_a} \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma.$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} \text{ en } \Sigma_a \text{ y } \iint_{\Sigma_a} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\Big|_{\Sigma_a} = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right)\Big|_{R=a} = -\frac{1}{a^2}$$

(la dirección de la normal exterior a Σ_a coincide con la dirección del radio), se obtiene de inmediato (14)[1].

[1]) En la demostración de este teorema fue aplicada la igualdad (13), que presupone la existencia de las derivadas en la superficie de la esfera. Si la función $u(M)$, continúa en la región cerrada $T + \Sigma$, satisface a la ecuación $\Delta u = 0$ sólo para los puntos interiores de T, la conclusión anterior para una esfera Σ_{a_0}, tangente a Σ, sería infundada. Sin embargo, el teorema es válido para cualquier $a < a_0$, y pasando al límite cuando $a \to a_0$, se obtiene:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a_0^2} \iint_{\Sigma_{a_0}} u(M)\, d\sigma.$$

Escribiendo (14) en la forma

$$4\pi\rho^2 u(M_0) = \iint_{\Sigma_\rho} u(P)\, d\sigma_P$$

e integrando con respecto a ρ desde 0 hasta a, se obtiene:

$$u(M_0) = \frac{1}{V_a} \iiint_{K_a} u\, d\tau_P, \qquad V_a = \frac{4\pi}{3} a^3,$$

es decir, $u(M_0)$ es la media en el volumen de la esfera K_a con frontera Σ_a.

Para el caso de dos variables independientes, tiene lugar un teorema análogo del valor medio:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{C_a} u\, ds, \tag{15}$$

donde C_a es una circunferencia de radio a con centro en el punto M_0, que se halla en la región en que u es armónica.

3. **Si la función $u(M)$, definida y continua en la región cerrada $T + \Sigma$, satisface a la ecuación $\Delta u = 0$ dentro de T, los valores máximo y mínimo de $u(M)$ se alcanzan en la superficie Σ (principio del valor máximo).**

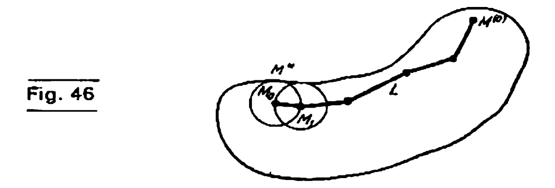
Supongamos que la función $u(M)$ alcanza su valor máximo en cierto punto interior M_0 de la región T, de forma que $u_0 = u(M_0) \geqslant u(M)$, donde M es un punto cualquiera de la región T. Rodeemos al punto M_0 por una esfera Σ_ρ de radio ρ, que se encuentre enteramente dentro de la región T. Por cuanto, por hipótesis, $u(M_0)$ es el valor máximo de la función $u(M)$ en $T + \Sigma$, entonces $u|_\Sigma \leqslant u(M_0)$. Aplicando la fórmula del valor medio (14) y sustituyendo bajo el signo integral $u(M)$ por su valor $u(M_0)$, se obtiene:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\Sigma_\rho} u(M)\, d\sigma_M \leqslant \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\Sigma_\rho} u(M_0)\, d\sigma = u(M_0). \tag{16}$$

Si se supone que por lo menos en un punto M de la esfera Σ_ρ es $u(M) < u(M_0)$, entonces es evidente que en lugar del signo $\leqslant$ tendremos el signo $<$, lo cual nos lleva a una contradicción. De este modo, en toda la superficie Σ_ρ es $u(M) \equiv u(M_0)$.

Si ρ_0^m es la distancia mínima de M_0 a la superficie Σ, entonces $u(M) \equiv u(M_0)$ para todos los puntos que se hallan dentro de $\Sigma_{\rho_0^m}$. De aquí se deduce que en los puntos M^* que pertenecen a la parte común de $\Sigma_{\rho_0^m}$ y Σ, será, por continuidad, $u(M^*) = u(M_0)$. Esto demuestra el teorema, por cuanto hemos probado que el valor máximo $u(M_0)$ se alcanza en los puntos de la frontera M^*.

Fig. 46



No es difícil comprobar que si la región T es conexa, y el valor máximo se alcanza por lo menos en un punto interior M_0, entonces $u(M) \equiv u(M_0)$ en toda la región. Sea $M^{(0)}$ otro punto de la región T. Unamos el punto $M^{(0)}$ con el M_0 mediante la quebrada L (fig. 46), cuya longitud denotaremos por l. Sea M_1 el último punto de salida de la línea L de $\Sigma_{\rho_0^m}$. En este punto es $u(M_1) = u(M_0)$. Tracemos desde este punto una esfera $\Sigma_{\rho_0^m}$ de radio ρ_1^m, tangente a Σ, y sea M_2 el último punto de salida de L de $\Sigma_{\rho_1^m}$; en este punto es $u(M_2) = u(M_0)$. Continuando este proceso, se obtiene que en no más de $p = \frac{l}{\rho^{(m)}}$ pasos, donde ρ^m es la distancia mínima de L a Σ, una de estas esferas cubrirá al punto $M^{(0)}$, de donde se deduce que $u(M^{(0)} = u(M_0)$. En virtud de que $M^{(0)}$ es arbitrario, y de que $u(M)$ es continua en la región cerrada $T + \Sigma$, se concluye que $u(M) \equiv u(M_0)$ en todas partes, incluyendo los puntos de la frontera. De este modo, de todas las funciones armónicas sólo la constante puede alcanzar su valor máximo en los puntos interiores de la región.

Un teorema análogo se puede demostrar también con respecto al valor mínimo.

Corolario 1. Si las funciones u y U son continuas en la región $T + \Sigma$, armónicas en T y si

$$u \leqslant U \text{ en } \Sigma,$$

entonces también

$$u \leqslant U \text{ en todas partes dentro de } T.$$

En efecto, la función $U - u$ es continua en $T + \Sigma$, armónica en T y

$$U - u \geqslant 0 \text{ en } \Sigma.$$

En virtud del principio del valor máximo, es

$$U - u \geqslant 0 \text{ en todas partes dentro de } T,$$

de donde se deduce nuestra afirmación.

Corolario 2. Si las funciones u y U son continuas en la región $T + \Sigma$, armónicas en T y si

$$| u | \leqslant U \text{ en } \Sigma,$$

entonces

$$| u | \leqslant U \text{ en todas partes dentro de } T.$$

De las condiciones del teorema se sigue que las funciones armónicas $-U$, u y U satisfacen a las condiciones

$$-U \leqslant u \leqslant U \text{ en } \Sigma.$$

Aplicando dos veces el corolario 1, se obtiene que

$$-U \leqslant u \leqslant U \text{ en todas partes dentro de } T,$$

o bien

$$| u | \leqslant U \text{ dentro de } T.$$

Corolario 3. Para una función $u(M)$, armónica en T y continua en $T + \Sigma$ tiene lugar la desigualdad $|u| \leqslant \text{máx } |u||_{\Sigma}$ en todas partes en $T + \Sigma$. Para demostrarlo, hagamos $U = \text{máx } |u||_{\Sigma}$ y apliquemos el corolario 2.

A pesar de que la exposición fue hecha para tres dimensiones, todos los resultados se generalizan al caso de funciones armónicas de cualquier número de variables.

3. Unicidad y estabilidad del primer problema de contorno. Sea dada una región T, limitada por la superficie cerrada Σ, en la cual se ha dado una función f. En el caso más sencillo en que la función de frontera f es continua, el primer problema interior de contorno (problema interior de Dirichlet) para la ecuación de Laplace se plantea comúnmente de la siguiente manera.

Se pide hallar una función u tal que:

a) esté definida y sea continua en la región cerrada $T + \Sigma$, que incluye a la frontera;

b) satisfaga dentro de la región T a la ecuación $\Delta u = 0$;

c) tome en la frontera Σ los valores dados f.

En la condición a) se presupone que la función es armónica dentro de la región T. La imposición de que sea armónica en la frontera es superflua, puesto que ésta exigiría restricciones complementarias para los valores de frontera.

La condición de continuidad de u en la región cerrada (u otra condición que aclare el sentido de que la función u toma en la frontera los valores dados) es necesaria para la unicidad. Si eliminamos esta condición, cualquier función igual a una constante C dentro de T y a la función dada f en Σ se podría considerar como solución del problema, por cuanto ésta satisface a las condiciones b) y c).

Demostremos el teorema de unicidad:

el primer problema interior de contorno para la ecuación de Laplace no puede tener dos soluciones diferentes.

Supongamos que existen dos funciones diferentes, u_1 y u_2, que son soluciones del problema, es decir, funciones continuas en la región cerrada $T + \Sigma$, que satisfacen dentro de la región a la ecuación de Laplace, y que toman en la superficie Σ el mismo valor f. La diferencia de estas funciones, $u = u_1 - u_2$, posee las siguientes propiedades:

1) $\Delta u = 0$ dentro de la región T;

2) u es continua en la región cerrada $T + \Sigma$;

3) $u|_\Sigma = 0$.

La función $u(M)$, de este modo, es continua y armónica en la región T e igual a cero en la frontera. Como es sabido, cualquier función continua en una región cerrada alcanza su valor máximo. Demostremos que $u \equiv 0$. Si fuese $u \not\equiv 0$ y $u > 0$ al menos en un punto, la función debería alcanzar su valor máximo positivo dentro de la región, lo cual es imposible. En forma completamente análoga se demuestra que la función u no puede tomar en ningún punto dentro de T valores negativos. De aquí se deduce que

$$u \equiv 0.$$

Pasemos a demostrar la **dependencia continua de la solución del primer problema de contorno de los valores de frontera.** Recuérdese que el problema se llama físicamente determinado, si a una pequeña variación de las condiciones que determinan la solución del problema, en este caso, de las condiciones de frontera, le corresponde una pequeña variación de la propia solución.

Sean u_1 y u_2 funciones continuas en $T + \Sigma$ y armónicas dentro de T, para las cuales $|u_1 - u_2| \leqslant \varepsilon$ en Σ. Entonces esta misma desigualdad se cumple en todas partes dentro de T.

Esta afirmación se desprende directamente del corolario 2, pág. 333, en virtud de que $U \equiv \varepsilon$ es una función armónica.

De esta manera, hemos demostrado la dependencia continua de la solución de las condiciones de frontera y la unicidad del primer problema interior.

4. Problemas con condiciones discontinuas de frontera. A menudo se encuentra también el primer problema de contorno con condiciones de frontera discontinuas. Una función continua en la región cerrada no puede ser solución de este problema. Por esto, hay que puntualizar el planteamiento del primer problema de contorno al aplicarlo al caso considerado.

Supongamos que en la curva C, que delimita a la región S en el plano (x, y), se ha dado una función $f(P)$ continua a trozos.

Se pide hallar la función $u(M)$: 1) que sea armónica dentro de la región S; 2) que tienda continuamente a los valores de frontera en los puntos de continuidad de estos últimos; 3) que sea acotada en la región cerrada $S + C$.

Obsérvese que la condición complementaria de acotación se refiere, de hecho, a los entornos de los puntos de discontinuidad de la función $f(P)$.

Demostremos el siguiente teorema:

la solución del primer problema de contorno con valores de frontera continuos a trozos es única.

Sean u_1 y u_2 dos soluciones del problema planteado. La diferencia

$$v = u_1 - u_2$$

1) es una función armónica dentro de S;

2) tiende en forma continua a los valores de frontera nulos en la frontera, a excepción de los puntos de discontinuidad de $f(P)$, en los cuales ésta puede tener discontinuidades;

3) está acotada en $S + C$: $|v| < A$.

Escribamos la función armónica

$$U(M) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{D}{r_i},$$

donde ε es un número positivo arbitrario; D, el diámetro de la región; r_i, la distancia del punto M considerado al punto i-ésimo de discontinuidad P_i. La función $U(M)$ es positiva, puesto que todos los sumandos son mayores que cero.

Tracemos en cada punto de discontinuidad P_i un círculo K_i de radio δ, escogiendo δ de modo que cada sumando

$$\varepsilon \ln \frac{D}{r_i}$$

supere a A en la circunferencia correspondiente C_i, es decir, de modo que $\varepsilon \ln \frac{D}{\delta} \geqslant A$. La función v es continua en la región cerrada $S - \sum_{i=1}^{n} K_i = S'$ y $|v| \leqslant U$ en la frontera de esta región.

Por esto, en virtud del principio del máximo, U es mayorante de la función v:

$$|v(M)| \leqslant U(M).$$

Fijando un punto arbitrario M de la región S y haciendo tender $\varepsilon \to 0$, se obtiene:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U(M) = 0;$$

por consiguiente,

$$v(M) = 0,$$

puesto que v no depende de ε, o bien

$$u_1 \equiv u_2,$$

que es lo que se quería demostrar.

5. **Puntos singulares aislados.** Estudiemos los puntos singulares de una función armónica. Sea P un punto singular aislado, que se halla dentro de la región en que la función u es armónica. Son posibles dos casos:

1) la función armónica está acotada en un entorno del punto P;

2) la función armónica no está acotada en un entorno del punto P. Con puntos singulares de segunda especie ya nos encontramos antes $\left(\text{por ejemplo, } \ln \frac{1}{r}\right)$. El teorema siguiente demuestra que el primer tipo de puntos singulares no puede tener lugar.

Si una función acotada $u(M)$ es armónica dentro de la región S, a excepción del punto P, se puede determinar el valor $u(P)$ de tal modo que la función $u(M)$ sea armónica en todas partes dentro de S.

Tomemos un círculo K_α de radio α con centro en el punto P, que se halle enteramente dentro de S, y consideremos en su interior la función armónica v, que coincide con la u en la circunferencia C_α del círculo K_α[1]).

Escribamos la diferencia

$$w = u - v,$$

la cual

1) es armónica en todo el interior de K_α, a excepción del punto P, en el cual w no está determinada,

2) tiende en forma continua a los valores de frontera nulos en C_α,

3) está acotada en la región cerrada $K_\alpha + C_\alpha$ ($|w| < A$).

Igual que en la demostración del teorema precedente (p. 4), escribamos la función armónica no negativa

$$U(M) = \varepsilon \ln \frac{\alpha}{r}.$$

---

[1]) La existencia de tal función será probada en el § 3; además, su construcción no se basa en el teorema que se demuestra.

Aquí ε es un número positivo arbitrario, α, el radio del círculo K_α, y r, la distancia del punto M en cuestión al punto de discontinuidad P.

Construyamos un círculo K_δ con centro en el punto P, tomando su radio δ de modo que en su circunferencia el valor de U supere a A, y consideremos la región $K_\alpha - K_\delta$. La función w es continua en la región cerrada $\delta \leqslant r \leqslant \alpha$ y en la frontera de esta región tiene lugar la desigualdad $|w| \leqslant U$. En virtud del principio del valor máximo, la función no negativa U es mayorante de la w:

$$|w| \leqslant U(M) \text{ para } \delta \leqslant r \leqslant \alpha.$$

Fijando un punto arbitrario M de la región K_α, que no coincida con P, y efectuando el paso al límite cuando $\varepsilon \to 0$, se obtiene:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U(M) = 0;$$

en consecuencia, en todas partes, con la posible excepción del punto P, debe ser

$$w = 0.$$

De este modo, la función u coincide con la v en todas partes en la región S, con la excepción del punto P. Haciendo $u(P) = v(P)$, se obtiene la función $u \equiv v$, que es armónica en todas partes dentro de la región S. Con esto el teorema queda demostrado.

Análogamente se efectúa la demostración para el caso tridimensional, en donde se puede tomar como función mayorante la función $U(M) = \varepsilon\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha}\right)$.

En la demostración del teorema de este punto se supuso que la función u estaba acotada en un entorno del punto P. Sin embargo, los mismos razonamientos siguen siendo válidos si se supone que la función u, en un entorno del punto P, satisface a la desigualdad

$$|u(M)| < \varepsilon(r) \log \frac{1}{r_{PM}}, \tag{17}$$

donde $\varepsilon(r)$ es una función arbitraria, que tiende a cero cuando $r \to 0$, es decir, que en un entorno del punto P la función $u(M)$ crece más lentamente que $\log \frac{1}{r_{PM}}$.

De esta manera, si la función $u(M)$ es armónica dentro de la región S, a excepción del punto P, en un entorno del cual ésta cre-

ce más lentamente que $\log \frac{1}{r_{MP}}$ cuando $M \to P$, esta función está acotada en un entorno del punto P, y se puede definir el valor $u(P)$ de tal forma que la función u sea armónica en toda la región S.

Análogamente en el caso de tres variables independientes: si la función armónica $u(M)$ en un entorno del punto singular aislado P crece más lentamente que $\frac{1}{r}$,

$$|u(M)| < \varepsilon(r) \frac{1}{r_{MP}} \begin{pmatrix} \varepsilon(r) \to 0 \\ r \to 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

entonces ella está acotada en un entorno de este punto, y se puede definir el valor $u(P)$ de modo que la función $u(M)$ sea armónica también en el propio punto P.

6. Regularidad de una función armónica de tres variables en el infinito. Una función armónica de tres variables $u(x, y, z)$ se llama regular en el infinito, si

$$|u| < \frac{A}{r} \text{ y } \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| < \frac{A}{r^2} \tag{19}$$

para un $r > r_0$ suficientemente grande.

Demostremos que, si la función $u(x, y, z)$ es armónica fuera de cierta superficie cerrada Σ y tiende a cero uniformemente en el infinito, entonces es regular en el infinito.

La condición de que tienda uniformemente a cero en el infinito significa que existe una función $\varepsilon^*(r)$ tal que

$$|u(M)| < \varepsilon^*(r) \quad (\varepsilon^*(r) \to 0 \quad \text{para} \quad r \to \infty), \tag{20}$$

donde r es el radio-vector del punto M.

Efectuando la transformación de Kelvin

$$v(r', \theta, \varphi) = ru(r, \theta, \varphi), \quad \text{donde} \quad r' = \frac{1}{r},$$

se obtiene que la función v es armónica en todas partes dentro de la superficie Σ', en la cual se convierte la superficie Σ en la transformación de los radios-vector inversos, a excepción del origen de coordenadas, donde tiene un punto singular aislado.

De la condición (20) se deduce que, en un entorno del origen de coordenadas, para la función v tiene lugar la desigualdad

$$|v(r', \theta, \varphi)| \leqslant \varepsilon^*\left(\frac{1}{r'}\right)\frac{1}{r'} = \varepsilon(r')\frac{1}{r'},$$

donde

$$\varepsilon(r') = \varepsilon^*\left(\frac{1}{r'}\right) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad r' \to 0.$$

En base al último teorema del p. 5, la función $v(r', \theta, \varphi)$ está acotada y es armónica para $r' \leqslant r_0'$:

$$|v(r', \theta, \varphi)| \leqslant A \quad \text{para} \quad r' \leqslant r_0', \tag{21}$$

de donde se deduce, precisamente, que

$$|u(r, \theta, \varphi)| = \frac{|v(r', \theta, \varphi)|}{r} \leqslant \frac{A}{r} \quad \text{para} \quad r \geqslant r_0 = \frac{1}{r_0'}.$$

En virtud de que la función v es armónica para $r' = 0$, se puede escribir:

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r}\cdot v(x', y', z')\right] =$$

$$= -\frac{x}{r^3}\cdot v + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial v}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial x}\right], \tag{22}$$

donde

$$x' = \frac{x}{r}r', \quad y' = \frac{y}{r}r', \quad z' = \frac{z}{r}r'.$$

De aquí, calculando las derivadas $\frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial y'}{\partial x}, \frac{\partial z'}{\partial x}$ y tomando en cuenta la acotación de las derivadas primeras de la función v en un entorno del punto $r' = 0$, se obtiene:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{A}{r^2} \quad \text{cuando} \quad r \to \infty.$$

Acotaciones análogas tienen lugar para las derivadas $\frac{\partial u}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial z}$.

7. Problemas externos de contorno. Unicidad de la solución para los problemas bi- y tridimensionales. Los problemas de contorno externos se plantean en forma diferente para tres y dos variables independientes.

Consideremos primeramente el caso de tres variables. Sea T una región externa con respecto a cierta superficie cerrada Σ.

El primer problema externo de contorno (problema externo de Dirichlet) consiste en lo siguiente:

se pide hallar la función $u(x, y, z)$ que satisfaga a las condiciones:

1) $\Delta u = 0$ en la región no acotada T;

2) u es continua en todas partes, incluyendo la superficie Σ;

3) $u|_\Sigma = f(x, y, z)$, donde f es una función dada en la superficie Σ;

4) $u(M)$ tiende a 0 uniformemente en el infinito: $u(M) \to 0$ cuando $M \to \infty$.

La última condición es esencial para la unicidad de la solución, cosa que se comprueba fácilmente con un ejemplo sencillo. Supongamos que se pide resolver el primer problema externo de contorno para la esfera S_R de radio R con la condición de frontera constante

$$u|_{S_R} = \text{const} = f_0.$$

Eliminando la condición 4), se aprecia que las soluciones del problema pueden ser las funciones $u_1 = f_0$ y $u_2 = f_0 \dfrac{R}{r}$, así como también cualquier función

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2, \text{ donde } \alpha + \beta = 1.$$

Demostremos que

el primer problema de contorno externo para las funciones armónicas de tres variables independientes tiene solución única.

Suponiendo la existencia de dos soluciones u_1, u_2 que satisfagan a las condiciones 1) — 4), se observa que su diferencia $u = u_1 - u_2$ es la solución del problema con condiciones de frontera nulas. Como la condición 4) se cumple también para la función u, entonces para un $\varepsilon > 0$ arbitrario se puede indicar un R^* tal que

$$|u(M)| < \varepsilon \text{ para } r \leqslant R^*.$$

Si el punto $\overline{M}$ se halla dentro de la región T' (fig. 47), que se encuentra entre la superficie Σ y la esfera S_r $(r \geqslant R^*)$, entonces $|u(\overline{M})| < \varepsilon$, como se desprende del principio del valor máximo, aplicado a la región T'. En virtud de que ε es arbitrario, se concluye que $u \equiv 0$ en la región T', así como también en toda la región T, lo cual demuestra la unicidad de la solución del primer problema externo de contorno en el espacio.

El primer problema exterior en el plano se enuncia del siguiente modo:

se pide hallar una función u que satisfaga a las condiciones:

1) $\Delta u = 0$ en la región infinita considerada Σ, delimitada por el contorno C;

2) la función u es continua en todas partes, incluyendo C;

3) $u|_C = f(x, y)$, donde f es una función dada en C;

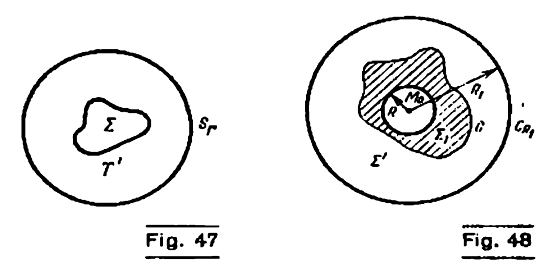


Fig. 47 Fig. 48

4) $u(M)$ **está acotada en el infinito, es decir, existe un número** N **tal que** $|u(M)| \leqslant N$.

La condición de que la solución se anule en el infinito aquí también resulta ser suficiente para demostrar que no puede haber dos soluciones distintas, pero es demasiado fuerte, puesto que con ella el problema puede resultar irresoluble.

Demostremos que

el primer problema externo de contorno para las funciones de dos variables tiene solución única.

Admitiendo la existencia de dos soluciones diferentes u_1 y u_2, y tomando su diferencia $u = u_1 - u_2$, que es solución del primer problema de contorno con condiciones de frontera nulas, tendremos, en virtud de la condición 4),

$$|u| \leqslant N = N_1 + N_2,$$

donde N_1 y N_2 son tales que $|u_1| \leqslant N_1$, $|u_2| \leqslant N_2$. Designemos mediante Σ_1 la región que se halla dentro de C y es el complemento de la región Σ, de forma que $\Sigma + \Sigma_1$ es todo el plano. Tomemos un punto M_0 dentro de Σ_1 y la circunferencia de radio R con centro en el punto M_0, que se halla dentro de Σ_1 (fig. 48). La función armónica $\ln \frac{1}{R_{MM_0}}$ no tiene particularidades en la región Σ; la función $\ln \frac{R_{MM_0}}{R}$ es positiva en toda la región Σ, incluyendo a C. Sea C_{R_1} una circunferencia de radio R_1 con centro en M_0, que contenga enteramente al contorno C, y Σ', la región delimitada por las curvas C y C_{R_1}. La función u_{R_1}, definida mediante la igualdad

$$u_{R_1} = N \frac{\ln \frac{R_{MM_0}}{R}}{\ln \frac{R_1}{R}}, \tag{23}$$

es una función armónica igual a N en la circunferencia de radio R_1, positiva en C; del principio del valor máximo se sigue que u_{R_1} es mayorante para el módulo de la función $u(M)$ en la región Σ:

$$|u(M)| < u_{R_1}(M).$$

Fijemos un punto M y aumentemos indefinidamente R_1. Es evidente que $u_{R_1}(M) \to 0$ para $R_1 \to \infty$. De aquí se deduce que

$$u(M) = 0.$$

Con esto, en virtud de la arbitrariedad de M, queda demostrada la unicidad de la solución del problema planteado. La unicidad de la solución de este problema se puede demostrar también aplicando la transformación de los radios-vector inversos, que transforma la región exterior con respecto al contorno C en la región interior al contorno C', en el cual se transforma el contorno C.

En este caso, el punto infinitamente alejado se transforma en un punto singular aislado, en cuyo entorno la función v está acotada. Del teorema del p. 5 se obtiene que la función v es armónica en el origen de coordenadas, con lo cual se demuestra la unicidad de la solución.

De los razonamientos expuestos se deduce que una función armónica de dos variables $u(M)$, acotada en el infinito, tiende a un valor determinado cuando M tiende al infinito.

La diferencia en el planteo del primer problema externo de contorno para dos y tres variables se puede ilustrar en el siguiente ejemplo físico. Sea dada una esfera de radio R, en cuya superficie se mantiene una temperatura constante u_0, y supongamos que se pide hallar la distribución estacionaria de la temperatura en el espacio exterior. La función $u = u_0 \frac{R}{r}$ representa la solución de este problema, que se anula en el infinito.

Consideremos ahora el problema bidimensional, y supongamos que en la frontera de una circunferencia de radio R se ha dado el valor de frontera constante

$$u\,|_{\Sigma} = f_0 = \text{const}.$$

En este caso, $u \equiv f_0$ es la única solución acotada del problema, y no hay soluciones que se anulen en el infinito. Ya nos hemos encontrado antes con el carácter esencialmente distinto del comportamiento de las funciones armónicas en el infinito para dos y tres variables independientes (por ejemplo, el comportamiento de $\frac{1}{r}$ y de $\ln \frac{1}{r}$ en el infinito).

Para las regiones no acotadas espacial y plana tiene lugar el principio del valor máximo. Esto no es difícil de demostrar median-

te razonamientos análogos a los que fueron utilizados en la demostración de los teoremas de unicidad. De aquí, a su vez, se deduce la dependencia continua de la solución de las condiciones de frontera.

8. Segundo problema de contorno. Teorema de unicidad. Llamaremos solución del segundo problema de contorno a una función u, continua en la región $T + \Sigma$, y que satisfaga en la superficie Σ la condición

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f(M).$$

Demostremos que **la solución del segundo problema de contorno interior (problema interior de Neumann) se determina salvo una constante arbitraria.**

Haremos la demostración con la hipótesis complementaria de que la función u tiene derivadas primeras continuas en la región $T + \Sigma$[1]).

Sean u_1 y u_2 dos funciones con derivadas continuas en $T + \Sigma$, que satisfacen a la ecuación $\Delta u = 0$ en T y a la condición $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = f(M)$ en Σ. Para la función $u = u_1 - u_2$, tendremos:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0.$$

Haciendo en la primera fórmula de Green (3) $v = u$ y teniendo en cuenta las relaciones $\Delta u = 0$ y $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0$, se obtiene

$$\iiint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = 0.$$

De aquí se deduce, en virtud de la continuidad de la función u y de sus derivadas primeras, que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

es decir,

$$u \equiv \text{const},$$

que es lo que queríamos demostrar.

---

[1]) La hipótesis de la continuidad de las derivadas primeras en $T + \Sigma$ se hizo para simplificar la demostración. La demostración de la unicidad bajo las hipótesis más generales fue dada por M. V. Keldish y M. A. Lavrentiev (DAN URSS, t. XVI, 1937); véase también V. I. Smirnov, *Curso de Matemáticas Superiores*, t. IV, ed. Fizmatguiz, 1959.

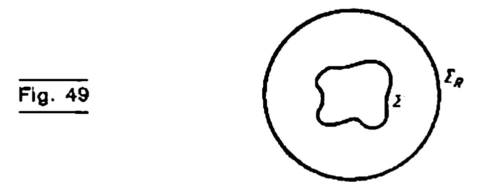


Fig. 49

El método de demostración que acabamos de exponer se aplica también al caso de una región no acotada, para funciones que satisfacen a las condiciones de regularidad en el infinito.

Demostremos que en el caso de una región no acotada exterior con respecto a una superficie cerrada, la fórmula de Green (3) es aplicable a funciones regulares en el infinito.

Consideremos una región T, exterior con respecto a una superficie cerrada. Tracemos una esfera Σ_R de radio lo suficientemente grande como para que Σ esté dentro de Σ_R. Designemos por T_R la región limitada por Σ y Σ_R (fig. 49). Aplicando la fórmula de Green en la región T_R a dos funciones u y v regulares en el infinito, se obtiene:

$$\iiint_{T_R} u\,\Delta v\,d\tau = -\iiint_{T_R}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right]d\tau + \\ + \iint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma + \iint_{\Sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma. \quad (24)$$

Apreciamos la integral por Σ_R, aplicando la propiedad de regularidad de las funciones u y v:

$$\left|\iint_{\Sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma\right| = \left|\iint_{\Sigma_R} u\,(v_x\cos\alpha + v_y\cos\beta + v_z\cos\gamma)\,d\sigma\right| \leqslant \\ \leqslant \left|\iint_{\Sigma_R}\frac{A}{R}\cdot\frac{3A}{R^2}\,d\sigma\right| \leqslant \frac{3A^2}{R^3}4\pi R^2 = \frac{12\pi A^2}{R}.$$

De aquí se ve que

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{\Sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma = 0.$$

La integral del segundo miembro de (24), tomada por T_R, tiende a la integral por toda la región T cuando $R\to\infty$. Esta integral existe, puesto que el integrando, en virtud de la regularidad de u y v, decrece en el infinito como $\frac{1}{R^4}$. Por lo tanto, existe el

límite

$$\lim_{R\to\infty} \iiint_{T_R} u\,\Delta v\,d\tau = \iiint_T u\,\Delta v\,d\tau.$$

Como resultado, se obtiene la fórmula

$$\iiint_T u\,\Delta v\,d\tau =$$

$$= -\iiint_T \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right] d\tau + \iint_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma. \quad (25)$$

Con esto queda establecida la posibilidad de aplicar la primera y, por consiguiente, la segunda fórmula de Green para regiones no acotadas a funciones regulares en el infinito.

Demostremos ahora que el segundo problema exterior de contorno (problema exterior de Neumann) tiene solución única, regular en el infinito.

Haciendo en la fórmula (25) $v = u = u_1 - u_2$ y teniendo en cuenta que $\Delta u = 0$ y $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = 0$, se obtiene:

$$\iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\,d\tau = 0.$$

De aquí, en virtud de la continuidad de las derivadas de la función u se deduce que

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0 \quad \text{y} \quad u \equiv \text{const.}$$

Como $u = 0$ en el infinito, se tiene que

$$u \equiv 0,$$

es decir,

$$u_1 \equiv u_2,$$

que es lo que había que probar.

Surge naturalmente la pregunta: ¿se puede demostrar por este mismo método la unicidad del primer problema de contorno?

Sean u_1 y u_2 soluciones diferentes del primer problema de contorno (interior). Apliquemos la fórmula (3) a las funciones $u = u_1 - u_2$ y $v = u$ en la región T, delimitada por la superficie Σ:

$$\iiint_T u\,\Delta u\,d\tau = -\iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\,d\tau + \iint_\Sigma u\frac{\partial u}{\partial n}\,d\sigma.$$

De aquí, tomando en cuenta las condiciones

$$\Delta u = 0, \quad u\,|_\Sigma = 0,$$

se obtiene

$$\iiint_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, d\tau = 0$$

y, en consecuencia,

$$u_x = u_y = u_z = 0 \text{ y } u = \text{const.}$$

En la superficie Σ, la función u es igual a cero; por esto, se puede afirmar que

$$u \equiv 0 \quad \text{y} \quad u_1 \equiv u_2.$$

Sin embargo, esta demostración no es correcta, puesto que en el proceso de la demostración supusimos la existencia de las derivadas de la función buscada en la superficie Σ, lo cual no se prevee en el planteo del problema. La demostración de la unicidad, basada en el principio del valor máximo, está libre de este defecto.

§ 3. RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DE CONTORNO PARA LAS REGIONES SIMPLES POR EL METODO DE SEPARACION DE LAS VARIABLES

La solución de los problemas de contorno para la ecuación de Laplace puede ser hallada por el método de separación de las variables, en el caso de ciertas regiones simples (círculo, rectángulo, esfera y cilindro y otras). Los problemas de valores propios que se obtienen en estos casos (problemas de Sturm-Liouville) conducen a distintas clases de funciones especiales. En este parágrafo consideraremos los problemas de Dirichlet (interior y exterior), para cuya resolución se utilizan sólo las funciones trigonométricas. Más adelante, al estudiar funciones especiales, se estudiarán los problemas de Dirichlet para la esfera y el cilindro

1. Primer problema de contorno para el círculo. Resolvamos el primer problema de contorno para el círculo:

hallar la función u que satisfaga a la ecuación:

$$\Delta u = 0 \text{ dentro del círculo} \tag{1}$$

y a la condición de frontera

$$u = f \text{ en la frontera del círculo,} \tag{2}$$

donde f es una función dada.

Supondremos, primeramente, que la función f es continua y derivable, y que la solución $u(M)$ es continua en la región cerrada; más adelante eliminaremos la condición de derivabilidad y aún de continuidad de la función f (cfr. p. 4 del § 2). Conjun-

tamente con el problema de contorno interior, estudiaremos también el exterior (véase el § 2, p. 7).

Introduzcamos un sistema de coordenadas polares (ρ, φ) con origen en el centro del círculo. La ecuación (1) en coordenadas polares tiene la forma

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad (3)$$

(véase la fórmula (34) del § 1). Resolveremos el problema por el método de separación de las variables, es decir, buscaremos una solución particular de la ecuación (1) del tipo

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\,\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$$

Sustituyendo esta forma de la solución en la ecuación (3), se obtiene:

$$\frac{\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right)}{\dfrac{R}{\rho}} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda,$$

donde λ = const. De aquí se obtienen dos ecuaciones:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi \not\equiv 0, \qquad (4)$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \lambda R = 0, \qquad R \not\equiv 0. \qquad (5)$$

La primera de estas ecuaciones nos da:

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\,\mathrm{sen}\,\sqrt{\lambda}\varphi.$$

Obsérvese que, cuando el ángulo φ varía en la magnitud 2π, la función uniforme $u(\rho, \varphi)$ debe retornar su valor inicial:

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi) \text{ (condición de periodicidad).}$$

De aquí se deduce que

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi),$$

es decir, $\Phi(\varphi)$ es una función periódica del ángulo φ de período 2π. Esto es posible sólo si $\sqrt{\lambda} = n$, donde n es un entero, y

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\,\mathrm{sen}\,n\varphi.$$

Buscaremos la función $R(\rho)$ en la forma

$$R(\rho) = \rho^{\mu}.$$

Sustituyendo en la ecuación (5) y simplificando entre ρ^{μ}, se halla:

$$n^2 = \mu^2, \text{ o bien } \mu = \pm n \ (n > 0).$$

Por lo tanto.

$$R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n},$$

donde C y D son constantes.

Para resolver el problema interior hay que hacer $R = C\rho^n$ ($\mu = n$), puesto que, si $D \neq 0$, la función $u = R(\rho)\,\Phi(\varphi)$ se vuelve infinita para $\rho = 0$ y no es armónica dentro del círculo. Para resolver el problema exterior, al contrario, hay que tomar $R = D\rho^{-n}$ ($\mu = -n$), puesto que la solución del problema exterior debe estar acotada en el infinito.

De este modo, las soluciones particulares de nuestro problema han sido halladas [1]):

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi) \quad \text{para} \quad \rho \leqslant a,$$

$$u_n(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho^n}(A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi) \quad \text{para} \quad \rho \geqslant a.$$

Las sumas de estas soluciones

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi) \text{ para el problema interior,}$$

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n}(A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi) \text{ para el problema exterior}$$

serán también funciones armónicas, siempre que haya una convergencia suficientemente buena.

Para determinar los coeficientes A_n y B_n, utilicemos la condición de frontera:

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \operatorname{sen} n\varphi) = f. \qquad (6)$$

---

[1]) La expresión del operador de Laplace en el sistema de coordenadas polares (3) pierde el sentido para $\rho = 0$. Demostremos que $\Delta u_n = 0$ también para $\rho = 0$. Para demostrar esto, ya no se puede utilizar el sistema de coordenadas polares.

Pasemos al sistema de coordenadas cartesianas; las soluciones particulares

$$\rho^n \cos n\varphi \quad \text{y} \quad \rho^n \operatorname{sen} n\varphi,$$

que son las partes real o imaginaria de la función

$$\rho^n e^{in\varphi} = (\rho e^{i\varphi})^n = (x + iy)^n$$

son polinomios en x e y. Es evidente que un polinomio que satisface a la ecuación $\Delta u = 0$ para $\rho > 0$, la satisface también para $\rho = 0$, en virtud de la continuidad de las derivadas segundas.

Considerando que f está dada como función del ángulo φ, tomemos su desarrollo en serie de Fourier:

$$f(\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\,\mathrm{sen}\,n\varphi), \tag{7}$$

donde

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\,d\psi,\quad \alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\cos n\psi\,d\psi\quad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\psi)\,\mathrm{sen}\,n\psi\,d\psi\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Comparando las series (6) y (7), se obtiene:

$$A_0=\frac{\alpha_0}{2},\quad A_n=\frac{\alpha_n}{a^n},\quad B_n=\frac{\beta_n}{a^n}\quad \text{para el problema interior,}$$

$$A_0=\frac{\alpha_0}{2},\quad A_n=\alpha_n a^n,\quad B_n=a^n\beta_n\quad \text{para el problema exterior.}$$

De este manera, hemos obtenido la solución formal del primer problema interior para el círculo en forma de la serie

$$u(\rho,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{a}\right)^n(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\,\mathrm{sen}\,n\varphi), \tag{8}$$

y la del problema exterior, en la forma

$$u(\rho,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\rho}\right)^n(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\,\mathrm{sen}\,n\varphi). \tag{9}$$

Para comprobar que las funciones obtenidas son efectivamente las soluciones buscadas, hay que demostrar que es aplicable el principio de superposición, para lo cual hay que demostrar la convergencia de las series, la posibilidad de derivarlas término a término, así como también demostrar la continuidad de estas funciones en la frontera del círculo. Ambas series se pueden representar mediante una sola fórmula:

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}t^n(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\,\mathrm{sen}\,n\varphi)+\frac{\alpha_0}{2},$$

donde

$$t=\begin{cases}\dfrac{\rho}{a}\leqslant 1 & \text{para } \rho\leqslant a \quad \text{(problema interior),}\\[2mm] \dfrac{a}{\rho}\leqslant 1 & \text{para } \rho\geqslant a \quad \text{(problema exterior),}\end{cases}$$

y α_n, β_n son los coeficientes de Fourier de la función $f(\varphi)$.

Demostremos que las series (8) y (9) se pueden derivar cualquier número de veces, para $t < 1$. Sea

$$u_n = t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \operatorname{sen} n\varphi).$$

Calculemos la derivada k-ésima de la función u_n con respecto a φ:

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} = t^n n^k \left[\alpha_n \cos\left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right) + \beta_n \operatorname{sen}\left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

De aquí se obtiene la acotación

$$\left|\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k}\right| \leqslant t^n n^k 2M,$$

donde M indica el máximo del valor absoluto de los coeficientes de Fourier α_n y β_n:

$$\left.\begin{array}{l} |\alpha_n| < M, \\ |\beta_n| < M. \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Fijemos cierto valor $\rho_0 < a$ (para el problema interior), o bien $\rho_1 = \frac{a^2}{\rho_0} > a$ (para el problema exterior); entonces $t_0 = \frac{\rho_0}{a} < 1$. Considerando la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n n^k (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leqslant 2M \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n n^k \qquad (t \leqslant t_0),$$

se observa que ésta converge uniformemente para $t \leqslant t_0 < 1$, para cualquier k. Por esto, las series (8) y (9) se pueden derivar con respecto a φ en cualquier punto dentro (fuera) del círculo cualquier cantidad de veces. Análogamente se demuestra que las series (8) y (9) se pueden derivar con respecto a la variable ρ dentro (fuera) de un círculo de radio $\rho_0 < a$ ($\rho_1 > a$) cualquier número de veces.

Como ρ_0 es arbitrario, se concluye que las series (8) y (9) se pueden derivar término a término en cualquier punto interior (exterior) del círculo. De la posibilidad de derivar término a término, se deduce la posibilidad de aplicar el principio de superposición. De este modo, se ha demostrado que las funciones (8) y (9) satisfacen a la ecuación $\Delta u = 0$ [1]).

---

[1]) Esta ecuación se satisfará tambien para $\rho = 0$; en efecto, expresando las derivadas con respecto a las coordenadas cartesianas mediante las derivadas con respecto a las coordenadas polares, no es difícil probar que las funciones (8) y (9) se pueden derivar cualquier número de veces, con respecto a x e y, para $t \leqslant t_0$. En virtud de la nota al pie de la pág. 348, de aquí se deduce que

$$\Delta u = 0 \text{ para } \rho = 0.$$

En esta demostración hemos utilizado sólo la propiedad de que los coeficientes de Fourier de la función $f(\varphi)$ están acotados (fórmula (10)). Esto tiene lugar para cualquier función acotada (y aun para cualquier función absolutamente integrable). De este modo, las series (8) y (9) que corresponden a cualquier función acotada, determinan funciones que satisfacen a la ecuación

$$\Delta u = 0 \text{ para } t < 1.$$

Esta observación será utilizada más adelante, al generalizar los resultados obtenidos en el presente punto.

Demostremos ahora la continuidad de la función en la región cerrada ($t \leqslant 1$). Es evidente que esto no se puede hacer sin nociones más detalladas sobre las propiedades de la función $f(\varphi)$.

De la hipótesis de continuidad y derivabilidad de la función $f(\varphi)$, se deduce que se puede desarrollar en serie de Fourier, así como también la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty. \tag{11}$$

Por otro lado, se tiene:

$$|t^n \alpha_n \cos n\varphi| \leqslant |\alpha_n|,$$
$$|t^n \beta_n \operatorname{sen} n\varphi| \leqslant |\beta_n|.$$

Por esto, las series (8) y (9) convergen uniformemente para $t \leqslant 1$ y, por consiguiente, las funciones que éstas representan son continuas en la frontera del círculo. De la fórmula (11) se aprecia que la función (9), obtenida para el problema exterior, está acotada en el infinito.

De esta manera, hemos demostrado que las series (8) y (9) satisfacen a todas las condiciones del problema considerado.

2. Integral de Poisson. Transformemos ahora las fórmulas (8) y (9) a una forma más sencilla. Para fijar ideas, consideremos el problema interior; para el exterior, escribiremos el resultado por analogía.

Sustituyendo las expresiones para los coeficientes de Fourier en la fórmula (8) y cambiando de lugar la suma y la integral, tendremos:

$$u(\rho, \varphi) =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\cos n\psi \cos n\varphi + \operatorname{sen} n\psi \operatorname{sen} n\varphi) \right\} d\psi =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n(\varphi - \psi) \right\} d\psi. \tag{12}$$

Efectuemos las siguientes transformaciones idénticas:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n(\varphi-\psi)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} t^n\left[e^{in(\varphi-\psi)}+e^{-in(\varphi-\psi)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(te^{i(\varphi-\psi)}\right)^n+\left(te^{-i(\varphi-\psi)}\right)^n\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{te^{i(\varphi-\psi)}}{1-te^{i(\varphi-\psi)}}+\frac{te^{-i(\varphi-\psi)}}{1-te^{-i(\varphi-\psi)}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1-t^2}{1-2t\cos(\varphi-\psi)+t^2} \qquad \left(t=\frac{\rho}{a}<1\right).$$

Sustituyendo los resultados obtenidos en la igualdad (12), se obtiene:

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+a^2}\,d\psi. \tag{13}$$

La fórmula obtenida, que da la solución del primer problema de contorno dentro del círculo, se llama *integral de Poisson*, y la expresión subintegral

$$K(\rho,\varphi,a,\psi)=\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+a^2},$$

núcleo de Poisson. Obsérvese que $K(\rho, \varphi, a, \Psi)>0$, cuando $\rho<a$, puesto que $2a\rho<a^2+\rho^2$, si $\rho\neq a$.

La integral de Poisson fue deducida bajo la hipótesis de que $\rho<a$; para $\rho=a$, la representación (13) pierde el sentido. Sin embargo,

$$\lim_{\substack{\rho\to a\\ \varphi\to\varphi_0}} u(\rho,\varphi)=f(\varphi_0),$$

puesto que la serie, de la cual se obtuvo la integral de Poisson, es una función continua en la región cerrada.

La función determinada por la fórmula

$$u(\rho,\varphi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2-2a\rho\cos(\varphi-\psi)+a^2}\,d\psi & \text{para } \rho<a,\\ f(\varphi) & \text{para } \rho=a,\end{cases} \tag{13'}$$

satisface a la ecuación $\Delta u=0$ para $\rho<a$ y es continua en la región cerrada, incluyendo la circunferencia $\rho=a$.

La solución del problema de contorno exterior tiene, evidentemente, la forma

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi, & \text{para } \rho > a, \\ f(\varphi) & \text{para } \rho = a. \end{cases} \quad (14)$$

Al comienzo, hemos supuesto que la función $f(\varphi)$ era continua y derivable y, aplicando esto, hemos demostrado que la solución del problema se puede representar en forma de serie infinita. Después, pasamos de la serie a la integral de Poisson, mediante transformaciones idénticas.

Demostremos ahora que **la integral de Poisson da la solución del primer problema de contorno también en el caso en que la función $f(\varphi)$ es solamente continua.**

La integral de Poisson representa la solución de la ecuación de Laplace para $\rho < a$ $(t > 1)$, para una función arbitraria acotada $f(\varphi)$. En efecto, para $\rho < a$ $(t < 1)$, la integral de Poisson es idéntica a la serie (8) y, en virtud de la observación hecha en la pág. 350, satisface a la ecuación $\Delta u = 0$ para una función arbitraria acotada $f(\varphi)$.

De este modo, nos queda demostrar que la función u tiende, en nuestro caso, a los valores de frontera en forma continua. Tomemos una sucesión de funciones continuas derivables

$$f_1(\varphi), \; f_2(\varphi), \; \ldots, \; f_k(\varphi), \; \ldots,$$

que tienda uniformemente a la función $f(\varphi)$ [1]:

$$\lim_{k \to \infty} f_k(\varphi) = f(\varphi).$$

A la sucesión de las funciones de frontera le corresponderá la sucesión de funciones armónicas $u_k(\rho, \varphi)$, determinadas por la fórmula (13) u (8). La convergencia uniforme de la sucesión $\{f_k(\varphi)\}$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $k_0(\varepsilon) > 0$, tal que

$$|f_k(\varphi) - f_{k+l}(\varphi)| < \varepsilon \quad \text{para } k > k_0(\varepsilon), \; l > 0.$$

Para las funciones $u_k(\rho, \varphi)$, que representan las soluciones del primer problema de contorno, tendremos, en virtud del principio del valor máximo:

$$|u_k(\rho, \varphi) - u_{k+l}(\rho, \varphi)| < \varepsilon$$
$$\text{para } \rho \leqslant \rho_0, \text{ si } k > k_0(\varepsilon), \; l > 0.$$

[1] No nos detendremos en indicar cómo se efectúa esto. Tal sucesión se puede escoger de varias maneras.

De este modo, la sucesión $\{u_k\}$ converge uniformemente hacia cierta función $u = \lim_{k\to\infty} u_k$. La función límite $u(\rho, \varphi)$ es continua en la región cerrada, por cuanto todas las funciones u_k que se representan por las integrales

$$u_k(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2-\rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi-\psi)+a^2} f_k(\psi)\,d\psi,$$

son continuas en la región cerrada. Es evidente que $u(\rho, \varphi) = \lim_{k\to\infty} u_k(\rho, \varphi) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2-\rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\varphi-\psi)+\rho^2} f(\psi)\,d\psi & \text{para } \rho < a, \\ f(\varphi) & \text{para } \rho = a, \end{cases}$$

puesto que la sucesión $\{f_k\}$ converge uniformemente hacia f y, por esto, el paso al límite dentro del signo integral es lícito.

De este modo, la función

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2-\rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi-\psi)+a^2} f(\psi)\,d\psi$$

es, para una función continua arbitraria $f(\varphi)$, la solución de la ecuación de Laplace, que tiende en forma continua en la frontera del círculo a los valores dados.

3. Caso de valores discontinuos de frontera. Demostremos que las fórmulas (13′) y (14) dan la solución del problema de contorno para una función $f(\varphi)$ continua a trozos arbitraria, es decir, que esta solución está acotada en toda la región y tiende en forma continua a los valores de frontera en los puntos de continuidad de la función $f(\varphi)$, siendo, de esta manera, la única solución que posee esta propiedad (cfr. § 2, p. 4). Sea φ_0 un punto de continuidad de la función $f(\varphi)$. Hay que demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon)$ tal que

$$|u(\rho, \varphi) = f(\varphi_0)| < \varepsilon,$$

si

$$|\rho - a| < \delta(\varepsilon) \text{ y } |\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon).$$

En virtud de la continuidad de la función $f(\varphi)$, existe un $\delta_0(\varepsilon)$ tal que

$$|f(\varphi) - f(\varphi_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{si} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon).$$

Consideremos las funciones auxiliares $\overline{f(\varphi)}$ y $\underline{f(\varphi)}$, continuas y derivables, que satisfacen a las condiciones siguientes:

$$\overline{f(\varphi)} = f(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon),$$

$$\overline{f(\varphi)} \geqslant f(\varphi) \quad \text{para} \quad |\varphi - \varphi_0| > \delta_0(\varepsilon)$$

y

$$\underline{f(\varphi)} = f(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon),$$

$$\underline{f(\varphi)} \leqslant f(\varphi) \quad \text{para} \quad |\varphi - \varphi_0| > \delta_0(\varepsilon),$$

y que son en lo demás arbitrarias. Si determinamos, mediante la fórmula (13), las funciones $\bar{u}(\rho, \varphi)$ y $\underline{u}(\rho, \varphi)$ para $\bar{f}$ y $\underline{f}$, éstas serán funciones armónicas, que tienden en forma continua a $\bar{f}(\varphi)$ y $\underline{f}(\varphi)$.

En virtud de que el núcleo de Poisson es positivo, se tiene que

$$\underline{u}(\rho, \varphi) \leqslant u(\rho, \varphi) \leqslant \bar{u}(\rho, \varphi),$$

puesto que

$$\underline{f}(\varphi) \leqslant f(\varphi) \leqslant \bar{f}(\varphi).$$

De la continuidad de las funciones $\bar{u}(\rho, \varphi)$ y $\underline{u}(\rho, \varphi)$ en la frontera para $\varphi = \varphi_0$, se deduce la existencia de un $\delta_1(\varepsilon)$ tal que

$$|\bar{u}(\rho, \varphi) - \bar{f}(\varphi_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

para

$$|\rho - a| < \delta_1(\varepsilon), \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_1(\varepsilon)$$

y

$$|\underline{u}(\rho, \varphi) - \underline{f}(\varphi_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

para

$$|\rho - a| < \delta_1(\varepsilon), \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_1(\varepsilon).$$

De estas desigualdades se halla:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}(\rho, \varphi) &\leqslant \bar{f}(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2} = f(\varphi_0) + \varepsilon, \\ f(\varphi_0) - \varepsilon &= \underline{f}(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{u}(\rho, \varphi) \end{aligned}\right\} \quad \text{para} \quad \begin{aligned} &|\rho - a| < \delta(\varepsilon), \\ &|\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon), \end{aligned}$$

donde $\delta = \text{mín}(\delta_0, \delta_1)$.

Confrontando las desigualdades obtenidas, se halla que

$$f(\varphi_0) - \varepsilon \leqslant \underline{u}(\rho, \varphi) \leqslant u(\rho, \varphi) \leqslant \bar{u}(\rho, \varphi) \leqslant f(\varphi_0) + \varepsilon,$$

o bien

$$|u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0)| < \varepsilon \quad \text{para} \quad \begin{array}{l} |a-\rho| < \delta(\varepsilon), \\ |\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon), \end{array}$$

lo cual demuestra la continuidad de $u(\rho, \varphi)$ en el punto (a, φ_0).

La acotación de $u(\rho, \psi)$ se deduce de que, en virtud de que el núcleo de Poisson es positivo, entonces

$$|u(\rho, \varphi)| < M \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi)} d\psi = M,$$

si $|f(\psi)| < M$. El valor de la integral es

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho^2)\, d\psi}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} = 1,$$

puesto que, en virtud de lo que hemos demostrado antes, el primer miembro es una función armónica, que tiende continuamente a los valores de frontera $f = 1$, y tal función es idénticamente igual a 1. Análogamente, es $u(\rho, \varphi) > M_1$, si $f > M_1$, lo cual demuestra la acotación del valor absoluto de la función $u(\rho, \varphi)$.

§ 4. FUNCION DE LA FUENTE

El método de la función de la fuente da un aparato cómodo para la representación analítica de la solución de los problemas de contorno.

En el presente parágrafo daremos la definición y las propiedades fundamentales de la función de la fuente para la ecuación de Laplace, así como también se escribirán las funciones de la fuente para varias regiones simples (círculo, esfera, semiespacio). La construcción de estas funciones se efectuará por el método de las imágenes electrostáticas.

1. Función de la fuente para la ecuación $\Delta u = 0$ y sus propiedades fundamentales. Para toda función u, continua conjuntamente con sus derivadas primeras en una región cerrada T, delimitada por una superficie Σ suficientemente suave, y que tenga derivadas segundas dentro de T, como fue demostrado en el § 2, p. 1, tiene lugar la representación integral

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_\Sigma \left[\frac{1}{R_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right)\right] d\sigma_P -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint_T \frac{\Delta u}{R_{MM_0}} d\tau_M. \quad (1)$$

Si la función $u(M)$ es armónica, la integral de volumen es igual a cero; si, en cambio, $u(M)$ satisface a la ecuación de Poisson, la integral de volumen es una función conocida.

Sea $v(M)$ cierta función armónica, continua en $T+\Sigma$, conjuntamente con sus derivadas primeras, que no tenga singularidades en ningún punto. La segunda fórmula de Green

$$\iiint_T (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\tau = \iint_\Sigma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

nos da:

$$0 = \iint_\Sigma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) d\sigma - \iiint_T v\,\Delta u\,d\tau. \tag{2}$$

Sumando (2) y (1), se obtiene:

$$u(M_0) = \iint_\Sigma \left[G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right] d\sigma - \iiint_T \Delta u\cdot G\,d\tau, \tag{3}$$

donde

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v \tag{3'}$$

es una función de dos puntos: $M_0(x, y, z)$ y $M(\xi, \eta, \zeta)$. El punto M_0 está fijo, y por esto x, y, z juegan el papel de parámetros.

La fórmula (3) contiene a $u|_\Sigma$ y $\frac{\partial u}{\partial n}|_\Sigma$. Pero en la resolución del primer problema de contorno se da sólo $u|_\Sigma$, y en la del segundo, el valor $\frac{\partial u}{\partial n}|_\Sigma$. La función v se escoge de modo que sea $G|_\Sigma = 0$ para el primer problema de contorno $\left(\frac{\partial G}{\partial n}|_\Sigma = 0\right.$ para el segundo problema de contorno). Determinemos la función $G(M, P)$ mediante las condiciones:

1. $G(M, P)$, como función del punto $P(\xi, \eta, \zeta)$, satisface a la ecuación de Laplace

$$\Delta G = G_{\xi\xi} + G_{\eta\eta} + G_{\zeta\zeta} = 0, \quad P \neq M,$$

si el punto $M(x, y, z)$ está fijo, en todos los puntos P de la región T, a excepción del punto $P = M$.

2. $G(M, P)$ se vuelve infinita cuando coinciden los argumentos ($M = P$) y se puede representar en la forma (3'), donde $v = v(M, P)$ es una función armónica en T.

3. $G(M, P)$ se anula en la frontera de la región:

$$G(M, P) = 0, \text{ si } P \in \Sigma.$$

Esta condición puede ser satisfecha si se pide que

$$v|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi R}.$$

La función G, definida de este modo, se llamará *función de la fuente puntual del primer problema de contorno para la ecuación* $\Delta u = 0$. La función de la fuente permite dar una representación explícita de la solución del primer problema de contorno para la ecuación $\Delta u = 0$. En efecto, la fórmula (3) nos da:

$$u(M_0) = -\iint_{\Sigma} u \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma = -\iint_{\Sigma} f \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma \quad (f = u|_{\Sigma}). \qquad (4)$$

Debe tenerse presente que la fórmula (4) fue obtenida mediante la fórmula de Green, que presupone el cumplimiento de condiciones determinadas con respecto a las funciones u y G y a la superficie Σ. En la fórmula (4) figura la expresión $\frac{\partial G}{\partial n}$, cuya existencia en la superficie Σ no se deduce directamente de la definición de la función G.

Al obtener la fórmula (4), partimos de la base que existe una función armónica u, que toma en la superficie Σ el valor f. Con esto, aun en el caso de las regiones para las cuales existe la función de la fuente que satisfaga a las condiciones de aplicación de la fórmula de Green, la fórmula (4) da la representación explícita sólo de las soluciones u del primer problema de contorno que satisfacen a las condiciones de aplicación de la fórmula de Green (demostrando así la unicidad de esta clase de soluciones del primer problema de contorno).

Un estudio detallado de la fórmula (4), efectuado por A. M. Liapunov, demostró que para una amplia clase de superficies, llamadas superficies de Liapunov (véase el § 5), ésta representa la solución del primer problema de contorno bajo condiciones muy generales.

Detengámosnos una vez más en la definición de la función G. La función G se determina mediante la v, que es solución del primer problema de contorno para la ecuación

$$\Delta v = 0$$

con las condiciones de frontera

$$v|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi R}.$$

Puede crearse la idea de que tiene lugar un círculo vicioso. Para hallar la función u — solución del primer problema de contorno— hay que hallar la función v, que es solución del mismo problema. En realidad no hay tal cosa, puesto que el conocer la función de la fuente permite resolver el primer problema de contorno con valores de frontera arbitrarios ($u|_{\Sigma} = f$), mientras que para hallar la propia función G es suficiente resolver un problema de contorno con valores de frontera especiales $\left(v|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi R}\right)$, lo cual, como veremos en varios ejemplos, es mucho más sencillo.

En una interpretación electrostática, la función de la fuente

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R} + v$$

representa el potencial en el punto M de una carga puntual[1]), situada en el punto M_0 dentro de una superficie conductora Σ, conectada a tierra. El primer sumando, $\frac{1}{4\pi R}$, es evidentemente, el potencial de la carga puntual en el espacio libre, y el segundo sumando, v, indica el potencial del campo de las cargas inducidas en la superficie conductora Σ. De este modo, la composición de la función de la fuente se reduce a la determinación del campo inducido.

Detengámosnos en ciertas propiedades de la función de la fuente. Aquí supondremos que las regiones consideradas son tales que para éstas existen funciones de la fuente con derivadas normales en la superficie Σ y que satisfacen a las condiciones de aplicación de la fórmula de Green.

1. La función de la fuente es positiva en todos los puntos dentro de T. En efecto, la función G se anula en la frontera de la región Σ y es positiva en la superficie de una esfera suficientemente pequeña con centro en el polo. De aquí se deduce, en virtud del principio del valor máximo, que es positiva en toda la región.

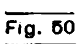
---

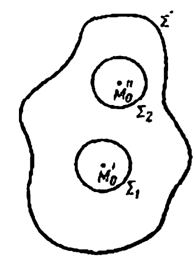
[1]) En una interpretación térmica, la temperatura estacionaria de una fuente puntual de calor de intensidad q se determina por la fórmula

$$\frac{q}{4\pi kr},$$

donde k es el coeficiente de conductividad térmica. De este modo, $G(M, M_0)$ es la temperatura en el punto M, si la temperatura de la superficie del cuerpo es igual a cero, y en el punto M_0 se ha situado una fuente calorífica de intensidad $q = k$.

Si la dimensión de longitud se ha escogido de modo que $k = 1$, la función G corresponde a una fuente de intensidad igual a 1.





Obsérvese también que

$$\left.\frac{dG}{dn}\right|_{\Sigma} \leqslant 0,$$

cosa que se deduce directamente de ser G positiva y de la condición $G|_{\Sigma} = 0$.

2. La función de la fuente es simétrica con respecto a sus argumentos $M_0(x, y, z)$ y $M(\xi, \eta, \zeta)$:

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

Sean M'_0 y M''_0 dos puntos fijos de la región T. Tracemos las esferas Σ_1 y Σ_2 de radio ε con centro en los puntos M'_0 y M''_0 (fig. 50) Haciendo

$$u(M) = G(M, M'_0), \qquad v(M) = G(M, M''_0)$$

y aplicando la fórmula de Green

$$\iiint\limits_{T_\varepsilon} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\tau = \iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma \qquad (5)$$

a la región T, delimitada por las superficies Σ, Σ_1 y Σ_2, tendremos

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \left[G(M, M'_0)\frac{\partial G(M, M''_0)}{\partial n} - G(M, M''_0)\frac{\partial G(M, M'_0)}{\partial n}\right] d\sigma_M +$$

$$+ \iint\limits_{\Sigma_2} \left[G(M, M'_0)\frac{\partial G(M, M''_0)}{\partial n} - G(M, M''_0)\frac{\partial G(M, M'_0)}{\partial n}\right] d\sigma_M = 0,$$

puesto que el primer miembro de la ecuación (5) es igual a cero, por cuanto $\Delta G = 0$, y la integral por la superficie Σ es igual a cero en virtud de las condiciones de frontera. Pasando ahora al límite cuando $\varepsilon \to 0$ y utilizando la particularidad de la fun-

ción de la fuente, se obtiene[1]):

$$G(M_0', M_0'') = G(M_0'', M_0'),$$

o bien

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

La simetría demostrada de la función de la fuente es la expresión matemática del *principio de reciprocidad* en la física: una fuente situada en el punto M_0 causa sobre el punto M la misma acción que la que causaría en el punto M_0 una fuente situada en el punto M. El principio de reciprocidad tiene un carácter muy general, y tiene lugar en distintos campos físicos (electromagnéticos, elásticos, etc.).

Obsérvese que, en particular, de las propiedades de simetría se deduce que para un M fijo $u(M_0) = G(M, M_0)$, como función de las variables x, y, z del punto M_0, posee la misma propiedad que la función $v(M) = G(M, M_0)$ de las variables ξ, η, ζ del punto M para M_0 fijo, es decir, $\Delta_{M_0} G = 0$ para $M \neq M_0$, $G = 0$ para $M_0 \in \Sigma$.

La función de la fuente $G(M, M_0)$ para el caso de dos dimensiones se determinará, evidentemente, mediante las condiciones:

1. $\Delta G = 0$ en todos los puntos de la región considerada S, a excepción del punto $M = M_0$.

2. En el punto $M = M_0$ la función G tiene una particularidad del tipo

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}}.$$

3. $G|_C = 0$, donde C es la frontera de la región S. La función de la fuente tiene en este caso la forma

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} + v(M, M_0),$$

donde v es una función armónica continua en todas partes, que satisface en la frontera a la condición

$$v|_C = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}}.$$

La solución del primer problema de contorno para $\Delta u = 0$ se da aquí por la fórmula

$$u(M_0) = -\int_C f \frac{\partial G}{\partial n} ds \qquad (f = u|_C).$$

[1]) Liapunov demostró este teorema aplicado a la clase de las superficies que llevan su nombre.

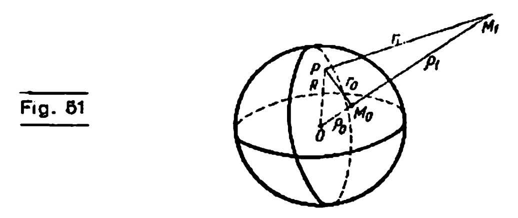


Fig. 51

2. Método de las imágenes electrostáticas y función de la fuente para la esfera. El método más generalizado de composición de la función de la fuente es el *método de las imágenes electrostáticas.* La idea de éste consiste en que al escribir la función de la fuente

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v,$$

el campo inducido v se representa como el campo de cargas situadas fuera de la superficie Σ y que se escogen de forma que se cumpla la condición

$$v|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi R}.$$

Estas cargas se llaman *imágenes electrostáticas* de la carga unitaria, situada en el punto M_0 y que forma, sin la superficie Σ, un potencial de $\frac{1}{4\pi R}$. En muchos casos, la elección de estas cargas no presenta dificultad alguna. Más abajo expondremos ejemplos de composición de la función de la fuente por el método de las imágenes electrostáticas.

De la representación de las funciones de la fuente, obtenidas en todos estos ejemplos, se aprecia directamente la continuidad de las derivadas primeras de la función G en la superficie Σ.

Como primer ejemplo, consideremos la función de la fuente para la esfera.

Sea dada una esfera de radio R con centro en el punto 0, y supongamos que hay que hallar su función de la fuente.

Coloquemos en el punto M_0 una carga unitaria, y tomemos en el radio que pasa por el punto M_0 un segmento OM_1 tal que

$$\rho_0\rho_1 = R^2, \tag{6}$$

donde $\rho_0 = OM_0$ y $\rho_1 = OM_1$ (fig. 51).

La transformación (6), que pone en correspondencia al punto M_0 con el punto determinado M_1, es una transformación de los

radios inversos, y el punto M_1 se llama *conjugado* del punto M_0. Esta transformación es recíproca, y el punto M_0 se puede considerar como conjugado del M_1.

Demostremos que para todos los puntos P, situados en la esfera, las distancias a M_0 y M_1 son proporcionales. Para esto, tomemos los triángulos OPM_0 y OPM_1 (véase la fig. 51); éstos son semejantes, puesto que el ángulo en O es común, y los lados adyacentes a éste son proporcionales:

$$\frac{\rho_0}{R}=\frac{R}{\rho_1}, \quad \text{o bien} \quad \frac{OM_0}{R}=\frac{R}{OM_1}.$$

De la semejanza de los triángulos se sigue que

$$\frac{r_0}{r_1}=\frac{\rho_0}{R}=\frac{R}{\rho_1}, \tag{7}$$

donde $r_0=|\overrightarrow{M_0P}|$, $r_1=|\overrightarrow{M_1P}|$. De la proporción (7) se obtiene:

$$r_0=\frac{\rho_0}{R}r_1$$

para todos los puntos de la esfera. Por esto, la función armónica $v=-\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}$ toma en la esfera el mismo valor que la función $\frac{1}{r_0}$. Esta representa, evidentemente, el potencial de una carga de magnitud $-\frac{R}{\rho_0}$, situada en el punto M_1.

De este modo, la función

$$G(P, M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_0}\right) \tag{8}$$

es, precisamente, la función de la fuente buscada para la esfera, puesto que es una función armónica que tiene en M_0 una particularidad $\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_0}$ y que se anula en la superficie de la esfera.

La solución del primer problema de contorno se da mediante la fórmula (4).

Calculemos la derivada

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right)-\frac{R}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right]. \tag{9}$$

donde n es la normal exterior, $r_1 = |\overrightarrow{M_1M}|$ (M puede no hallarse en la esfera).

Las derivadas de $\frac{1}{r_0}$ y $\frac{1}{r_1}$ con respecto a la dirección n son iguales a

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right) &= \frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{1}{r_0}\right)\frac{\partial r_0}{\partial n} = -\frac{1}{r_0^2}\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}}), \\ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right) &= \frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial r_1}{\partial n} = -\frac{1}{r_1^2}\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}}), \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

puesto que

$$\frac{\partial r_0}{\partial n} = \cos(\widehat{\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}}), \qquad \frac{\partial r_1}{\partial n} = \cos(\widehat{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}}). \tag{11}$$

No es difícil hallar las magnitudes $\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}})$ y $\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}})$:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}}) = \frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0}, \tag{11'}$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}}) = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1}. \tag{11''}$$

Utilizando la proporción (7), tendremos:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}})|_\Sigma = \frac{R^2 + \frac{R^2}{\rho_0^2} r_0^2 - \frac{R^4}{\rho_0^2}}{2R\frac{R}{\rho_0}r} = \frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2\rho_0 r_0},$$

puesto que $\rho_1 = \frac{R^2}{\rho_0}$, por definición del punto M_1, y $r_1 = \frac{R}{\rho_0} r_0$ en la esfera Σ. Aplicando las fórmulas (10), y también las expresiones (9), (11'), (11''), se halla:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_\Sigma = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{r_0^2}\frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0} + \frac{\rho_0^2}{R^2 r_0^2}\frac{R}{\rho_0}\frac{\rho_0^2 + r_0^2 - R^2}{2\rho_0 r_0}\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^2}.$$

De esto modo, la función $u(M_0)$, en correspondencia con la fórmula (4), es igual a

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi R}\iint_{\Sigma} f(P)\frac{R^2-\rho_0^2}{r_0^3}\,d\sigma_P, \tag{12}$$

Introduzcamos un sistema de coordenadas esféricas con origen en el centro de la esfera. Sean (R, θ, φ) las coordenadas del punto P, y $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$, los del punto M_0; γ, el ángulo entre los radios-vector $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OM_0}$. Entonces la fórmula (12) se puede escribir en la forma

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \varphi)\frac{R^2-\rho_0^2}{(R^2-2R\rho_0\cos\gamma+\rho_0^2)^{3/2}}\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi, \tag{12'}$$

donde

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_0+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)^{1)}. \tag{13}$$

Esta fórmula se llama *integral de Poisson para la esfera.*

Este mismo método se puede aplicar a la composición de la función de la fuente para la región exterior con respecto a la esfera.

$$G(M, M_1)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{R}{\rho_1}\frac{1}{r_0}\right), \tag{14}$$

donde $r_1 = MM_1$ es la distancia del punto fijo M_1, que se halla fuera de la esfera. $r_0 = MM_0$ es la distancia del punto M_0, conjugado con el M_1, ρ_1, la distancia de M_1 al origen de coordenadas, y R, el radio de la esfera.

Teniendo en cuenta la diferencia en los sentidos de las normales para los problemas interior y exterior, se obtiene:

$$u(\rho_1, \theta_1, \varphi_1)=$$

$$=\frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\rho_1^2-R^2}{[R^2-2\rho_1 R\cos\gamma+\rho_1^2]^{3/2}}f(\theta, \varphi)\operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

donde $\cos\gamma$ se da por la fórmula (13) (el subíndice 0 debe ser sustituído por el 1).

3. Función de la fuente para el círculo. La función de la fuente para el círculo se puede obtener por el mismo método que la fun-

[1] En efecto, los cosenos directores de los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OM_0}$ son iguales, respectivamente, a $(\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \cos\theta)$ y $(\operatorname{sen}\theta_0\cos\varphi_0, \operatorname{sen}\theta_0\operatorname{sen}\varphi_0, \cos\theta_0)$, de donde $\cos\gamma=\cos\theta\cdot\cos\theta_0+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_0(\cos\varphi\cos\varphi_0+\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi_0)=\cos\theta\cos\theta_0+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0)$.

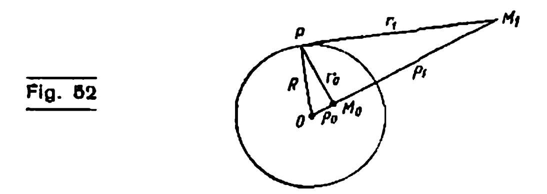


Fig. 52

ción para la esfera. En este caso, debe buscarse la función en la forma

$$G=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}+v. \qquad (15)$$

Repitiendo los razonamientos del punto anterior desde la fórmula (6) hasta la (8), se halla la función G en la forma

$$G(P,\ M_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_0}-\ln\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}\right], \qquad (16)$$

donde $\rho_0 = OM_0$, $r_0 = M_0P$, $r_1 = M_1P$, $R = OP$ es el radio del círculo (fig. 52). No es difícil comprobar que la función armónica determinada de este modo se anula en la frontera:

$$G\,|_C = 0.$$

Para la resolución del primer problema de contorno, hay que calcular los valores de $\frac{\partial G}{\partial n}$ en la circunferencia C. Los cálculos se efectúan análogamente al caso de la esfera, y dan:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_C=-\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{r_0^2}.$$

Sean $(\rho,\ \theta)$ las coordenadas polares del punto P, que se hallan en la circunferencia, y $(\rho_0,\ \theta\ )$ las coordenadas del punto M_0; entonces,

$$r_0^2 = R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos(\theta - \theta_0).$$

Sustituyendo esta expresión de r_0 en la fórmula

$$u(\rho_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C u(P)\frac{R^2-\rho_0^2}{r_0^2}\frac{ds}{R}$$

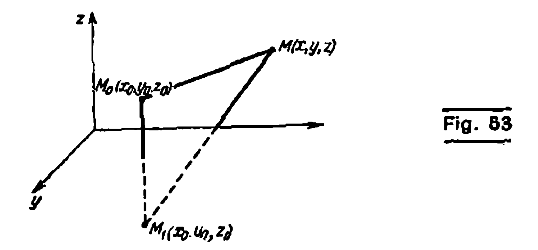


Fig. 53

y tomando en cuenta que

$$u(P)|_C = f(\theta) \text{ y } ds = R\,d\theta,$$

se llega a la expresión para la función $u(M_0)$

$$u(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho_0^2}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)} f(\theta)\,d\theta, \tag{17}$$

llamada *integral de Poisson para el círculo* (véase la pág. 352, fórmula (13)). Esta misma fórmula, salvo el signo, da la solución del problema exterior.

4. Función de la fuente para el semiespacio. El concepto de función de la fuente y la fórmula (4) tienen lugar también para el espacio no acotado, si se consideran funciones regulares en el infinito (véase el § 2, p. 6). Hallemos la función de la fuente para el semiespacio $z > 0$. Ubiquemos en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ una carga unitaria, que crea en el espacio no acotado un campo, cuyo potencial se determina por la función

$$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{M_0M}}, \quad \text{donde} \quad R_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

No es difícil apreciar que el «campo inducido» v es el campo de una carga unitaria negativa, ubicada en el punto $M_1(x_0, y_0, -z_0)$, que es la imagen especular del punto M_0 en el plano $z = 0$ (fig. 53). La función G, igual a

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_0} - \frac{1}{4\pi R_1},$$

donde

$$R_0 = |\overrightarrow{M_0M}| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

$$R_1 = |\overrightarrow{M_1M}| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2},$$

se anula para $z=0$ y tiene la singularidad necesaria en el punto M_0.

Calculemos $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0} = -\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}$. Es evidente que

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{1}{4\pi}\left[-\frac{z-z_0}{R_0^3}+\frac{z+z_0}{R_1^3}\right].$$

Haciendo $z=0$, se halla:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0} = -\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{z_0}{2\pi R_0^3}.$$

La solución del primer problema de contorno se da por la fórmula

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\Sigma_0}\frac{z_0}{R^3_{M_0P}}f(P)\,d\sigma_P,$$

donde Σ_0 es el plano $z=0$, $f(P) = u|_{z=0}$, o bien

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}f(x, y)\,dx\,dy. \tag{18}$$

§ 5. TEORIA DEL POTENCIAL

La función $\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$, que representa el potencial del campo de la masa (carga) unitaria, situada en el punto M_0 (ξ, η, ζ), es solución de la ecuación de Laplace, la cual depende de los parámetros ξ, η, ζ. Las integrales de esta función con respecto a los parámetros, se llaman *potenciales*, y tienen un significado esencial desde el punto de vista de las aplicaciones directas a la física, así como también desde el punto de vista del desarrollo de los métodos de resolución de los problemas de contorno.

1. Potencial de volumen. Supongamos que en cierto punto M_0 (ξ, η, ζ) se halla una masa m_0. Según la ley de la atracción universal, sobre una masa m, situada en el punto M (x, y, z), actúa la fuerza de atracción

$$\boldsymbol{F} = -\gamma \frac{mm_0}{R^2} \boldsymbol{r}, \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}$ es el vector unitario en la dirección $\overrightarrow{M_0M}$ ($\boldsymbol{R} = \overrightarrow{M_0M}$), y γ, la constante gravitacional. Escogiendo el sistema de coordenadas de forma que sea $\gamma = 1$ y haciendo $m = 1$, se obtiene:

$$\boldsymbol{F} = -\frac{m_0}{R^2} \boldsymbol{r}.$$

Las proyecciones de esta fuerza en los ejes coordenados serán:

$$\left.\begin{aligned} X &= F\cos\alpha = -\frac{m_0}{R^3}(x-\xi), \\ Y &= F\cos\beta = -\frac{m_0}{R^3}(y-\eta), \\ Z &= F\cos\gamma = -\frac{m_0}{R^3}(z-\zeta), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

donde α, β, y γ son los ángulos que forma el vector $\boldsymbol{F}$ con los ejes de coordenadas. Introduzcamos una función u, llamada *potencial del campo de fuerzas*[1]) y definida mediante la igualdad

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} u,$$

o bien

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

En nuestro caso, es

$$u = \frac{m_0}{R}.$$

El potencial del campo de n puntos materiales, en virtud de la superposición de los campos de fuerzas, se expresará por la fórmula

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{R_i}.$$

---

[1]) No debe confundirse el potencial con la energía potencial del campo de fuerzas. El término «potencial» se aplica aquí en el mismo sentido que *función de la fuerza* en la mecánica.

Pasemos al caso de la distribución continua de la masa. Sea dado un cuerpo T de densidad $\rho(\xi, \eta, \zeta)$. Determinemos el potencial de este cuerpo en el punto $M(x, y, z)$. Para esto, dividamos al cuerpo T en partes $\Delta\tau$ suficientemente pequeñas. Hagamos la hipótesis natural de que la acción del elemento $\Delta\tau$ es equivalente a la acción de su masa, concentrada en cierto punto «intermedio»[1]) del volumen $\Delta\tau$; entonces, para la componente de la fuerza que actúa en el punto M se obtiene la siguiente expresión:

$$\Delta X = -\frac{\rho\Delta\tau}{R^3}(x-\xi),$$

donde

$$R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

La integración por todo el volumen T da la componente de la fuerza total de atracción del punto M por el cuerpo T:

$$X = -\iiint\limits_T \rho\frac{x-\xi}{R^3}\,d\tau. \qquad (3)$$

El potencial en el punto M se determinará por la fórmula

$$u(M) = \iiint\limits_T \rho\frac{1}{R}\,d\tau. \qquad (4)$$

Si el punto M se halla fuera del cuerpo, esto puede demostrarse directamente derivando bajo el signo integral[2]). Análogamente se calculan también las derivadas de órdenes mayores. Es evidente que el potencial $u(M)$, fuera del cuerpo T, satisface a la ecuación de Laplace (para más detalles, véase la pág. 382). En lo sucesivo, sin tender a construir la teoría bajo las condiciones más generales, utilizaremos las propiedades de los potenciales indicadas más arriba, y formularemos varios teoremas bajo la condición de que ρ es una función acotada (sobreentendiendo su integrabilidad).

[1]) Más exactamente, aquí se supone que la acción de cierto cuerpo T de masa m sobre un punto que se halla fuera del volumen convexo $\overline{T}$ que contiene a este cuerpo, se puede sustituir por la acción de cierto centro efectivo de la misma masa m, que se encuentre dentro de $\overline{T}$.

[2]) Para poder derivar una integral definida del tipo

$$f(M) = \int\limits_T F(M, P)\,\varphi(P)\,d\tau_P$$

con respecto al parámetro bajo el signo integral, es suficiente la continuidad de la derivada de la función $F(M, P)$ con respecto al parámetro y la integrabilidad absoluta de la función $\varphi(P)$. Comúnmente este teorema se formula para $\varphi(P) \equiv 1$. La demostración de ésto para nuestro caso no se diferencia en nada de la habitual.

Si el punto M se halla dentro de la región T, no se puede afirmar que $X = \frac{\partial u}{\partial x}$ sin un análisis complementario, que será, precisamente, dado más abajo.

2. Problema en el plano. Potencial logarítmico. Consideremos la distribución de las masas en el espacio, que depende sólo de las dos coordenadas (x, y). En cualquier plano z = const. el potencial toma, evidentemente, un mismo valor; por esto, es suficiente investigar el potencial del punto (x, y), que se encuentra en el plano $z = 0$.

Determinemos el potencial de una recta homogénea infinita L. Dirijamos el eje z a lo largo de esta recta. Supongamos que la densidad lineal (es decir, la masa de la unidad de longitud) es igual a μ. La fuerza de atracción del elemento Δz con respecto al punto $P(x, 0)$ (fig. 54) y su componente sobre el eje x son iguales, respectivamente, a

$$\Delta F = -\frac{\mu \Delta z}{R^2} = -\frac{\mu \Delta z}{(x^2 + z^2)},$$

$$\Delta X = \Delta F \cos \alpha = -\mu \Delta z \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

De aquí que

$$X = -\int_{-\infty}^{\infty} \mu x \frac{dz}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\mu x^2 \frac{1}{x^3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha \, d\alpha = -\frac{2\mu}{x}$$

$$\left(\frac{z}{x} = \operatorname{tg} \alpha\right).$$

Si $P(x, y)$ es un punto arbitrario, la fuerza de atracción del punto por la línea L estará, evidentemente, dirigida a lo largo de $\overrightarrow{OP}$, y será igual en valor absoluto a

$$F = -\frac{2\mu}{\rho},$$

donde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

El potencial de esta fuerza se llama *potencial logarítmico*, y es igual a

$$V = 2\mu \ln \frac{1}{\rho}, \qquad (5)$$

cosa que se comprueba fácilmente por derivación directa.

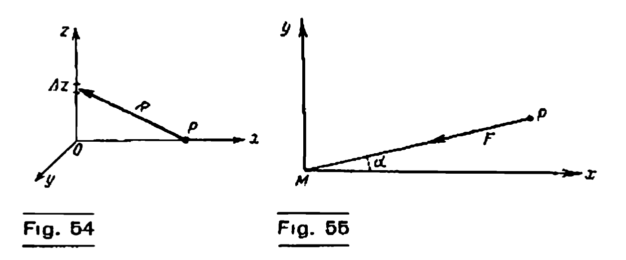


Fig. 54 Fig. 55

El potencial logarítmico es solución de la ecuación de Laplace con dos variables independientes, que posee simetría circular alrededor del polo en el punto $\rho = 0$, en el cual se hace infinito.

De esta manera, el potencial de una recta homogénea da un campo plano, y se expresa por la fórmula (5). La representación del potencial en forma de integral fue obtenida sólo para los volúmenes acotados[1]). Obsérvese que, a diferencia del potencial de volumen, el logarítmico no se anula en el infinito, sino que tiene allí una particularidad logarítmica.

Calculemos ahora las componentes de la fuerza de atracción del punto P (fig. 55):

$$X = F\cos\alpha = -2\mu\frac{x}{\rho^2} \qquad \left(\cos\alpha = \frac{x}{\rho}\right),$$

$$Y = F\operatorname{sen}\alpha = -2\mu\frac{y}{\rho^2} \qquad \left(\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{\rho}\right).$$

Si se tienen varios puntos (rectas infinitas de masa distribuida sobre ellas), en virtud del principio de superposición, los campos de fuerzas de los potenciales de los puntos (líneas) se sumarán.

---

[1]) Al calcular el potencial de una recta infinita, no fue posible integrar directamente los potenciales de elementos separados, puesto que en este caso se obtiene una integral divergente. En efecto, el potencial del elemento Δz es igual a

$$\Delta u = \mu\frac{\Delta z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

La integración formal nos da la integral divergente

$$u = \int_{-\infty}^{\infty}\mu\frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

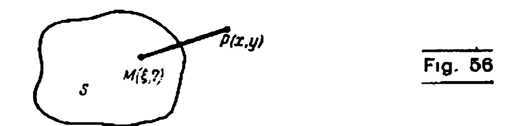


Fig. 56

En el caso de una región S de densidad μ (ξ, η) distribuida en forma continua[1]) (fig. 56), las componentes de la fuerza de atracción del punto P se expresarán por las integrales dobles:

$$\left.\begin{aligned} X &= -2\iint_S \mu(\xi,\eta)\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi\,d\eta,\\ Y &= -2\iint_S \mu(\xi,\eta)\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}\,d\xi\,d\eta,\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

y el potencial será igual a

$$u(x, y) = 2\iint_S \mu(\xi,\eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta, \qquad (7)$$

cosa que se comprueba fácilmente derivando, para los puntos que se encuentran fuera de S. Si, en cambio, el punto P está en la región S, es necesario efectuar un estudio complementario.

3. Integrales impropias. Los potenciales y las componentes de la fuerza de atracción se representan mediante integrales cuyos integrandos se vuelven infinitos, si consideramos sus valores en puntos que se hallan en la región que contiene a las masas que se atraen.

Como es sabido, si el integrando se vuelve infinito en cierto punto de la región de integración, la integral no se puede definir como el límite de una suma integral. En efecto, en este caso la suma integral no tiene límite, puesto que el sumando que corresponde al volumen elemental que contiene al punto singular puede variar en forma arbitrariamente grande la magnitud de la suma, según la elección del punto intermedio. Las integrales de tales funciones se definen como integrales impropias.

Sea dada una función F (x, y, z) en la región T, que se vuelve infinita en cierto punto M_0 (x_0, y_0, z_0). Consideremos la integral

[1]) Esto corresponde, en el espacio, a un cilindro de generatriz paralela al eje z y corte S en el plano (x, y), con densidad volumétrica μ (ξ, η), que no depende de ζ.

definida sobre la región $T - K_\varepsilon$, donde K_ε es cierto entorno del punto M_0, cuyo diámetro no supera a ε.

Si al tender las regiones K_{ε_n} al punto M_0 en forma arbitraria, la sucesión de integrales

$$I_n = \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\,d\tau \qquad (\varepsilon_n \to 0)$$

posee límite, que no depende de la elección de las regiones K_{ε_n}, entonces este límite se llama *integral impropia* de la función $F(x, y, z)$ en la región T, y se denota, como de ordinario, por

$$\iiint\limits_T F\,d\tau.$$

Si existe por lo menos una sucesión de regiones $\overline{K}_{\varepsilon_n}$ tal que para $\varepsilon_n \to 0$ existe el límite $\overline{I}$, y para otras sucesiones K_{ε_n} este límite tiene otros valores, o inclusive no existe, el límite $\overline{I}$ se llama integral impropia que converge en forma condicional. Está claro que, al considerar la integral impropia $\overline{I}$ que converge en forma condicional, hay que indicar la sucesión de regiones $\overline{K}_{\varepsilon_n}$ que se utiliza para definir dicha integral.

Aquí nos limitaremos al caso en que el integrando de la función tiene una particularidad en un punto aislado. Analicemos la convergencia de integrales del tipo

$$\iiint\limits_T \frac{C}{R^\alpha}\,d\tau_M, \tag{8}$$

donde C y $\alpha > 0$ son ciertas constantes,

$$R = R_{MM_0} = \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2},$$

M_0 es un punto de la región T. Sin limitar la generalidad, se puede considerar que T es una esfera de radio R con centro en el punto M_0. Tomemos, como región K_{ε_n}, una esfera de radio ε_n con centro en el punto M_0, y busquemos el límite de la sucesión de integrales

$$\iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} \frac{C}{R^\alpha}\,d\tau = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta \int_{\varepsilon_n}^{R} \frac{C}{r^{\alpha-2}}\,dr =$$

$$= 2\pi\cdot 2C\int_{\varepsilon_n}^{R}\frac{dr}{r^{\alpha-2}} = \begin{cases} 4\pi C\left[\dfrac{1}{3-\alpha}\,r^{3-\alpha}\right]_{\varepsilon_n}^{R}, & \text{si} \quad \alpha \neq 3, \\ 4\pi C\,[\ln r]_{\varepsilon_n}^{R} & \text{si} \quad \alpha = 3 \end{cases}$$

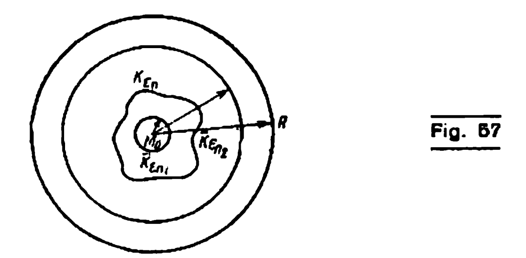


Fig. 57

El paso al límite, cuando ε_n tiende a cero, demuestra que para $\alpha < 3$ el límite existe; para $\alpha \geqslant 3$, en cambio, no existe.

Demostremos que, si la función $F(x, y, z)$ no es negativa y existe el límite de

$$I_n = \iiint\limits_{T-\overline{K}_{\varepsilon_n}} F\,d\tau \qquad (\varepsilon_n \to 0),$$

donde $\overline{K}_{\varepsilon_n}$ es una esfera de radio ε_n con centro en el punto M_0, entonces existe también el límite I de las integrales para cualquier elección de la sucesión de regiones K_{ε_n} que tiendan al punto M, y el valor de este límite no depende de la forma de la región K_{ε_n}. Cualquier región K_{ε_n} se puede encerrar entre dos esferas $\overline{K}_{\varepsilon_{n_1}}$ y $\overline{K}_{\varepsilon_{n_2}}$, cuyos radios, ε_{n_1} y ε_{n_2}, tienden a cero conjuntamente con ε_n (fig. 57). En virtud de que el integrando no es negativo, se tiene que

$$\iiint\limits_{T-\overline{K}_{\varepsilon_{n_1}}} F\,d\tau \geqslant \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\,d\tau \geqslant \iiint\limits_{T-\overline{K}_{\varepsilon_{n_2}}} F\,d\tau.$$

De aquí se aprecia que

$$\lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\,d\tau = \lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{T-\overline{K}_{\varepsilon_n}} F\,d\tau = I,$$

puesto que los límites de las integrales de los extremos existen y son iguales a este número.

De este modo, **en el caso de tres variables independientes, la integral impropia**

$$\iiint\limits_T \frac{C}{R^\alpha}\,d\tau \qquad (8)$$

existe, si $\alpha < 3$, y no existe, si $\alpha \geqslant 3$.

Para otro número de variables independientes, el valor crítico de α, que determina las fronteras de convergencia de las integrales del tipo (8), es igual a la dimensión del espacio; así, por ejemplo, **para dos variables independientes, la integral**

$$\iint_{\Sigma} \frac{C}{\rho^{\alpha}}\, d\sigma \quad \begin{matrix} \text{converge para } \alpha < 2, \\ \text{diverge para } \alpha \geq 2. \end{matrix}$$

Detengámosnos en un criterio de convergencia de las integrales impropias. Demostremos que

para la convergencia de la integral impropia

$$\iiint_T F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \tag{9}$$

es suficiente que exista una función $\overline{F}(x, y, z)$, para la cual converja la integral impropia en la región T, y que tenga lugar la desigualdad

$$|F(x, y, z)| < \overline{F}(x, y, z). \tag{10}$$

Tomemos cierta sucesión de regiones K_{ε}, que contengan al punto singular M_0. En virtud de la convergencia de la sucesión de integrales $\overline{I_n}$ de la función $\overline{F}$ para todo $\varepsilon > 0$, existe un $N(\varepsilon)$ tal que

$$|\bar{I}_{n_1} - \bar{I}_{n_2}| = \Big|\iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} \bar{F}\, d\tau\Big| < \varepsilon,$$

si $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$. Como $\overline{F}$ es mayorante de la función $F(x, y, z)$, se puede escribir:

$$|I_{n_1} - I_{n_2}| = \Big|\iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} F\, d\tau\Big| \leqslant \iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} |F|\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \iiint_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} \bar{F}\, d\tau < \varepsilon, \tag{10'}$$

si $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$. El cumplimiento de la condición (10'), en virtud del criterio de convergencia de Cauchy, es suficiente para la convergencia de la sucesión

$$I_n = \iiint_{T - K_{\varepsilon_n}} F\, d\tau$$

hacia cierto límite

$$I = \lim_{n \to \infty} I_n = \iiint_T F\, d\tau.$$

No es difícil establecer que este límite no dependerá de la forma de las regiones K_{ε_n}. Con esto queda demostrada la existencia de la integral impropia (9).

Si, en cambio, para cierta función $F(x, y, z)$ se puede indicar una función positiva $\overline{F}(x, y, z)$, tal que $F(x, y, z) > \overline{F}$, y la integral impropia de $\overline{F}$ en la región T diverge, la integral impropia (9) será, evidentemente, divergente.

Corolario: **si para cierta función $F(M, P)$, que se vuelve infinita para $P = M$, tiene lugar la desigualdad**

$$|F(M, P)| < \frac{C}{R_{MP}^{\alpha}}, \quad \begin{array}{l} \alpha = \text{const} < 3, \\ C = \text{const} < \infty, \end{array}$$

entonces la integral impropia en la región T, que contiene al punto M,

$$\iiint_T F(M, P)\, d\tau_P,$$

converge.

De la teoría de las integrales propias que dependen de parámetros, es sabido que la continuidad del integrando con respecto a los parámetros y a las variables indepeudientes es condición suficiente de continuidad de la propia integral como función de los parámetros[1]). Para las integrales impropias, la continuidad del integrando no tiene lugar, y por esto el criterio indicado no se puede aplicar. Establezcamos un criterio de continuidad de las integrales impropias que dependen de un parámetro.

Consideraremos las integrales impropias

$$V(M) = \int_T F(P, M) f(P)\, d\tau_P, \tag{11}$$

donde $F(P, M)$ es una función que se vuelve infinita cuando coinciden sus argumentos y continua con respecto a M, y $f(P)$, una función acotada.

La integral (11) se llama uniformemente convergente en el punto M_0, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon)$ tal que tiene lugar la desigualdad

$$|V_{\delta(\varepsilon)}(M)| = \left| \int_{T_{\delta(\varepsilon)}} F(P, M) f(P)\, d\tau_P \right| \leqslant \varepsilon$$

para cualquier punto M, cuya distancia a M_0 sea menor que $\delta(\varepsilon)$, y para cualquier región $T_{\delta(\varepsilon)}$ que contenga al punto M_0 y que tenga un diámetro $n \leqslant \delta(\varepsilon)$.

Demostremos que la integral

$$V(M) = \int_T F(P, M) f(P)\, d\tau_P,$$

---

[1]) Véase B. M. Budak, S. V. Fomín, *Integrales Múltiples y Series*, ed. «Naúka», 1965, pág. 442. (O también P. Puig Adam, *Cálculo Integral*, Madrid, 1961, pág. 113) *(N. de la Red)*

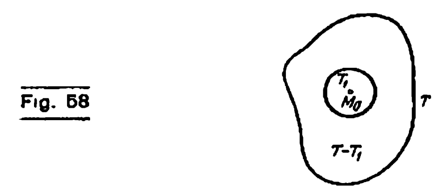


Fig. 58

que converge uniformemente en el punto M_0, es una función continua en este punto. Hay que demostrar que para todo ε existe un $\delta(\varepsilon)$ tal que

$$| V(M_0) - V(M) | < \varepsilon$$

para

$$| \overrightarrow{MM_0} | < \delta(\varepsilon).$$

Tomemos dentro de T cierta región T_1 que contenga al punto M_0 (fig. 58), y dividamos la integral en dos sumandos:

$$V = V_1 + V_2,$$

donde la integral V_1 se toma por la región T_1, y V_2, por la $T_2 = T - T_1$. Más adelante determinaremos con más exactitud las dimensiones de la región T_1. Consideremos la desigualdad

$$| V(M_0) - V(M) | \leqslant | V_2(M_0) - V_2(M) | + | V_1(M_0) | + | V_1(M) |$$

y demostremos que cada sumando de la derecha puede hacerse menor que $\frac{\varepsilon}{3}$ para $| \overrightarrow{M_0M} |$ suficientemente pequeño. Tomando la región T_1 dentro de la esfera de radio $\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, tendremos:

$$| V_1(M_0) | \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad | V_1(M) | \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

si

$$| \overrightarrow{M_0M} | \leqslant \delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

La existencia de este δ' se desprende de la condición de convergencia uniforme de la integral (11) en el punto M_0. La elección de la región T_1 determina la región T_2.

Como el punto M_0 se encuentra fuera de la región T_2, la integral V_2 es una función continua en este punto.

De aquí se sigue la existencia de un $\delta''\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ tal que

$$|V_2(M_0)-V_2(M)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$$

para

$$|\overrightarrow{M_0M}|<\delta''\left(\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Haciendo

$$\delta(\varepsilon)=\text{mín}\,[\delta'(\varepsilon),\ \delta''(\varepsilon)],$$

se obtiene:

$$|V(M)-V(M_0)|\leqslant\varepsilon \text{ para } |\overrightarrow{MM_0}|\leqslant\delta,$$

lo cual significa la continuidad de la integral que converge uniformemente.

Obsérvese que los resultados obtenidos son válidos no sólo para las integrales de volumen, sino también para las de superficie y de línea. Este hecho será utilizado en lo sucesivo.

Consideremos el potencial

$$V(M)=\iiint\limits_T\frac{\rho(P)}{R_{MP}}\,d\tau_P \tag{12}$$

y las componentes de la fuerza de atracción

$$\left.\begin{aligned}X(M)&=-\iiint\limits_T\frac{\rho(P)}{R^3_{MP}}(x-\xi)\,d\tau_P;\\ Y(M)&=-\iiint\limits_T\frac{\rho(P)}{R^3_{MP}}(y-\eta)\,d\tau_P;\\ Z(M)&=-\iiint\limits_T\frac{\rho(P)}{R^3_{MP}}(z-\zeta)\,d\tau_P\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

en los puntos que se hallan dentro del cuerpo que atrae T. Las integrales impropias (12) y (13) son convergentes si la densidad $\rho(M)$ está acotada, $|\rho(M)|<C$. Para el potencial $V(M)$ esto es evidente, puesto que

$$\frac{|\rho|}{R}<\frac{C}{R^\alpha}\qquad(\alpha=1<3).$$

Para las componentes de la fuerza de atracción, esto se deduce de la desigualdad

$$\frac{|\rho|}{R^2}\frac{|x-\xi|}{R}<\frac{C}{R^\alpha}\qquad (\alpha=2<3),$$

puesto que $|x-\xi|<R$.

Para ilustrar el concepto de convergencia uniforme de las integrales impropias, demostremos que las integrales (12) y (13) son funciones continuas.

Para esto, hay que demostrar que las integrales (12) y (13) convergen uniformemente en cualquier punto M_0.

Calculemos el módulo de la integral[1])

$$\left|\iiint_{T_\delta}\frac{\rho(P)}{R_{MP}}\,d\tau_P\right|\leqslant C\iiint_{K_\delta^{M_0}}\frac{d\tau_P}{R_{MP}},$$

donde $K_\delta^{M_0}$ es una esfera de radio δ con centro en el punto M_0, que contiene a la región T_δ. Sin embargo, el cálculo de esta integral por la región $K_\delta^{M_0}$ con centro en el punto M_0 es incómodo. Para calcular la última integral, tiene sentido pasar al sistema de coordenadas esféricas con centro en el punto M. Es evidente que

$$\left|C\iiint_{K_\delta^{M_0}}\frac{d\tau_P}{R_{MP}}\right|\leqslant C\left|\iiint_{K_{2\delta}^{M}}\frac{d\tau_P}{R_{MP}}\right|=C8\pi\delta^2,$$

donde $K_{2\delta}^{M}$ es una esfera de radio 2δ con centro en el punto M. Si se da cierto $\varepsilon>0$, entonces, escogiendo

$$\delta(\varepsilon)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi C}},$$

nos convencemos de la convergencia uniforme de la integral V.

Repitiendo un razonamiento análogo para la integral

$$X(M)=-\iiint_T\rho(P)\frac{x-\xi}{R_{MP}^3}\,d\tau_P,$$

[1]) Obsérvese que la integral (12) se obtiene de la (11) para $F(M,P)=\frac{1}{R_{MP}}$, $f(P)=\rho(P)$.

se obtiene:

$$\left|\iiint\limits_{T_\delta} \rho(P)\frac{x-\xi}{R_{MP}^3}\,d\tau_P\right| \leqslant C\left|\iiint\limits_{K_\delta^{M_0}} \frac{d\tau_P}{R_{MP}^2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\left|\iiint\limits_{K_{2\delta}^{M}} \frac{d\tau_P}{R_{MP}^2}\right| = 8\pi\delta C \leqslant \varepsilon,$$

si

$$\delta \leqslant \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{8\pi C}.$$

De esta forma, el potencial V y las componentes de la fuerza de atracción X, Y, Z son funciones continuas en todo el espacio[1]).

4. Derivadas primeras del potencial de volumen. Los integrandos de las funciones

$$X(M) = -\iiint\limits_T \rho(P)\frac{x-\xi}{R_{MP}^3}\,d\tau_P, \quad Y(M), \quad Z(M),$$

son las derivadas, por las variables correspondientes, de la función bajo el signo integral de

$$V(M) = \iiint\limits_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}}\,d\tau_P.$$

Si para la función V es lícita la derivación bajo el signo integral, entonces

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{14}$$

es decir, V es el potencial del campo cuyas componentes son iguales a X, Y, Z.

Si el punto M se encuentra fuera de la región T, la función

$$-\frac{x-\xi}{R_{MP}^3} = \frac{-(x-\xi)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R_{MP}}$$

es continua con respecto a ambos argumentos, $M(x, y, z)$ y

---

[1]) La convergencia uniforme de las integrales $V(M)$ y $X(M)$ fue demostrada bajo la hipótesis de que la densidad está acotada: $|\rho| \leq C$. En consecuencia, estas integrales son continuas aun en los puntos de discontinuidad de la función ρ, por ejemplo, en la frontera de una región llena de masas.

$P(\xi, \eta, \zeta)$. Por lo tanto, en este caso la derivación bajo el signo integral V es lícita.

Las derivadas de orden mayor también se pueden calcular derivando bajo el signo integral en todas partes fuera del cuerpo T. De aquí, en virtud del lema del capítulo III, § 2, se deduce que el potencial, fuera de las masas que se atraen, satisface a la ecuación de Laplace:

$$\Delta V = 0 \text{ fuera del cuerpo } T.$$

Demostremos que el cálculo de las derivadas del potencial V se puede efectuar derivando bajo el signo integral también en el caso en que M se halle dentro del cuerpo T.

En la demostración se utilizará sólo la acotación de la función $\rho(x, y, z)$ ($|\rho(x, y, z)| < C$), sin suponer su continuidad; de aquí se seguirá que la función $V(x, y, z)$ es derivable también en los puntos de la frontera, que se pueden considerar como puntos de discontinuidad de la función $\rho(x, y, z)$, la cual es igual a cero fuera del cuerpo.

Demostremos que para cualquier ε se puede hallar un $\delta(\varepsilon)$ tal que

$$\left|\frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} - X\right| < \varepsilon,$$

si

$$|\Delta x| < \delta(\varepsilon).$$

Encerremos a M_0 dentro de una esfera $K_\delta^{M_0}$ suficientemente pequeña, cuyas dimensiones precisaremos más adelante, y dividamos a V en dos sumandos:

$$V = V_1 + V_2,$$

donde V_1 y V_2 corresponden a la integración en el volumen $T_1 = K_\delta^{M_0}$ y en el volumen complementario $T_2 = T - K_\delta^{M_0}$. Entonces

$$\frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} = \frac{V_1(x+\Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x} + \\ + \frac{V_2(x+\Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Para cualquier dimensión determinada de la región T_1, se tiene:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{V_2(x+\Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x} = X_2 = \\ = \iiint_{T_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau,$$

puesto que el punto M_0 se halla fuera de la región T_2.

Haciendo $X = X_1 + X_2$, apreciemos a

$$\left|X - \frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|X_2 - \frac{V_2(x+\Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x}\right| + |X_1| +$$

$$+ \left|\frac{V_1(x+\Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x}\right|$$

y demostremos que cada sumando se puede hacer menor que $\frac{\varepsilon}{3}$. En efecto,

$$|X_1| = \left|\iiint\limits_{T_1} \rho \frac{x-\xi}{R^3} d\tau\right| < C \int\limits_0^{\delta'} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi\, dr}{r^2} = 4\pi C\delta' < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{15}$$

puesto que $\left|\frac{x-\xi}{R}\right| < 1$ y $|\rho| < C$. Consideremos el último sumando:

$$|S| = \left|\frac{V_1(x+\Delta x, y, z) - V_1(x, y, z)}{\Delta x}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\Delta x} \iiint\limits_{T_1} \rho\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}\right) d\tau\right| = \left|\frac{1}{\Delta x} \iiint\limits_{T_1} \rho \frac{R-R_1}{RR_1} d\tau\right|,$$

donde

$$R_1 = \sqrt{[(x+\Delta x) - \xi]^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2};$$

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

Los lados del triángulo M_0MM_1 son iguales a r, r_1 y $|\Delta x|$. De aquí se deduce que

$$|R - R_1| \leqslant |\Delta x|.$$

Por esto,

$$|S| \leqslant C \iiint\limits_{T_1} \frac{d\tau}{RR_1} \leqslant C \frac{1}{2} \left\{\iiint\limits_{T_1} \frac{d\tau}{R_1^2} + \iiint\limits_{T_1} \frac{d}{R^2}\right\}.$$

puesto que para números cualesquiera a y b tiene lugar

$$ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

Además,

$$\iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R^2} = 4\pi\delta'$$

y

$$\iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R_1^2} \leqslant \iiint_{K_{2\delta'}^{M_1}} \frac{d\tau}{R_1^2} = 8\pi\delta',$$

donde $K_{2\delta'}^{M_1}$ es una esfera de radio $2\delta'$ con centro en el punto M_1.

Si se escoge δ' de modo adecuado, se puede asegurar la desigualdad

$$|S| < \frac{C}{2} 12\pi\delta' = 6\pi C\delta' < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (16)$$

Escogiendo δ' de la condición (16), se satisfacen ambas desigualdades: la (15) y la (16). Fijemos la región $T_1 = K_{\delta'}^{M_0}$ y, con ello, también la región $T_2 = T - T_1$.

La igualdad (14), aplicada a la región escogida T_2, significa que para todo ε existe un δ'' tal que

$$\left| \frac{V_2(x+\Delta x, y, z) - V_2(x, y, z)}{\Delta x} - X_2 \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

siempre que $|\Delta x| < \delta''$. Escogiendo, por último, $\delta = \min[\delta', \delta'']$, se obtiene:

$$\left| \frac{V(x+\Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} - X \right| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad |\Delta x| < \delta.$$

Con esto, queda demostrado que existe la derivada $\frac{\partial V}{\partial x}$, la cual es igual a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X. \qquad (17)$$

Las fórmulas

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Y \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = Z$$

no exigen ninguna demostración especial.

De este modo, se ha demostrado que la derivación bajo el signo integral es lícita, y que las componentes del campo de fuerzas X, Y, Z son las componentes de grad V.

5. Derivadas segundas del potencial de volumen. La integral impropia

$$\iiint_T \rho(P)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)d\tau_P = -\iiint_T \rho\left(\frac{1}{R^3}-3\frac{(x-\xi)^2}{R^5}\right)d\tau \qquad (18)$$

no converge absolutamente para los puntos interiores P del cuerpo T. En este caso, la mayorante para el integrando tiene la forma

$$\frac{C}{R^\alpha} \quad \text{para} \quad \alpha = 3.$$

Establezcamos las fórmulas por las cuales se calculan, dentro de T, las derivadas segundas del potencial V bajo la hipótesis de que la densidad $\rho(x, y, z)$ posee derivada continua en un entorno de los puntos estudiados. En particular, el análisis efectuado más abajo no se aplica a los puntos de frontera, donde, por regla general, tiene lugar una discontinuidad de la densidad.

Representemos el potencial V en forma de suma de los dos términos

$$V = V_1 + V_2,$$

que corresponden a las regiones T_1 y T_2, donde $T_1 = K_\delta^{M_0}$ es una esfera de radio δ con centro en el punto considerado M_0, dentro del cual la función ρ es derivable.

La derivada segunda de V_2 se puede calcular derivando bajo el signo integral, puesto que el punto M_0 se encuentra fuera de la región T_2:

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right) = \iiint_{T_2} \rho(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right)d\tau.$$

La derivada primera de V_1 con respecto a x es igual a

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \iiint_{T_1} \rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)d\tau = -\iiint_{T_1} \rho\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right)d\tau, \qquad (19)$$

puesto que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Transformemos la integral (19) utilizando la fórmula de Ostrogradski:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\iiint_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau = -\iiint_{T_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho \frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right] d\tau =$$

$$= -\iint_{\Sigma_\delta^{M_0}} \frac{\rho}{R} \cos\alpha \, d\sigma + \iiint_{T_1} \frac{1}{R}\frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\tau,$$

donde $\Sigma_\delta^{M_0}$ es la superficie de la esfera, que delimita el volumen T_1, α, el ángulo entre la normal exterior a la superficie $\Sigma_\delta^{M_0}$ y el eje x. El primer sumando es una función derivable en el punto M_0, puesto que M_0 se encuentra fuera de $\Sigma_\delta^{M_0}$. El segundo sumando es también una función derivable en un entorno del punto M_0, puesto que la función ρ tiene derivada en T_1. De aquí se deduce que en el punto M_0 existe la derivada segunda de V_1. Pasemos a calcularla:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right) = -\iint_{\Sigma_\delta^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) \cos\alpha \, d\sigma + \iiint_{T_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\tau.$$

Para el segundo sumando, en el punto M_0, tiene lugar la siguiente acotación:

$$\left|\iiint_{T_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\tau\right| < C_1 \iiint_{T_1} \frac{d\tau}{R^2} = C_1 4\pi\delta, \tag{20}$$

si

$$\left|\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right| < C_1.$$

Aplicando el teorema del valor medio a la integral de superficie, se obtiene:

$$-\iint_{\Sigma_\delta^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) \cos\alpha \, d\sigma = -\iint_{\Sigma_\delta^{M_0}} \rho \frac{\cos^2\alpha}{R^2} d\sigma = -\rho^* \frac{4\pi}{3}.$$

Aquí ρ^* es el valor de la densidad en cierto punto de $\Sigma_\delta^{M_0}$,

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{x-\xi}{R^3} = -\frac{1}{R^2}\cos\alpha$$

y, además,

$$\iint_{\Sigma_\delta^{M_0}} \frac{\cos^2\alpha}{R^2} d\sigma = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma_\delta^{M_0}} \frac{1}{R^2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\, d\sigma = \frac{4}{3}\pi.$$

El paso al límite cuando $\delta \to 0$ nos da:

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \lim_{\delta\to 0} \left[- \iint_{\Sigma_\delta^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) \cos\alpha \, d\sigma \right] = -\frac{4\pi}{3}\rho(M_0). \qquad (21)$$

La igualdad

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}$$

es válida para todo δ y su primer miembro no depende de δ; por esto,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}\right) = -\frac{4\pi}{3}\rho(M) +$$

$$+ \lim_{\delta\to 0} \iiint_{T_2} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau. \qquad (22)$$

De la existencia de la derivada segunda $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, demostrada más arriba, se deduce la existencia del

$$\lim_{\delta\to 0} \iiint_{T_2} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau = \overline{\iiint_{T}} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau. \qquad (23)$$

La última integral se obtuvo por un método especial del paso al límite, cuando las regiones que tienden al punto M_0 son esferas[1], lo cual, precisamente, se indica mediante la raya sobre el integral en la fórmula (23). El cambio de la forma de estas regiones puede, en general, variar el valor del límite; la integral (23) debe considerarse como convergente en forma condicional. De este modo,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(M_0) = \overline{\iiint_{T}} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau - \frac{4\pi}{3}\rho(M_0). \qquad (24)$$

De aquí se ve que el cálculo de las derivadas segundas del potencial mediante la derivación formal bajo el signo integral nos conduciría a un resultado incorrecto.

Para las derivadas $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ y $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ se obtienen expresiones análogas. Sustituyendo los valores de las tres derivadas en la expresión

---

[1]) El límite (23) se llama comúnmente *valor principal* de la integral.

del operador de Laplace, se halla:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} =$$

$$= \iiint_T \rho \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right)\right] d\tau - 4\pi\rho(M_0) =$$

$$= -4\pi\rho(M_0), \quad (25)$$

puesto que $\frac{1}{R}$ es una función armónica[1]).

De este modo, el potencial de volumen satisface a la ecuación de Poisson

$$\Delta V = -4\pi\rho \text{ dentro del cuerpo}$$

y a la de Laplace

$$\Delta V = 0 \text{ fuera de él.}$$

La ecuación no homogénea

$$\Delta u = -f, \quad (25')$$

si la función f es derivable dentro de cierta región T, tiene la solución particular

$$u_0 = \frac{1}{4\pi} \iiint_T \frac{f\, d\tau}{R}.$$

De aquí se deduce, en particular, que la solución del problema de contorno para la ecuación no homogénea (25') se puede reducir a la resolución de un problema de contorno análogo para la ecuación de Laplace $\Delta v = 0$, si se representa la función buscada en forma de la suma $u = u_0 + v$.

6. Potenciales de superficie. Como demuestra la fórmula fundamental de Green (véase el § 2)

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_\Sigma \left[\frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right] d\sigma_P,$$

cualquier función armónica se puede representar mediante integrales que son potenciales de superficie.

---

[1]) La fórmula (25) fue establecida bajo la hipótesis de que la función ρ es derivable, lo cual es una condición suficiente, y puede ser sustituida por condiciones más débiles. Sin embargo, la condición de continuidad de la función $\rho(M)$ no es suficiente para que se cumpla la (25), puesto que existen ejemplos de funciones continuas $\rho(M)$, para las cuales el potencial de volumen no tiene derivadas segundas.



Fig. 59

Consideremos el campo que crean las masas distribuidas sobre una superficie[1]) y determinemos el potencial de este campo. Se llama densidad superficial $\mu(P)$ en el punto P de la superficie Σ, al límite del cociente de la masa que se halla en cierto elemento $d\sigma$ de la superficie Σ, que contiene al punto P, entre su superficie, cuando $d\sigma$ tiende al punto P. El potencial de estas masas se da por la integral de superficie

$$V(M)=\iint_{\Sigma}\frac{\mu(P)}{R_{MP}}\,d\sigma_P, \tag{26}$$

llamado *potencial de capa simple*.

Otro tipo de potencial de superficie es el potencial de doble capa, que definiremos ahora.

Tomemos un dipolo, formado por las dos masas $-m$ y $+m$, situadas en los puntos P_1 y P_2, a una distancia Δl (fig. 59). El producto $m\cdot\Delta l=N$ se llama *momento* del dipolo. El potencial del dipolo en cierto punto $M(x, y, z)$ es igual a

$$V=\frac{m}{r_2}-\frac{m}{r_1}=m\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)=N\frac{1}{\Delta l}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right),$$

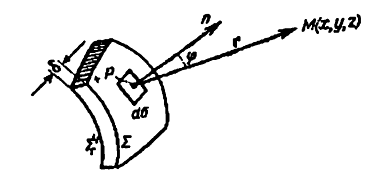
donde r_1 y r_2 son las distancias del punto M a los puntos P_1 y P_2.

Si Δl es pequeño en comparación con la distancia del punto M $\left(\frac{\Delta l}{r_1}\ll 1\right)$, entonces, aplicando el teorema del incremento finito, se puede escribir:

$$V=N\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{R}\right),\quad R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2},$$

[1]) Si las masas de densidad volumétrica ρ están distribuidas en cierta capa de espesor h alrededor de la superficie Σ y el campo se estudia a grandes distancias en comparación con h $\left(\frac{h}{R}\ll 1\right)$, no tiene sentido, en general, considerar el espesor de la superficie. Por esto, en lugar del potencial de volumen con densidad ρ, es mejor considerar el potencial de superficie con densidad superficial $\mu=\rho h$.





donde la derivada se toma por el sentido de la masa que repele a la que atrae y R es la distancia del punto M (x, y, z) a cierto punto intermedio P (ξ, η, ζ) del segmento Δl.

Calculemos la derivada por la dirección l:

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{1}{R^2}\cos(\boldsymbol{r}, l)=\frac{\cos\varphi}{R^2},$$

donde el vector $\boldsymbol{r}$ está dirigido del dipolo al punto fijo M, y φ es el ángulo entre el vector l y el r. De esta manera, el potencial del dipolo es igual a

$$V(M)=N\frac{\cos\varphi}{R^2}, \tag{27}$$

siendo N el momento del dipolo.

Supongamos que en dos superficies Σ y Σ' (fig. 60), que se hallan a una distancia pequeña δ la una de la otra, están distribuidas las masas de modo que la masa de cada elemento de la superficie Σ' es igual en valor absoluto y de signo contrario a la masa del elemento correspondiente de la superficie Σ. Designemos por n la normal común a las superficies Σ y Σ', dirigida de las masas repulsivas a las de atracción. Pasando al límite cuando $\delta \to 0$, se obtiene una doble capa, como el conjunto de dos capas simples con densidades mutuamente contrarias, que se hallan a una distancia pequeña entre sí. Si ν es la densidad superficial del momento, entonces el momento del elemento de superficie $d\sigma_P$ será igual a

$$dN = \nu\, d\sigma_P;$$

para el potencial del elemento $d\sigma$ en el punto M (x, y, z), tendremos:

$$\nu\frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)d\sigma_P=\nu(P)\frac{\cos\varphi_1}{R^2_{MP}}\,d\sigma_P,$$

donde $\varphi_1 = (\widehat{n\,\overrightarrow{PM}})$.

Llamemos *potencial de doble capa* a la integral

$$W(M) = -\iint_{\Sigma} \frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) \nu(P)\, d\sigma_P. \qquad (28)$$

Esta definición, evidentemente, corresponde al caso en que el lado exterior de la superficie repele, y el interior atrae.

Es evidente que

$$W = \iint_{\Sigma} \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} \nu(P)\, d\sigma_P,$$

donde φ es el ángulo entre la normal interior y la dirección del punto P hacia el punto fijo M. Si la superficie no es cerrada, debemos considerarla bilateral, puesto que el potencial de doble capa se define solamente para estas superficies.

Los potenciales de capas simple y doble tienen, en el caso de dos variables independientes, la forma

$$V = \int_C \mu(P) \ln \frac{1}{R_{MP}}\, ds, \qquad (29)$$

$$W = -\int_C \nu(P) \frac{d}{dn_P}\left(\ln \frac{1}{R_{MP}}\right) ds = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \nu(P)\, ds, \qquad (30)$$

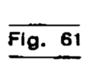
donde C es cierta curva, μ, la densidad lineal de la capa simple, ν, la densidad del momento de la doble capa lineal, φ, el ángulo entre la normal interior a la línea C y la dirección al punto fijo.

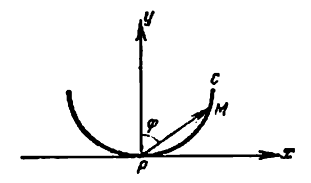
Si el punto de observación $M(x, y, z)$ se encuentra fuera de la superficie (fuera de las masas que atraen), los integrandos y sus derivadas con respecto a x, y, z de cualquier orden en las fórmulas

$$V(M) = \iint_{\Sigma} \mu(P) \frac{1}{R_{MP}}\, d\sigma_P,$$

$$W(M) = -\iint_{\Sigma} \nu(P) \frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\sigma_P$$

son continuos con respecto a las variables x, y, z. Por esto, en los puntos que se hallan fuera de la superficie Σ, las derivadas de los potenciales de superficie se pueden calcular derivando bajo el signo integral. De aquí se deduce, en virtud del principio de superposición, que los potenciales de superficie satisfacen





a la ecuación de Laplace en todas partes, fuera de las masas que atraen. Las funciones (29) y (30) satisfacen, evidentemente, a la ecuación de Laplace con dos variables independientes

Los potenciales de superficie en los puntos de la superficie Σ son integrales impropias. Demostremos que si la superficie posee curvatura continua, el potencial de doble capa existe en los puntos de esta superficie. Expondremos la demostración para el caso de dos variables independientes:

$$W = \int_C \frac{\cos\varphi}{R} \nu \, ds.$$

Consideremos una curva en el plano (x, y), y escojamos el origen de coordenadas en el punto P. Dirijamos el eje x por la tangente, y el y, por la normal en este punto (fig. 61). La ecuación de la curva en cierto entorno del punto P se escribirá en la forma

$$y = y(x).$$

La curva tiene, por hipótesis, curvatura continua, es decir, $y(x)$ tiene derivada segunda continua. Por esto,

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2} y''(\vartheta x) \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1),$$

de donde, en virtud de la elección de los ejes coordenados,

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 y''(\vartheta x).$$

Esto implica que

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^4 \left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2} = x \sqrt{1 + x^2 \left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2}$$

$$\cos\varphi = \frac{y}{R} = \frac{xy''(\vartheta x)}{2\sqrt{1 + x^2 \left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2}}$$

y

$$\frac{\cos\varphi}{R}=\frac{y''(\vartheta x)}{2\left\{1+x^2\left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2\right\}}.$$

De la expresión de la curvatura

$$K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}},$$

se deduce que

$$y''(0)=K(P).$$

Por esto,

$$\lim_{MP\to 0}\frac{\cos\varphi}{R}=\frac{1}{2}K(P),$$

lo cual demuestra la continuidad de $\frac{\cos\varphi}{R}$ a lo largo del arco y, con esto, la existencia del potencial de doble capa en los puntos de la curva C para una función ν acotada.

El potencial de doble capa en el caso de tres variables independientes también existe en los puntos de la superficie que tiene curvatura finita, puesto que la función

$$\frac{\cos\varphi}{R^2}$$

tiene una particularidad integrable de orden $\frac{1}{R}$. La existencia del potencial de capa simple no despierta ninguna duda.

7. Superficies y curvas de Liapunov. La hipótesis de que la curvatura es finita resulta superflua para la existencia de los potenciales de superficie.

Los potenciales de capas simple y doble son integrales impropias en los puntos de la superficie Σ. Demostremos que estas integrales convergen para una clase determinada de superficies, llamadas superficies de Liapunov, si la densidad del potencial está acotada, $|\nu(P)|<C$, donde C es cierta constante.

La superficie se llama *superficie de Liapunov*, si se cumplen las condiciones siguientes:

1. En cada punto de la superficie Σ existe una normal determinada (plano tangente).

2. Existe un número $d>0$ tal que las rectas paralelas a la normal en cierto punto P de la superficie Σ cortan no más de una vez la parte Σ'_P de la superficie Σ que se halla dentro de una esfera de radio d con centro en P. Estas parcelas de la superficie Σ_P se llaman entornos de Liapunov.

3. El ángulo $\gamma(P, P')=(\widehat{n_P, n_{P'}})$, formado por las normales en los puntos P y P', satisface a la siguiente condición:

$$\gamma(P, P') < Ar^{\delta}, \tag{31}$$

donde r es la distancia entre los puntos P y P'; A, cierta constante, y $0 < \delta \leqslant 1$.

Sea P_0 cierto punto de la superficie Σ. Tomemos un sistema rectangular de coordenadas, ubicando su origen en el punto P_0 y dirigiendo el eje z a lo largo de la normal exterior. El plano (x, y) coincide entonces con el plano tangente. En virtud de la condición 2, existe un ρ_0 tal que la ecuación de la superficie Σ se puede representar en la forma

$$z = f(x, y)^{1)} \tag{32}$$

para

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} < \rho_0. \tag{33}$$

Designemos por Σ'_{P_0} el entorno del punto P_0 en la superficie Σ, determinado por las condiciones (32) y (33). Establezcamos ciertas acotaciones para la función $f(x, y)$ y sus derivadas.

De la existencia de la normal en cada punto de la superficie (condición 1), se sigue la derivabilidad de la función $f(x, y)$. Los cosenos directores de la normal (exterior) se expresan mediante las fórmulas:

$$\cos\alpha=\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}; \quad \cos\beta=\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}; \quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

En virtud de la elección de nuestro sistema de coordenadas, será $z_x(P_0)=0$, $z_y(P_0)=0$. Consideraremos que la superficie Σ'_{P_0} es tan pequeña (ρ_0 es tan pequeño) que

$$1 \geqslant \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} > \frac{1}{2}. \tag{34}$$

Designemos mediante n'_P la proyección del vector n_P en el plano (x, y), y mediante α', β', los ángulos formados por el vector n'_P con los ejes x e y. Es evidente que

$$\cos\alpha=\operatorname{sen}\gamma\cos\alpha', \quad \cos\beta=\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\alpha'.$$

Como $\operatorname{sen}\gamma<\gamma$, entonces, en virtud de la condición 3,

$$\operatorname{sen}\gamma < Ar^{\delta}_{PP_0}$$

y, por consiguiente,

$$|\cos\alpha| < Ar^{\delta}_{PP_0}, \quad |\cos\beta| < Ar^{\delta}_{PP_0}, \tag{35}$$

y como $z_x=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $z_y=\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$, siendo además $\dfrac{1}{\cos\gamma}<2$, entonces

$$|z_x| < 2Ar^{\delta}_{PP_0}, \quad |z_y| < 2Ar^{\delta}_{PP_0}.$$

---

[1]) Obsérvese que si la función $f(x, y)$ tiene derivadas segundas continuas en un entorno del punto P_0, la superficie $z=f(x, y)$ satisface a las condiciones de Liapunov. De este modo, las superficies de curvatura continua son superficies de Liapunov.

Aplicando la fórmula de Taylor a la función $z = f(x, y)$ en un entorno del punto $P_0(0, 0)$, tendremos:

$$z(x, y) = z(0, 0) + xz_x(\bar{x}, \bar{y}) + yz_y(\bar{x}, \bar{y}),$$

donde

$$0 \leqslant \bar{x} \leqslant x,\quad 0 \leqslant \bar{y} \leqslant y,$$

de donde se deduce que

$$|z(x, y)| < 4Ar_{PP_0}^{1+\delta}. \qquad (36)$$

Las apreciaciones obtenidas (34), (36) nos permiten demostrar que, en los puntos de la superficie Σ, el potencial de doble capa

$$W(M) = \iint_{\Sigma} \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} \nu(P)\, d\sigma_P \qquad (28)$$

es una integral impropia convergente, si Σ es una superficie de Liapunov. Sea $M = P_0$ un punto de la superficie Σ. Escogiendo un sistema de coordenadas como lo hicimos más arriba, la ecuación de la superficie Σ, se representa en un entorno del punto P_0, en la forma

$$z = f(x, y).$$

La función $f(x, y)$ satisface a las condiciones (34) y (36). Calculemos $\cos\varphi$, donde φ es el ángulo entre la dirección de la normal interior en el punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ y la dirección de $\overrightarrow{PP_0}$. No es difícil apreciar que

$$|\cos\varphi| = \left|\frac{\xi}{R}\cos\alpha + \frac{\eta}{R}\cos\beta + \frac{\zeta}{R}\cos\gamma\right| \leqslant |\cos\alpha| + |\cos\beta| + \frac{|\zeta|}{R} \leqslant$$

$$\leqslant AR_{PP_0}^{\delta} + AR_{PP_0}^{\delta} + 4AR_{PP_0}^{\delta} = 6AR_{PP_0}^{\delta}$$

$$\left|\frac{\cos\varphi}{R^2}\right| \leqslant 6A\frac{1}{R^{2-\delta}}\ (0 < \delta \leqslant 1). \qquad (37)$$

Representemos a W en forma de suma de dos integrales:

$$W = W_1 + W_2,$$

donde W_1 es la integral por la superficie Σ'_{P_0}, que contiene al punto singular P_0, y la integral W_2 se toma en la parte restante de la superficie, $\Sigma - \Sigma'_{P_0}$. Como el integrando no se vuelve infinito en ningún punto del intervalo de W_2, para la convergencia de la integral W es suficiente convencerse de la convergencia de la integral W_1. Por cuanto

$$d\sigma = \frac{d\xi\, d\eta}{\cos\gamma} = \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\cos\gamma},$$

donde $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, θ son las coordenadas polares en el plano (x, y), la transformación de variables en esta integral nos da:

$$W_1 = \iint_{\Sigma'_{P_0}} \frac{\cos\varphi}{R_{PP_0}^2} \nu(P)\, d\sigma_P = \int_0^{\rho_0}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{R_{PP_0}^2} \nu(P) \frac{1}{\cos\gamma} \rho\, d\rho\, d\theta.$$

Para el integrando, en virtud de las acotaciones (34), (36) y (37), se tiene:

$$\left| \nu(P) \frac{\cos\varphi}{R^2} \frac{1}{\cos\gamma} \right| \leqslant \bar{F} = \frac{12AC}{\rho^{2-\delta}},$$

puesto que $\rho < R$.

Tal forma de la función mayorante $\bar{F}$ asegura la convergencia de la integral impropia en el caso de dos variables independientes (véase el p. 3).

No es difícil establecer que para una superficie de Liapunov el potencial de capa simple

$$V(M) = \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P, \tag{26}$$

también converge en los puntos de la superficie. Hay que hacer notar que esta convergencia tiene lugar también para superficies de clase más amplia.

En el caso de dos variables independientes, los potenciales de capas simple y doble convergen en los puntos de la curva (véanse las fórmulas (29) y (30)), si estos potenciales se toman para curvas de Liapunov, definidas por condiciones análogas a las 1—3 para las superficies de Liapunov.

8. Discontinuidad del potencial de doble capa. Demostremos que el potencial de doble capa es, en cierto punto P_0 de la superficie Σ, una función discontinua, para la cual tienen lugar las relaciones

$$\left.\begin{aligned} W_i(P_0) &= W(P_0) + 2\pi\nu(P_0), \\ W_e(P_0) &= W(P_0) - 2\pi\nu(P_0), \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

donde $W_i(P_0)$ es el valor límite del potencial de doble capa cuando nos aproximamos al punto P_0 desde el lado interior, y $W_e(P_0)$, el valor límite desde el lado exterior de la superficie[1]).

En el caso de dos variables independientes, las fórmulas respectivas son:

$$\left.\begin{aligned} W_i(P_0) &= W(P_0) + \pi\nu(P_0), \\ W_e(P_0) &= W(P_0) - \pi\nu(P_0). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

El potencial de doble capa para dos variables independientes se expresa mediante la integral

$$W(M) = \int\limits_{C} \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \nu(P)\, ds_P.$$

Tomemos cierto elemento de arco ds, cuyos extremos son los puntos P y P_1. Tracemos por el punto P un arco de circunferencia

---

[1]) Si Σ no es una superficie cerrada, el lado interior se puede definir convencionalmente especificando qué normal en el punto P_0 se llama «interior» y cuál «exterior».
Debe tenerse en cuenta que en el caso de superficies no cerradas el potencial de doble capa se define sólo para las superficies bilaterales.

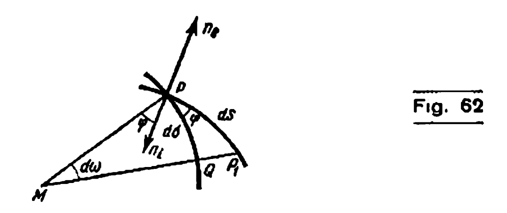


Fig. 62

de radio MP, con centro en el punto M, hasta que se corte con el segmento MP_1 en el punto Q. Entonces, con exactitud de infinitésimos de orden superior, se puede escribir (fig. 62):

$$ds\cos\varphi = d\sigma, \qquad \frac{d\sigma}{R} = d\omega, \tag{40}$$

donde $ds = \overset{\frown}{PP_1}$, $d\sigma = \overset{\frown}{PQ}$. $d\omega$ es el ángulo bajo el cual se ve el arco ds desde el punto M. El signo de $d\omega$ coincide con el signo de $\cos\varphi$, de forma que $d\omega > 0$, si φ (el ángulo entre la normal interior en el punto P y el vector $\overrightarrow{PM}$) es menor que $\frac{\pi}{2}$, y $d\omega < 0$, si $\varphi > \frac{\pi}{2}$. Si $d\omega > 0$, es decir, $\varphi < \frac{\pi}{2}$, desde el punto M se ve el lado «interior» de la curva C; si $d\omega < 0 \left(\varphi > \frac{\pi}{2}\right)$, desde el punto M se ve el lado «exterior» de la curva. De aquí se deduce que el ángulo de visualidad de cierto arco $\overset{\frown}{P_1P_2}$ es igual al ángulo P_1MP_2, que recorre el vector MP cuando el punto P recorre el arco P_1P_2.

Consideremos el potencial de doble capa W^0 en la superficie cerrada C de densidad constante $\nu = \nu_0 = \text{const}$. La semirrecta MP describe un ángulo

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi, & \text{si el punto } M \text{ se halla dentro de la curva } C, \\ \pi, & \text{si el punto } M \text{ se halla en la curva } C, \\ 0, & \text{si el punto } M \text{ se halla fuera de la curva } C, \end{cases}$$

cuando el punto P recorre toda la curva C. De aquí se obtiene, para el potencial W^0:

$$W^0 = \nu_0\Omega = \begin{cases} 2\pi\nu_0, & \text{si el punto } M \text{ se halla dentro de la curva } C, \\ \pi\nu_0, & \text{si el punto } M \text{ se halla en la curva } C, \\ 0, & \text{si el punto } M \text{ se halla fuera de la curva } C. \end{cases}$$

De esta manera, el potencial con densidad constante es una función constante a trozos, siendo

$$\left.\begin{aligned} W_i^0 &= W_c^0 + \pi\nu_0, \\ W_e^0 &= W_c^0 - \pi\nu_0, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

donde W_i^0, W_c^0, W_e^0 son los valores del potencial dentro de, en y fuera de la curva C.

Análogamente, en el caso de tres variables independientes tendremos:

$$\frac{d\sigma\cos\varphi}{R^2} = d\omega, \tag{42}$$

donde $d\omega$ es el ángulo sólido bajo el cual se ve el elemento $d\sigma$ de la superficie Σ. Sea $d\sigma'$ el elemento de superficie esférica que se obtiene cortando la esfera de radio MP con centro en el punto M, con un cono que tiene su vértice en M y por base, el elemento de superficie $d\sigma$. El elemento de superficie $d\sigma'$ será igual a $d\sigma' = d\sigma\cos\varphi$. De aquí se obtiene, precisamente, la fórmula (42). La observación hecha más arriba con respecto al signo $d\omega$, sigue en pie, lo cual nos conduce a las fórmulas

$$W^0 = \nu_0\Omega =$$

$$= \begin{cases} 4\pi\nu_0, \text{ si el punto } M \text{ se halla dentro de la superficie } \Sigma, \\ 2\pi\nu_0, \text{ si el punto } M \text{ se halla en la superficie } \Sigma, \\ \quad 0, \text{ si el punto } M \text{ se halla fuera de la superficie } \Sigma, \end{cases}$$

las cuales caracterizan a la función W^0 como constante a trozos, así como también a las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} W_i^0 &= W_\Sigma^0 + 2\pi\nu_0, \\ W_e^0 &= W_\Sigma^0 - 2\pi\nu_0, \end{aligned}\right\} \tag{41'}$$

donde W_i^0, W_e^0 son los valores del potencial W^0 dentro y fuera de la superficie Σ, y W_Σ^0, el valor de W^0 en Σ.

Consideremos ahora el potencial de doble capa con densidad variable y demostremos que en los puntos de continuidad de ésta tienen lugar fórmulas análogas a las (41) y (41').

Sea P_0 un punto de la superficie Σ, en el cual la función $\nu(P)$ es continua. Introduzcamos el potencial de doble capa W^0 con la densidad constante $\nu_0 = \nu(P_0)$ y consideremos la función

$$I(M) = W(M) - W^0(M) = \iint_\Sigma [\nu(P) - \nu_0] \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2}\, d\sigma_P.$$

Demostremos que la función I es continua en el punto P_0. Para esto, es suficiente demostrar la convergencia uniforme de la

integral $I(M)$ en el punto P_0. Fijemos un número $\varepsilon > 0$. De la continuidad de la función $\nu(P)$ en el punto P_0 se deduce que para cualquier número $\eta > 0$ dado de antemano existe un entorno Σ_1 del punto P_0, en la superficie Σ, tal que

$$|\nu(P) - \nu(P_0)| < \eta,$$

si $P \in \Sigma_1$. Representemos la integral I en forma de la suma

$$I = I_1 + I_2,$$

donde la integral I_1 se toma por la superficie Σ_1, e I_2, por la $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$. De la definición de Σ_1, se deduce que

$$|I_1| < \eta B_\Sigma,$$

donde B_Σ es una constante que se determina por la condición

$$\iint_\Sigma \frac{|\cos\varphi|}{R^2_{MP}} d\sigma_P \leqslant B_\Sigma \tag{43}$$

para todas las posiciones posibles del punto M, que no depende de la elección de la superficie Σ_1. Más detalles sobre esta constante daremos más abajo.

Escogiendo $\eta = \frac{\varepsilon}{B_\Sigma}$, se comprueba que para cada $\varepsilon > 0$ existe un Σ_1, que contiene a P_0, tal que

$$|I_1(M)| < \varepsilon$$

para cualquier posición del punto M. De aquí se deduce la convergencia uniforme de la integral $I(M)$ en el punto P_0, así como también su continuidad en este punto.

Si $W_i(P_0)$ y $W_e(P_0)$ son los límites del potencial $W(M)$ cuando $M \to P_0$ desde los lados interior y exterior de la superficie Σ, entonces

$$W_i(P_0) = W_i^0(P_0) + I(P_0) = W^0(P_0) + I(P_0) + 2\pi\nu_0 = \\ = W(P_0) + 2\pi\nu(P_0)$$

y análogamente

$$W_e(P_0) = W(P_0) - 2\pi\nu(P_0).$$

Queda así establecida la justeza de la fórmula (38).

La demostración que acabamos de efectuar es válida para las superficies que satisfacen a la condición de acotación (43). Para una superficie convexa, a la cual cada rayo del punto M corta no más de dos veces, es $B_\Sigma \leqslant 8\pi$; para las superficies formadas por un número finito de partes convexas, B_Σ es también acotado. De este modo, nuestra demostración tiene lugar para una clase muy amplia de superficies.

Todos los razonamientos expuestos más arriba conservan su validez también para las funciones de dos variables independientes. En este caso, las fórmulas (41) toman la forma

$$W_i(P_0) = W(P_0) + \pi\nu(P_0),$$
$$W_e(P_0) = W(P_0) - \pi\nu(P_0).$$

9. Propiedades del potencial de capa simple. A diferencia del potencial de doble capa, el de capa simple

$$V(M) = \iint_{\Sigma} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P \tag{26}$$

es continuo en los puntos de la superficie Σ. Demostremos esto para el caso de una superficie suave Σ. Para esto, es suficiente demostrar la convergencia uniforme de la integral $V(M)$ en los puntos de la superficie Σ.

Efectivamente, sea P_0 un punto de la superficie Σ. Representemos el potencial V en forma de la suma

$$V = \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P + \iint_{\Sigma_2} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P = V_1 + V_2,$$

donde Σ_1 es una parte suficientemente pequeña de la superficie Σ, que se encuentra en una esfera de radio δ con centro en el punto P_0. La magnitud δ será determinada con más exactitud más abajo.

Consideremos un sistema de coordenadas con origen en el punto P_0, cuyo eje z está dirigido según la normal exterior en P_0. Sea $M(x, y, z)$ un punto arbitrario, que se halla a una distancia $MP_0 < \delta$ del punto P_0 $(0, 0, 0)$. Designemos mediante Σ_1' la proyección de Σ_1 sobre el plano (x, y), y mediante $K_{2\delta}^{M'}$, un círculo de radio 2δ con centro en el punto M' $(x, y, 0)$, que contenga enteramente a la región Σ_1'. Suponiendo que la función

$$|\mu(P)| < A$$

está acotada y teniendo en cuenta que

$$d\sigma = \frac{d\sigma'}{\cos\gamma} = \frac{d\xi\, d\eta}{\cos\gamma}$$

y

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \geqslant \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = \rho,$$

se obtiene:

$$|V_1(M)| < A \iint_{\Sigma_1} \frac{d\sigma}{R_{MP}} = A \iint_{\Sigma_1'} \frac{d\sigma'/\cos\gamma}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2A \iint_{\Sigma_1'} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \leqslant 2A \iint_{K'^{M}_{2\delta}} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}},$$

si δ es lo suficientemente pequeño como para que $\cos\gamma > \frac{1}{2}$.

Introduzcamos un sistema de coordenadas polares (ρ, φ) en el plano (x, y) con origen en el punto M'. Entonces, se puede escribir

$$|V_1(M)| < 2A \iint_{K^{M'}_{2\delta}} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = 2A \int_0^{2\delta}\int_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{\rho} = 8A\pi\delta.$$

Tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{8\pi A}$, tendremos:

$$|V_1(M)| < \varepsilon,$$

si $MP_0 < \delta$. Por lo tanto, $V(M)$ converge uniformemente en todo punto $P_0 \in \Sigma$ y es una función continua en dicho punto.

Estudiemos ahora el comportamiento de las derivadas normales del potencial de una capa simple en la superficie. Demostremos que éstas tienen en Σ una discontinuidad del mismo tipo que el potencial de capa doble.

Las derivadas normales exterior e interior de la función V, $\frac{dV}{dn_e}$ y $\frac{dV}{dn_i}$ se definen del siguiente modo. Sea P_0 cierto punto de Σ. Tracemos por el punto P_0 el eje z, que se puede dirigir a lo largo de la normal exterior, o bien de la interior.

Consideremos la derivada $\frac{dV}{dz}$ en cierto punto M del eje z. Designemos por $\left(\frac{dV}{dz}\right)_i$ y $\left(\frac{dV}{dz}\right)_e$ a los límites de la derivada $\frac{dV}{dz}$ cuando el punto M tiende al punto P_0 por los lados interior o exterior de la superficie Σ. Si el eje z está dirigido por la normal exterior (interior), estos valores se llaman valores límite interior y exterior de la derivada por la normal exterior (interior) en el punto P_0[1]).

[1]) El límite de la razón de diferencias $\frac{V(M-V(P_0)}{MP_0}$ cuando $M \to P_0$, es igual al límite desde el exterior para la derivada según la normal exterior, o al límite desde el interior para la derivada según la normal interior, en dependencia de qué lado se aproxime el punto M al P_0.

Fig. 63



Analicemos las discontinuidades de la derivada normal interior del potencial de capa simple en Σ. La derivada $\frac{dV}{dz}$ en el punto M del eje z, dirigida por la normal interior, es igual a

$$\frac{dV}{dz}(M)=\iint_{\Sigma}\mu(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)d\sigma_P=\iint_{\Sigma}\frac{\cos\psi}{R^2_{MP}}\mu(P)\,d\sigma_P, \qquad (44)$$

donde ψ es el ángulo entre el eje z y el vector $\overrightarrow{MP}$. Tracemos por el punto P (fig. 63) la normal PQ y la recta PN, paralela al eje z (que es la normal en el punto P_0), y designemos mediante θ el ángulo NPQ, igual al ángulo entre las normales en los puntos P y P_0[1]). La expresión para el potencial de doble capa $W(M)$ contiene al factor $\frac{\cos\varphi}{R^2}$, donde $\varphi=\angle MPQ$. Como el ángulo MPN es igual a $\pi-\psi$, entonces

$$\cos(\pi-\psi)=\cos\varphi\cos\theta+\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\Omega=-\cos\psi,$$

donde Ω es el ángulo diedro de arista PQ[2]). De aquí se deduce que

$$\frac{\partial V}{\partial z}(M)=-\iint_{\Sigma}(\mu\cos\theta)\frac{\cos\varphi}{R^2}d\sigma-\iint_{\Sigma}\mu\operatorname{sen}\theta\cos\Omega\frac{\operatorname{sen}\varphi}{R^2}d\sigma=$$

$$=-W_1-I(M), \qquad (45)$$

[1]) Es evidente que θ y sen θ tienden a cero cuando $P\to P_0$. Si la superficie posee curvatura finita en un entorno del punto P_0, es decir, su ecuación se puede representar en la forma

$$z=f(x,\ y),$$

donde $f(x,\ y)$ tiene derivadas segundas, entonces sen θ será una función derivable de x, y y, en consecuencia,

$$\operatorname{sen}\theta<Ar$$

(para las superficies de Liapunov es sen $\theta<Ar^{\delta}$).

[2]) Si la dirección de PQ se toma como eje de un nuevo sistema de coordenadas esféricas, esta fórmula coincide con la (13) de la pág. 365.

donde $W_1(M)$ es el potencial de doble capa con densidad $\mu_1 = \mu \cos\theta$, que tiene discontinuidad en la superficie Σ. Es evidente que la integral $I(M)$ es una función continua en el punto P_0, puesto que $I(M)$ converge uniformemente en este punto (véase la nota al pie de la pág. 402).

Volviendo a la fórmula (45), se observa que

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_i &= -W_1(P_0) - 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0), \\ \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_e &= -W_1(P_0) + 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0). \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Designemos con

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = -W_1(P_0) - I(P_0) =$$

$$= \left[-\iint_\Sigma (\mu\cos\theta)\frac{\cos\varphi}{R^2}\,d\sigma - \iint_\Sigma \mu\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\Omega\frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{R^2}\,d\sigma\right]_{M=P_0} =$$

$$= \iint_\Sigma \mu\frac{\cos\psi_0}{R^2_{P_0P}}\,d\sigma,$$

donde ψ_0 es el ángulo entre el eje z y el vector $\overrightarrow{P_0P}$.

Tomando en cuenta que $\mu_1(P_0) = \mu(P_0)$, se halla:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_i &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_0 - 2\pi\mu(P_0), \\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_e &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_0 + 2\pi\mu(P_0), \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

puesto que, por hipótesis, el eje z está dirigido por la normal interior. Si se dirige el eje z por la normal exterior, el signo de $\cos\psi$ cambia, y se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_i &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_0 + 2\pi\mu(P_0), \\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_e &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_e}\right)_0 - 2\pi\mu(P_0). \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Para el caso de dos variables, tienen lugar fórmulas análogas, cambiando 2π por π.

10. Aplicación de los potenciales de superficie a la resolución de los problemas de contorno. El método de separación de las variables y el de la función de la fuente permiten obtener la expresión explícita de la solución de los problemas de contorno sólo en el caso de regiones de forma sencilla. La reducción de los problemas de contorno para la ecuación de Laplace (o de Poisson), mediante los potenciales de superficie, a las ecuaciones integrales, es, por un lado, cómodo para el estudio teórico del problema sobre la existencia y la unicidad de la solución de los problemas de contorno, y por otro, da la posibilidad de la resolución numérica efectiva de los problemas de contorno para las regiones de forma compleja. Consideremos los problemas de contorno interiores para cierto contorno C:

hallar la función u, armónica en la región T, limitada por el contorno C, y que satisfaga en C a las condiciones de frontera

$$u|_C = f \text{ —primer problema de contorno,}$$

o bien

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = f \text{ — segundo problema de contorno.}$$

Análogamente se plantean los problemas exteriores de contorno[1].

Buscaremos la solución del primer problema interior de contorno en forma del potencial de doble capa

$$W(M) = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \nu(P)\, ds_P = -\int_C \frac{d}{dn_P}\left(\ln\frac{1}{R_{MP}}\right) \nu(P)\, ds_P.$$

Bajo cualquier elección de $\nu(P)$, la función $W(M)$ satisface a la ecuación de Laplace dentro de C. La función $W(M)$ es discontinua en el contorno C. Para cumplir la condición de frontera, evidentemente, debe ser

$$W_i(P_0) = f(P_0).$$

Tomando en cuenta la fórmula (39), se obtiene la ecuación para hallar la función $\nu(P)$:

$$\pi\nu(P_0) + \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{P_0P}} \nu(P)\, ds_P = f(P_0). \tag{49}$$

---

[1]) Al plantear el segundo problema de contorno, tanto exterior como interior, en la condición de frontera la normal se considerará interior.

Si se designa por s_0 y s los arcos del contorno C que corresponden a los puntos P_0 y P, la ecuación (49) se puede escribir en la forma

$$\pi\nu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\,ds = f(s_0), \qquad (50)$$

donde L es la longitud del contorno C y

$$K(s_0, s) = -\frac{d}{dn_P}\left(\ln\frac{1}{R_{PP_0}}\right) = \frac{\cos\varphi}{R_{PP_0}} \qquad (51)$$

es el núcleo de esta ecuación integral, que es una ecuación integral de Fredholm de segunda especie[1]). Para el problema exterior se obtiene una ecuación análoga:

$$-\pi\nu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\,ds = f(s_0). \qquad (52)$$

Para el segundo problema de contorno, se obtienen las ecuaciones

$$-\pi\mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s)\,\mu(s)\,ds = f(s_0) \quad \text{(problema interior)}, \qquad (53)$$

$$\pi\mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s)\,\mu(s)\,ds = f(s_0) \quad \text{(problema exterior)}, \qquad (54)$$

donde

$$K_1(s_0, s) = \frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\left(\ln\frac{1}{R_{PP_0}}\right) = \frac{\cos\psi_0}{R_{PP_0}}\,{}^{2)}, \qquad (55)$$

si se busca su solución en forma del potencial de capa simple

$$u(M) = \int_C \ln\frac{1}{R_{MP}}\,\mu(P)\,ds_P.$$

[1]) Se llaman ecuaciones de Fredholm a las ecuaciones integrales que contienen integrales con límites constantes:

$$\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x) \quad \text{(ecuación de primera especie)},$$

$$\varphi(x) + \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x) \quad \text{(ecuación de segunda especie)}.$$

[2]) No es difícil ver que $K(s_0, s) = K_1(s, s_0)$. Tales núcleos se llaman *conjugados*, y las ecuaciones correspondientes, ecuaciones integrales conjugadas.

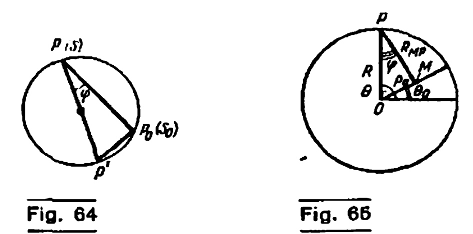


Fig. 64 Fig. 65

Los problemas relacionados con la existencia de solución de estas ecuaciones serán considerados en el p. 11 del presente parágrafo.

Consideremos los problemas de contorno para ciertas regiones simples, para las cuales las ecuaciones integrales correspondientes se resuelven fácilmente.

1. Primer problema de contorno para el círculo. Si el contorno C es una circunferencia de radio R, la normal interior en el punto P está dirigida por el diámetro y

$$\frac{\cos \varphi}{R_{PP_0}} = \frac{1}{2R},$$

puesto que φ es el ángulo P_0PP' (fig. 64). La ecuación integral para la función ν toma la forma

$$\nu(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \frac{1}{2R} \nu(s)\, ds = \frac{1}{\pi} f(s_0). \tag{56}$$

No es difícil observar que su solución es la función

$$\nu(s) = \frac{1}{\pi} f(s) + A, \tag{57}$$

donde A es cierta constante que debemos determinar. Sustituyendo esta forma de la solución en la ecuación (56), se tiene:

$$\frac{1}{\pi} f(s_0) + A + \frac{1}{\pi} \int_C \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{\pi} f(s) + A \right) ds = \frac{1}{\pi} f(s_0),$$

de donde se halla para la constante A la expresión mediante la función dada:

$$A = -\frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s)\, ds.$$

De este modo,

$$\nu(s) = \frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s)\, ds \tag{58}$$

es la solución de la ecuación integral (56).

El potencial correspondiente de doble capa es igual a

$$W(M) = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \nu(P)\, ds_P = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \left[\frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s)\, ds\right] ds.$$

Transformemos el segundo miembro de la fórmula anterior, suponiendo que M se halla dentro de C:

$$W = \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} f(s)\, ds - \left(\frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s)\, ds\right) \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} ds =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} f(s)\, ds - \left(\frac{1}{4\pi^2 R} \int_C f(s)\, ds\right) \cdot 2\pi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_C \left(\frac{\cos\varphi}{R_{MP}} - \frac{1}{2R}\right) f(s)\, ds. \tag{59}$$

Del triángulo $\Delta\, OPM$ (fig. 65) se ve que

$$K = \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} - \frac{1}{2R} = \frac{2R\cos\varphi - R_{MP}}{2RR_{MP}} = \frac{2RR_{MP}\cos\varphi - R_{MP}^2}{2RR_{MP}^2} =$$

$$= \frac{R^2 - \rho_0^2}{2R\,[R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)]}, \tag{60}$$

puesto que

$$\rho_0^2 = R^2 + R_{MP}^2 - 2RR_{MP}\cos\varphi.$$

Sustituyendo la expresión (60) para K en la fórmula (59), se obtiene la integral de Poisson

$$u = W(\rho_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2)\, f(\theta)\, d\theta}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)}, \tag{61}$$

que da la solución del primer problema de contorno para el círculo.

Los razonamientos expuestos en este punto demuestran que, para cualquier función continua f, la fórmula (61) determina una función armónica, que tiende en forma continua a sus valores de frontera f.

Si la función f es continua a trozos, entonces, en virtud de la propiedad del potencial de doble capa, la función W es también continua en todos los puntos de continuidad de f. De la acotación de la función f,

$$|f| < C,$$

se deduce la acotación de la función (61):

$$|W(\rho_0, \theta_0)| < C \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - \rho_0^2)}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)} d\theta = C,$$

puesto que[1])

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)} d\theta = 1. \tag{62}$$

2. **Primer problema de contorno para el semiespacio:** hallar una función armónica continua en toda la región $z \geqslant 0$, que tome en la frontera $z = 0$ el valor dado $f(x, y)$.

Buscaremos la solución de este problema en forma del potencial de doble capa

$$W(x, y, z) = \int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\varphi}{R^2} \nu(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \quad R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2.$$

En este caso, es

$$\frac{\cos\varphi}{R^2} = \frac{z}{R^3} = \frac{z}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}}$$

y el núcleo de la ecuación integral es

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{\cos\varphi}{R^2}\right)_{z=0} = 0.$$

De este modo, la densidad del potencial de doble capa es

$$\nu(P) = \frac{1}{2\pi} f(P)$$

y la función buscada es igual a

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}} f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

---

[1]) La igualdad (62) se deduce de que el primer miembro es la solución del primer problema de contorno para $f = 1$.

No es difícil demostrar que $u(x, y, z)$ tiende uniformemente a cero cuando $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty$, si la función f posee esta propiedad.

11. Ecuaciones integrales correspondientes a los problemas de contorno. Al resolver los problemas de contorno para la ecuación de Laplace mediante los potenciales de capas simple y doble, obtuvimos las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie (50).

Las condiciones de resolución de las ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie con núcleo continuo y segundo miembro acotado (integrable), son semejantes a las condiciones de resolución de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales (a las cuales se reducen las primeras, si se sustituye la integral por una suma integral). El primer teorema de Fredholm consiste en lo siguiente:

una ecuación integral no homogénea de segunda especie tiene solución, y además única, si la ecuación homogénea correspondiente tiene sólo la solución nula[1]).

---

[1]) Para las curvas de curvatura acotada, la teoría de Fredholm se aplica directamente, puesto que el núcleo de la ecuación integral (50) es continuo.
La teoría de Fredholm se aplica también en el caso en que es continuo uno de los *núcleos iterados*

$$K^{(n+1)}(P_1, P_2) = \iint_{\Sigma} K^{(1)}(P_1, M)\, K^{(n)}(M, P_2)\, d\sigma_M,$$

$$K^{(1)}(P, M) = K(P, M).$$

Demostremos que, si Σ es una superficie de Liapunov, los núcleos iterados de nuestra ecuación, a partir de cierto número, son continuos. Como vimos, para las superficies de Liapunov se tiene que

$$\left|\frac{\cos\varphi}{r^2}\right| < \frac{C}{r^{2-\delta}}.$$

Los núcleos iterados se pueden representar en la forma

$$K_{1,2}(P_1, P_2) = \iint_{\Sigma} K_1(P_1, M)\, K_2(M, P_2)\, d\sigma_M.$$

Demostremos que si

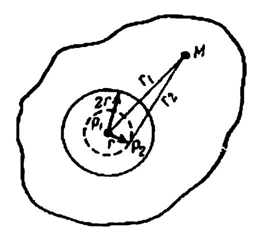
$$|K_i| < \frac{C_i}{r_i^{2-\alpha_i}} \quad (r_i = P_iM;\quad \alpha_i > 0;\quad i = 1, 2),$$

entonces

$$|K_{1,2}| < \frac{C}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}, \quad \text{si} \quad \alpha_1 + \alpha_2 < 2, \quad r = P_1P_2.$$

Evidentemente, es suficiente establecer esta acotación para el caso en que el punto P_2 se halle en un entorno de Liapunov Σ_0 del punto P_1; además, en lugar de la integral sobre Σ_0, se puede considerar la integral





sobre la proyección S_0 de este entorno en el plano tangente en el punto P_1, en virtud de que se verifica

$$1 \geqslant \frac{\rho(P, M)}{r(P, M)} \geqslant B > 0$$

(donde $\rho(P, M)$ es la distancia entre las proyecciones de los puntos P y M sobre el plano tangente y B, cierta constante), así como también en virtud de la relación entre el elemento de superficie $d\sigma$ y su proyección dS: $d\sigma = \frac{dS}{\cos\gamma}$, donde, de acuerdo con la fórmula (34), es $\cos\gamma > \frac{1}{2}$.

Para una región plana, es válido el lema:

$$\text{si } |K_i| < \frac{C_i}{r_i^{2-\alpha_i}}, \quad \text{entonces}$$

$$|I| = \left| \iint_{S_0} K_1(P_1, M) K_2(M, P_2)\, dx\, dy \right| < \frac{C}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}.$$

Designemos mediante R el diámetro de la región S_0. Dividamos la integral I en dos: I_1, tomada en el círculo G_1 de radio $2r$ con centro en el punto P_1, e I_2, tomada sobre la región restante G_2 (fig. 66). Puesto que para los puntos M que se hallan en G_2, se tiene:

$$2 \geqslant \frac{r_1}{r_2} \geqslant \frac{2}{3} \begin{pmatrix} r_1 \leqslant r_2 + r \leqslant 2r_2, \\ r_2 \leqslant r_1 + r \leqslant r_1 + \frac{r_1}{2} = \frac{3r_1}{2} \end{pmatrix},$$

entonces se obtiene, para la integral I_2, la acotación

$$|I_2| < 4C_1C_2 \left| \int_0^{2\pi} \int_{2r}^{R} \frac{1}{r_1^{4-\alpha_1-\alpha_2}} r_1\, dr_1\, d\varphi \right| < \begin{cases} \dfrac{C_3}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}, & \alpha_1+\alpha_2 < 2, \\ C_3 R^{\alpha_1+\alpha_2-1}, & \alpha_1+\alpha_2 > 2. \end{cases}$$

Efectuando en la integral G_1 el cambio de variables

$$x = rx',$$
$$y = ry',$$

se obtiene:

$$|I_1| < \left| \frac{1}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}} \iint_{G_1'} \frac{C_1C_2}{r_1'^{2-\alpha_1} r_2'^{2-\alpha_2}}\, dx'\, dy' \right|.$$

Demostremos, en base al teorema enunciado, que la ecuación integral (50) posee solución única.

Nos limitaremos a estudiar contornos convexos, que no contienen segmentos rectilíneos en la frontera. En esta caso, el núcleo $K(P_0, P)$ de la ecuación (50) no es negativo, puesto que

$$K(P_0, P)\, ds_P = d\omega,$$

donde $d\omega$ es el ángulo de visualidad del arco dS_P desde el punto P_0.

Consideremos, ante todo, el primer problema de contorno para una región interior. La ecuación homogénea que corresponde a la (50) tiene la forma

$$\pi\nu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\, ds = 0. \qquad (63)$$

Como ya fue indicado (véase el p. 8), tiene lugar la igualdad

$$\int_0^L K(s_0, s)\, ds = \pi,$$

aplicando la cual, la ecuación homogénea (63) se puede escribir en la forma

$$\int_0^L [\nu(s_0) + \nu(s)]\, K(s_0, s)\, ds = 0. \qquad (64)$$

Sea P_0^* (s_0^*) el punto del contorno C en el cual la función $|\nu(s)|$ alcanza su valor máximo. De aquí se deduce que la suma $\nu(s_0^*) + \nu(s)$ es de signo constante. Entonces, haciendo en (64) $s_0 = s_0^*$ y utilizando el hecho de que $K(s_0, s) \geqslant 0$, se obtiene la igualdad

$$\nu(s_0^*) + \nu(s) = 0, \quad \text{o bien} \quad \nu(s) = -\nu(s_0^*),$$

que contradice a la continuidad en el punto s_0^*, siempre que $\nu(s_0^*) \neq 0$.

En la última integral, tomada por el contorno G_1' de radio igual a $2r$, r_1' es la distancia al centro, y r_2', a la mitad del radio, a consecuencia de lo cual esta integral converge, y no depende de la posición del punto P_2, es decir, de r.

De aquí se obtiene:

$$|I_1| < \frac{C_4}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}.$$

Haciendo $C_3 + C_4 = C$, se obtiene la desigualdad buscada:

$$|I| < \begin{cases} \dfrac{C}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}} & \alpha_1+\alpha_2 < 2, \\ CR^{\alpha_1+\alpha_2-2}, & \alpha_1+\alpha_2 > 2. \end{cases}$$

De aquí se deduce que, a partir de cierto número, las integrales que representan los núcleos iterados están acotadas y convergen uniformemente, es decir, son funciones continuas de sus argumentos.

Por lo tanto, la ecuación homogénea (63) tiene sólo la solución nula, con lo cual la ecuación no homogénea posee solución única para cualquier función f[1]).

El segundo problema exterior de contorno (veáse el p. 10)) se reduce a la ecuación integral

$$\pi\mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s)\,\mu(s)\,ds = f(s_0), \qquad (54)$$

cuyo núcleo, $K_1(s_0, s)$, es conjugado con respecto al $K(s_0, s)$, es decir, $K_1(s_0, s) = K(s, s_0)$.

El segundo teorema de Fredholm consiste en lo siguiente:

el número de soluciones linealmente independientes de cierta ecuación integral homogénea es igual al número de soluciones linealmente independientes de la ecuación conjugada.

De este teorema se sigue que la solución de la ecuación (54) se determina unívocamente.

Al primer problema exterior de contorno le corresponde la ecuación

$$-\pi\nu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\,ds = f(s_0). \qquad (52)$$

La ecuación homogénea ($f = 0$), de acuerdo con lo anterior, se puede reducir a la forma

$$\int_0^L [\nu(s_0) - \nu(s)]\,K(s_0, s)\,ds = 0.$$

Indicando con s_0^* el punto en el cual $|\nu(s)|$ alcanza su valor máximo, de (65) se obtiene

$$\nu(s^*) = \nu(s).$$

De aquí se deduce que sólo

$$\nu(s) = \text{const} = \nu_0$$

puede ser solución de la ecuación homogénea. En virtud del segundo teorema de Fredholm, la ecuación homogénea conjugada tendrá solución única.

La condición para que exista solución de la ecuación no homogénea la da el tercer teorema de Fredholm:

si cierta ecuación integral homogénea

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

---

[1]) Si hay segmentos rectilíneos en la frontera, los razonamientos se complican un tanto, aunque no presenta dificultad alguna llevarlos a cabo.

tiene k soluciones linealmente independientes $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k$) la ecuación no homogénea conjugada

$$\psi(x) = \int_a^b K(s, x)\,\psi(s)\,ds + f(x)$$

tiene solución si $\int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$

Aplicando el tercer teorema de Fredholm a la ecuación (53) que corresponde al segundo problema interior de contorno, se obtiene la condición de resolución de este problema:

$$\int_0^L f(s)\,ds = 0, \tag{66}$$

que ya fue considerada en el § 1.

La condición de resolución del primer problema de contorno exterior tiene la forma

$$\int_0^L f(s)\,h(s)\,ds = 0, \tag{67}$$

donde $h(s)$ es la solución de la ecuación homogénea que corresponde a (53). No es difícil establecer el significado físico de esta función.

Supongamos que un conductor cilíndrico de sección S está cargado hasta cierto potencial V_0. En el conductor, toda la carga se encuentra en la superficie. Designemos por $\bar{h}(s)$ la densidad de las cargas superficiales. El potencial creado por estas cargas superficiales es un potencial de capa simple de densidad $\bar{h}(s)$, y se expresa mediante la fórmula (29). Sus derivadas normales desde el interior son iguales a cero, puesto que dentro del conductor es $V = \text{const}$. Por esto, la función $\bar{h}(s)$ satisface a la ecuación homogénea (53), y es proporcional a la función $h(s)$ definida más arriba; esto esclarece el significado físico de esta función.

De este forma, las ecuaciones integrales, a las cuales se reducen los problemas de contorno, son siempre resolubles para el primer problema interior y el segundo exterior de contorno y son resolubles, bajo las condiciones (66) y (67), para el segundo problema interior y el primero exterior de contorno[1]).

---

[1]) Para más detalles, véase I. G. Petrovski, *Lecciones sobre la Teoría de las Ecuaciones en Derivadas Parciales*, § 39, ed. Fizmatguiz, 1961.

EJERCICIOS DEL CAPITULO IV

1. Hallar la función u, armónica dentro de un círculo de radio a, y que tome en la circunferencia C los valores

a) $u|_C = A \cos\varphi$;

b) $u|_C = A + B \operatorname{sen}\varphi$.

2. Resolver la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ dentro del rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ con las condiciones de frontera

$$u|_{x=0} = f_1(y), \quad u|_{y=0} = f_2(x), \quad u|_{x=a} = 0, \quad u|_{y=b} = 0.$$

Demostrar que las fórmulas que se obtienen aquí dan la solución del problema para una función continua a trozos arbitraria, dada en la frontera.

Resolver el problema para el caso particular

$$f_1(y) = Ay(b-y), \quad f_2(x) = B\cos\frac{\pi}{2a}x, \quad f_3 = f_4 = 0.$$

3. Resolver la ecuación $\Delta u = 1$ para un círculo de radio a con la condición de frontera $u|_{r=a} = 0$.

4. Resolver la ecuación $\Delta u = Axy$ para un círculo de radio a con centro en el punto $(0, 0)$ con la condición de frontera $u|_{r=a} = 0$.

5. Resolver la ecuación $\Delta u = A + B(x^2 - y^2)$ en el anillo $a \leqslant \rho \leqslant b$, si

$$u|_{\rho=a} = A_1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=b} = 0.$$

El origen de coordenadas se halla en el centro del anillo.

6. Escribir la función de la fuente para la ecuación de Laplace (primer problema de contorno): a) para el semicírculo, b) para el anillo, c) para la capa $(0 \leqslant z \leqslant l)$.

7. Hallar la función armónica dentro del anillo $a \leqslant \rho \leqslant b$, que satisfaga a las siguientes condiciones de frontera:

$$u|_{\rho=a} = f_1(\varphi), \quad u|_{\rho=b} = f_2(\varphi).$$

8. Hallar la solución de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en el semiplano $y \geqslant 0$, con la condición de frontera

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ u_0 & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

9. Hallar la función $u(\rho, \varphi)$ armónica dentro del sector circular $\rho \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, con las condiciones de frontera:

a) $u|_{\varphi=0} = q_1$, $u|_{\varphi=\varphi_0} = q_1$, $u|_{\rho=a} = q_2$, donde q_1 y q_2 son constantes;

b) $u_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\varphi_0} = 0$, $u|_{\rho=a} = f(\varphi)$.

10. Resolver, por el método de las diferencias finitas, el primer problema de contorno para la ecuación $\Delta u = 0$ dentro del rectángulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, dividiendo cada uno de sus lados en

8 partes iguales, si las condiciones de frontera tienen la forma

$$u\,|_{x=0}=\frac{y}{b}\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad u\,|_{y=b}=\frac{x}{a}\operatorname{sen}\frac{\pi}{a}x,\quad u\,|_{x=a}=u\,|_{y=0}=0.$$

Compárese con la solución analítica (véase el Complemento I, § 3).

11. Hallar el potencial de volumen de una esfera para el caso de densidad constante $\rho=\rho_0$.

Indicación. Resolver la ecuación $\Delta u=0$ fuera de la esfera, y $\Delta u=4\pi\rho_0$ dentro de ésta, y unir las soluciones en la superficie esférica.

12. Hallar el potencial de capa simple distribuido con densidad constante $\nu=\nu_0$ en la esfera.

Indicación. Búsquese la solución de la ecuación $\Delta u=0$ dentro y fuera de la esfera, y aplíquense, para la unión, las condiciones de discontinuidad de la derivada del potencial de capa simple.

13. Resolver el primer problema de contorno para un cilindro circular acotado ($\rho\leqslant a$, $0\leqslant z\leqslant l$), si:

a) en las bases del cilindro están dadas condiciones nulas de frontera (de primera o de segunda especie), y en la superficie lateral es

$$u\,|_{\rho=a}=f(z);$$

b) en la superficie lateral y en una de las bases del cilindro están dadas condiciones de frontera nulas (de primera y de segunda especie), y en la segunda base del cilindro es

$$u=f(\rho),$$

por ejemplo, $f(\rho)=A\rho\left(1-\frac{\rho}{a}\right)$.

14. Resolver la ecuación no homogénea

$$\Delta u=-f$$

en una región cilíndrica no acotada con condiciones de frontera nulas (de primera o de segunda especie) y escribir la función de la fuente.

15. Hallar la función armónica dentro de una esfera, igual a u_1 en una mitad de la superficie esférica y a u_2 en la otra mitad.

16. Escribir el desarrollo en funciones esféricas de la densidad de las cargas superficiales inducidas en una esfera conductora por una carga puntual.

17. Resolver el problema sobre la polarización de una esfera dieléctrica en el campo de una carga puntual.

18. Calcular el potencial gravitacional de un disco plano. Comparar con la representación asintótica del potencial gravitacional a grandes distancias.

19. Calcular el potencial magnético de una corriente circular.

20. Resover el problema sobre la perturbación de un campo eléctrico plano paralelo por una esfera conductora ideal. Resolver el problema para una esfera totalmente aisladora.

APENDICES DEL CAPITULO IV

I. EXPRESION ASINTOTICA DEL POTENCIAL DE VOLUMEN

Al estudiar el potencial de volumen

$$V(M)=\iiint_T \frac{\rho(P)\,d\tau_P}{d}, \qquad \text{donde} \qquad d=R_{MP}, \tag{1}$$

comúnmente se toma, a grandes distancias del cuerpo, que el potencial es igual a $\frac{m}{R}$, donde m es la masa del cuerpo T, R, la distancia desde su centro de gravedad hasta el punto de observación. Establezcamos una expresión asintótica más exacta para V[1].

Sea Σ una esfera con centro en el origen de coordenadas, que contenga enteramente al cuerpo T. En el exterior de esta esfera, el potencial será una función armónica.

La distancia desde el punto de observación M (x, y, z) hasta un punto variable M (x_1, y_1, z_1) dentro del cuerpo (fig. 67), en el cual se efectúa la integración, es igual a

$$d=\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\theta} \qquad (r=OM,\ r_1=OM_1), \tag{2}$$

de donde

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\mu}}; \qquad \alpha=\frac{r_1}{r}; \qquad \mu=\cos\theta. \tag{3}$$

Como $r_1<r$, debe ser $\alpha<1$, y por esto tiene lugar el desarrollo (véase el Complemento II, II Parte, § 1)

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(\mu), \tag{4}$$

donde $P_n(\mu)$ es el polinomio de Legendre de n-ésimo orden (véase el Complemento II, II Parte, § 1). Sustituyendo esta expresión en la fórmula (1) y teniendo en cuenta que $\frac{1}{r}$ no depende de las variables de integración, se obtiene:

$$V(M)=\frac{1}{r}\iiint_T \rho\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(\mu)\,d\tau=V_1+V_2+V_3+\ldots=$$

$$=\frac{1}{r}\iiint_T \rho\,d\tau+\frac{1}{r^2}\iiint_T \rho r_1 P_1(\mu)\,d\tau+\frac{1}{r^3}\iiint_T \rho\, r_1^2 P_2(\mu)\,d\tau+\ldots \tag{5}$$

---

[1]) Véase V. I. Smirnov, *Curso de Matemáticas Superiores*, t. III, ed. Gostejizdat, 1956.

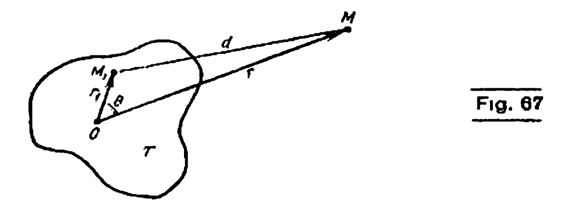


Fig. 67

El primer término es igual a $\frac{m}{r}$, donde m es la masa de todo el cuerpo, y nos da la primera aproximación para el cálculo del potencial para r grandes.

Pasemos al cálculo de los términos siguientes del desarrollo (5). El integrando del segundo término es igual a

$$\rho P_1(\mu)\, r_1 = \rho\mu r_1 = \rho r_1 \operatorname{sen}\theta = \frac{\rho x x_1 + \rho y y_1 + \rho z z_1}{r}.$$

Las magnitudes x, y, z y r no dependen de las variables de integración, y se pueden sacar fuera del signo integral. Luego de esto, el segundo término del desarrollo del potencial toma la forma

$$\frac{1}{r^2}\iiint\limits_T \rho r_1 P_1(\mu)\, d\tau = \frac{1}{r^3}(M_1 x + M_2 y + M_3 z) = \frac{M}{r^3}(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}),$$

donde

$$M_1 = \iiint\limits_T \rho x_1\, d\tau = M\bar{x}, \quad M_2 = \iiint\limits_T \rho y_1\, d\tau = M\bar{y},$$
$$M_3 = \iiint\limits_T \rho z_1\, d\tau = M\bar{z}$$

son los momentos de primer orden, y $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, las coordenadas del centro de gravedad. De esta manera, el segundo término disminuye como $\frac{1}{r^2}$. Si el origen de coordenadas se sitúa en el centro de gravedad ($\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$), entonces $V_2 = 0$.

Consideremos el tercer término del desarrollo. Transformemos el integrando:

$$\rho r_1^2 P_2(\mu) = \rho r_1^2 \frac{3\mu^2 - 1}{2} = \rho r_1^2 \frac{3(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2 - r_1^2 r^2}{2r_1^2 r^2} =$$

$$= \frac{\rho}{2r^2}[3(x_1 x + y_1 y + z_1 z)^2 - r_1^2 r^2].$$

Introduciendo las notaciones

$$M_{ik} = \iiint_T \rho x_i x_k \, d\tau \qquad (x = x_1;\ y = x_2;\ z = x_3),$$

se obtiene la siguiente expresión para V_3:

$$V_3 = \frac{1}{r^3} \iiint_T \rho r_1^2 P_2(\mu)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2r^5}\{x^2[3M_{11} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] +$$
$$+ y^2[3M_{22} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] +$$
$$+ z^2[3M_{33} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] +$$
$$+ 2\cdot 3xyM_{12} + 2\cdot 3xzM_{13} + 2\cdot 3yzM_{23}\}.$$

El polinomio entre llaves es armónico, puesto que puede ser escrito en la forma

$$V_3 = \frac{1}{2r^5}\{(x^2 - y^2)[M_{11} - M_{22}] + (z^2 - x^2)[M_{11} - M_{33}] +$$
$$+ (y^2 - z^2)[M_{22} - M_{33}] + 6[xyM_{12} + xzM_{13} + yzM_{23}]\},$$

donde cada sumando satisface a la ecuación de Laplace. Los coeficientes entre corchetes se expresan mediante los *momentos de inercia*. El momento de inercia del cuerpo T con respecto al eje x, como es sabido, es igual a

$$A = \iiint_T \rho(y_1^2 + z_1^2)\, d\tau = M_{22} + M_{33}.$$

Análogamente, los momentos de inercia con respecto a los ejes y y z son iguales a

$$B = M_{33} + M_{11}; \quad C = M_{11} + M_{22}.$$

De aquí se deduce que

$$M_{11} - M_{22} = B - A; \quad M_{11} - M_{33} = C - A;$$
$$M_{22} - M_{33} = C - B.$$

Como resultado, se obtiene la expresión asintótica del potencial

$$V \cong \frac{m}{r} + \frac{m}{r^3}(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}) + \frac{1}{2r^5}\{(x^2 - y^2)(B - A) +$$
$$+ (y^2 - z^2)(C - B) + (z^2 - x^2)(A - C) +$$
$$+ 6(xyM_{12} + yzM_{23} + zxM_{31})\}, \qquad (6)$$

que es válida con exactitud de hasta los términos de orden $\frac{1}{r^6}$.

La expresión (6) se simplifica si se ubica el origen de coordenadas en el centro de gravedad, y se dirigen los ejes coordenados por los ejes principales de inercia:

$$V \cong \frac{m}{r} + \frac{1}{2r^5}\{(x^2 - y^2)(B - A) + (y^2 - z^2)(C - B) +$$

$$+ (z^2 - x^2)(A - C)\}. \quad (7)$$

La representación asintótica obtenida del potencial permite resolver varias cuestiones del problema inverso de la teoría del potencial, que consiste en la determinación de las características de un cuerpo partiendo de su potencial (o de algunas de sus derivadas).

En efecto, determinando los coeficientes del desarrollo (6), se puede hallar la masa, las coordenadas del centro de gravedad y los momentos de inercia del cuerpo.

II. PROBLEMAS DE LA ELECTROSTATICA

En los problemas de la electrostática, la resolución de las ecuaciones de Maxwell se reduce a la determinación de una sola función escalar: el potencial φ, relacionado con la intensidad del campo por la fórmula

$$E = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Aplicando la ecuación de Maxwell

$$\operatorname{div} E = -4\pi\rho,$$

se obtiene:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

De este modo, el potencial satisface a la ecuación de Poisson en los puntos del espacio donde se hallan las cargas eléctricas, y a la de Laplace en los puntos donde no hay cargas.

1. *El problema fundamental de la electrostática* es la determinación del campo que crea un sistema de cargas en los conductores dados. Aquí son posibles dos planteamientos diferentes de este problema.

I. Se dan los potenciales de los conductores y se pide hallar el campo fuera de los conductores y la densidad de las cargas en éstos. El planteamiento matemático del problema consiste en lo siguiente:

se pide hallar la función φ que satisfaga a la ecuación de Laplace $\Delta\varphi = 0$ en todas partes, fuera del sistema dado de conductores, que se anule en el infinito y que tome valores dados φ_i en las

superficies de los conductores S_i:

$$\varphi|_{S_i} = \varphi_i, \qquad \varphi_i = \text{const}.$$

De esta manera, en este caso se obtiene el primer problema de contorno para la ecuación de Laplace. La unicidad de su solución se desprende de la teoría general.

II. Es posible el planteamiento inverso del problema. En los conductores se dan las cargas totales. Se pide hallar los potenciales de los conductores, la distribución de las cargas por sus superficies y el campo fuera de éstos. La solución de este problema se reduce a la determinación de la función φ que satisfaga a la ecuación de Laplace

$$\Delta\varphi = 0$$

fuera de un sistema dado de conductores, que se anule en el infinito, que tome en las superficies de los conductores ciertos valores constantes

$$\varphi|_{S_i} = \text{const},$$

y que satisfaga a la relación integral en las superficies de los conductores:

$$\oint_{S_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma = -4\pi e_i,$$

donde e_i es la carga total del i-ésimo conductor.

2. La unicidad de la solución del segundo problema no se sigue de la teoría general, pero se puede demostrar fácilmente.

Supongamos la existencia de dos soluciones φ_1 y φ_2 del problema II. Entonces, su diferencia

$$\varphi' = \varphi_1 - \varphi_2$$

debe satisfacer a la ecuación

$$\Delta\varphi' = 0$$

y a las condiciones

$$\varphi'|_{S_i} = \text{const},$$

$$\oint_{S_i} \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\, d\sigma = 0,$$

$$\varphi'|_{\infty} = 0.$$

Encerremos todos los conductores dados dentro de una esfera Σ_R de radio R suficientemente grande y apliquemos a la función φ' la primera fórmula de Green en la región T_R, limitada por

la esfera Σ_R y por las superficies de los conductores S_i:

$$\int_{T_R} (\nabla\varphi')^2 \, d\tau = \int_{\Sigma_R} \varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial n} \, d\sigma + \sum_{i=1}^{n} \int_{S_i} \varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial n} \, d\sigma.$$

En virtud de las condiciones en el infinito[1]) y en las superficies, se obtiene:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{T_R} (\nabla\varphi')^2 \, d\tau = 0,$$

de dondo, en virtud de que el integrando es positivo, se deduce que

$$\nabla\varphi' = 0,$$

o bien

$$\varphi' = \text{const}$$

en toda la región considerada. Teniendo en cuenta la condición en el infinito:

$$\varphi' |_\infty = 0,$$

se obtiene:

$$\varphi' \equiv 0,$$

lo cual demuestra la unicidad del problema planteado.

3. De la unicidad de la solución del problema de contorno para la ecuación de Laplace, se deduce que **el potencial de un conductor aislado es directamente proporcional a la carga suministrada:**

$$\frac{e}{\varphi} = C.$$

En efecto, si en un conductor aislado se ubican las cargas e y $e' = me$, los potenciales φ y φ' correspondientes deben satisfacer a las ecuaciones

$$\Delta\varphi = 0; \quad \Delta\varphi' = 0$$

y a las condiciones de frontera

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n} \, d\sigma = e; \qquad -\frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial\varphi'}{\partial n} \, d\sigma = me,$$

de donde se deduce que $\varphi' - m\varphi = 0$, es decir, que $\dfrac{\varphi'}{\varphi} = \dfrac{e'}{e}$.

---

[1]) De la condición $\varphi' |_\infty = 0$, se deduce la regularidad de la función φ' en el infinito (véase la pág. 338), en virtud de lo cual

$$\int_{\Sigma_R} \varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial n} \, d\sigma \to 0 \quad \text{para } R \to \infty.$$

En la superficie del conductor aislado, se obtiene:

$$\frac{e'}{\varphi'} = \frac{e}{\varphi} = C = \text{const.}$$

Esta constante C se llama *capacidad* del conductor aislado. Esta no depende de la carga del conductor, sino que se determina por la forma y las dimensiones de este último. De esta forma, para un conductor aislado tiene lugar la relación

$$e = C\varphi, \qquad C = -\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma.$$

La capacidad de un conductor aislado es numéricamente igual a la carga que es necesario suministrarle para que el conductor adquiera un potencial igual a 1. Si el conductor no está aislado, su potencial depende de modo sustancial de la forma y posición de los demás conductores. Para un sistema de conductores, tienen lugar las fórmulas

$$\begin{aligned} e_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + C_{1n}(\varphi_n - \varphi_1), \\ e_2 &= C_{21}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{22}\varphi_2 + \ldots + C_{2n}(\varphi_n - \varphi_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= C_{n1}(\varphi_1 - \varphi_n) + C_{n2}(\varphi_2 - \varphi_n) + \ldots + C_{nn}\varphi_n, \end{aligned}$$

donde e_i y φ_i son la carga y el potencial del i-ésimo conductor. La magnitud C_{ik} tiene el sentido de la capacidad recíproca del i-ésimo conductor con respecto al k-ésimo. Esta se puede definir como la carga que se debe dar al i-ésimo conductor para que todos los conductores, a excepción del k — ésimo, tengan potencial nulo, y el k-ésimo. potencial 1.

4. Es fácil demostrar que **la matriz de los coeficientes C_{ik} es simétrica,** es decir, que tienen lugar las igualdades

$$C_{ik} = C_{ki}.$$

Para fijar ideas, consideremos el caso de dos conductores, aunque la demostración es la misma para el caso de n conductores.

Sean dados dos conductores a y b. Entonces, la determinación de los coeficientes C_{ab} y C_{ba} se reduce a la determinación de las funciones $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ que satisfagan a las ecuaciones $\Delta u^{(1)} = 0$ y $\Delta u^{(2)} = 0$ y a las condiciones de frontera

$$u^{(1)}|_{S_a} = 0; \qquad u^{(1)}|_{S_b} = 1; \qquad u^{(1)}|_{\infty} = 0,$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_{S_a} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\, d\sigma = e_a^{(1)} = C_{ab};$$

$$u^{(2)}|_{S_a} = 1; \qquad u^{(2)}|_{S_b} = 0; \qquad u^{(2)}|_{\infty} = 0,$$
$$-\frac{1}{4\pi}\oint_{S_b} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}\,d\sigma = e_b^{(2)} = C_{ba}.$$

Tracemos una esfera Σ_R de radio suficientemente grande R, que contenga a ambos conductores, a y b, y apliquemos la fórmula de Green a las funciones $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ en la región comprendida entre la superficie Σ_R y las superficies S_a y S_b de los conductores:

$$\int_{T_R} (u^{(1)}\,\Delta u^{(2)} - u^{(2)}\,\Delta u^{(1)})\,d\tau = \int_{\Sigma_R + S_a + S_b} \left(u^{(1)}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial n} - u^{(2)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\right) d\sigma.$$

La integral del primer miembro de esta igualdad es igual a cero. Utilizando las condiciones de frontera y en el infinito, se obtiene:

$$\int_{S_b} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}\,d\sigma - \int_{S_a} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\,d\sigma = 0,$$

o bien

$$C_{ab} = C_{ba},$$

que es lo que queríamos demostrar.

5. Pasemos a analizar ejemplos concretos.

Consideremos el problema del campo de una esfera cargada. Supongamos que en la superficie de una esfera conductora de radio a se ha dado un potencial φ_0. Resolviendo el problema 1, es fácil demostrar que el campo y la densidad de las cargas en la superficie de la esfera se determinarán, en este caso, por las expresiones

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{r}\,a \quad \text{y} \quad \sigma = \frac{\varphi_0}{4\pi a}.$$

Si en lugar del potencial en la superficie de la esfera φ_0 se ha dado la carga total e_0 suministrada a la esfera, entonces

$$\varphi_0 = \frac{e_0}{a}, \qquad \sigma = \frac{e_0}{4\pi a^2}, \qquad \varphi = \frac{e_0}{r} \qquad (r > a).$$

Aquí la capacidad de la esfera es

$$C = a,$$

es decir, en unidades absolutas la capacidad de una esfera aislada es numéricamente igual a su radio.

Como ejemplo siguiente, consideremos el problema de un condensador esférico (sistema de dos esferas concéntricas conductoras).

Supongamos que la esfera interior, de radio r_1, tiene un potencial dado V_0, y la exterior, de radio r_2, está conectada a tierra. Entonces, la determinación del campo dentro del condensador se reduce a la determinación de la función φ que satisfaga a la ecuación

$$\Delta\varphi = 0$$

y a las condiciones

$$\varphi|_{r_1} = V_0, \qquad \varphi|_{r_2} = 0.$$

Es fácil demostrar que en este caso es

$$\varphi = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} V_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right).$$

y la capacidad del condensador esférico es igual a

$$C = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Un problema más complejo es la determinación del potencial de la esfera cuando hay otra esfera no concéntrica con la primera. Este problema se resuelve por el método de las imágenes. La solución analítica es bastante engorrosa, y no la expondremos aquí[1]).

6. Pasemos a los problemas bidimensionales.

Como ejemplo, consideremos un condensador formado por dos cilindros coaxiales infinitamente largos, en uno de los cuales se ha distribuido uniformemente carga eléctrica. Es evidente que la solución del problema es igual en todos los planos paralelos al plano de sección normal del cilindro. Por esto, el problema se puede considerar plano y dar, en lugar de la carga total, la carga $\varkappa$ por unidad de longitud.

Si el cilindro exterior, de radio r_2, se ha conectado a tierra y en el interior, de radio r_1, se ha dado una carga $\varkappa$, el potencial del campo en el condensador se determina por la expresión

$$\varphi = 2\varkappa \ln \frac{r}{r_2},$$

y la capacidad de la unidad de longitud del condensador cilíndrico es igual a

$$C = \frac{1}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

---

[1]) Véase P. Frank y R. Mises, *Ecuaciones Diferenciales e Integrales de la Física matemática*, t. II, pág. 713, 1937.

El ejemplo considerado permite resolver el problema más complejo de determinación de la capacidad de un cable, situado en un plano conductor. Supongamos que sobre un plano infinito, a una distancia l de éste, se encuentra un cable infinitamente largo de radio ρ, en el cual hay distribuida carga con densidad $\varkappa$ (carga por unidad de longitud). Está claro que este problema también se puede resolver como bidimensional.

III. PROBLEMA FUNDAMENTAL DE LA EXPLORACION ELECTRICA

Para el estudio de la heterogeneidad de la corteza terrestre, con el fin de explorar los yacimientos minerales útiles, se aplican ampliamente métodos eléctricos. El esquema fundamental de la exploración eléctrica mediante una corriente constante, consiste en lo siguiente. Mediante electrodos conectados a tierra, se hace pasar por la tierra la corriente de una batería de alimentación. En la superficie de la tierra se miden las tensiones del campo de corriente continua formado de este modo. Mediante observaciones en la superficie, se determina la estructura subterránea. Los métodos de determinación de las estructuras subterráneas (interpretación de las observaciones) se basan en la resolución matemática de los problemas correspondientes.

El potencial del campo de una corriente continua en un medio homogéneo, satisface a la ecuación de Laplace

$$\Delta V = 0 \quad (z > 0) \tag{1}$$

con la condición complementaria

$$\left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \tag{2}$$

la cual significa que la componente vertical de la densidad de la carga[1]) en la superficie («del día») $z = 0$ es igual a cero, puesto que el semiespacio $z < 0$ (el aire) no es conductor.

Consideremos un electrodo puntual en la frontera del semiespacio, en el punto A. Evidentemente, el potencial del campo será igual a

$$V = \frac{I\rho}{2\pi R}, \tag{3}$$

donde R es la distancia a la fuente A, ρ, la resistencia específica del medio, e I, la intensidad de la corriente. Esta función se

[1]) Véase la pág. 312.

diferencia de la función de la fuente en el espacio no acotado por el coeficiente 2, en virtud de la condición (2).

Midiendo la diferencia de potenciales en los puntos M y N que se hallan en una misma recta junto con A, se obtiene, con ayuda del circuito de medición:

$$V(M) - V(N) = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r,$$

donde Δr es la distancia entre los puntos N y M.

Suponiendo que los puntos M y N se hallan suficientemente próximos uno del otro, se obtiene:

$$\frac{V(M) - V(N)}{\Delta r} \cong \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right| \cong \frac{I\rho}{2\pi r^2},$$

donde r es la distancia del punto O (centro del circuito receptivo MN) al electrodo de alimentación. La intensidad del campo I en el circuito de alimentación se conoce, puesto que se registra en el transcurso del trabajo. De aquí se obtiene, para la resistencia del semiespacio homogéneo:

$$\rho = \frac{2\pi r^2}{I}\cdot\left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|. \qquad (4)$$

Si el medio no es homogéneo, la magnitud ρ, que se determina por la fórmula (4), es llamada resistencia aparente y se denota mediante ρ_a: ρ_a no es una magnitud constante.

Consideremos el problema del sondeo eléctrico vertical, cuando las capas de la corteza terrestre se disponen en forma horizontal, y su resistencia depende sólo de la profundidad:

$$\rho = \rho(z).$$

En este caso, la resistencia aparente será una función de la distancia $r = AO$. El problema de la interpretación de los resultados de los sondeos eléctricos verticales consiste en la determinación de la función $\rho(z)$, que da el «corte eléctrico» del medio, partiendo de los valores conocidos $\rho_a(r)$.

Analicemos con más detalle el problema de un medio de dos capas, cuando una capa homogénea de potencia l y resistencia ρ_0 se halla en un medio homogéneo de resistencia ρ_1,

$$\rho(z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{para} \quad 0 \leqslant z < l, \\ \rho_1 & \text{para} \quad l < z. \end{cases}$$

Es evidente que en pequeñas distancias, $r \ll l$, la resistencia aparente ρ_a es igual a ρ_0, puesto que la influencia del medio

subyacente será muy pequeña. Para distancias grandes ($r \gg l$), ρ_a es igual a ρ_1.

El problema se reduce, de este modo, a hallar la solución de la ecuación de Laplace V_0 en la capa $0 < z < l$ y V_1 en el semiespacio $z > l$. Para $z = l$, deben cumplirse las condiciones de continuidad del potencial:

$$V_0 \big|_{z=l} = V_1 \big|_{z=l} \tag{5}$$

y de continuidad de las componentes normales de la densidad de la corriente:

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial V_0}{\partial z}\bigg|_{z=l} = \frac{1}{\rho_1}\frac{\partial V_1}{\partial z}\bigg|_{z=l}. \tag{6}$$

Para $z = 0$, el potencial V_0 debe satisfacer a la condición (2), y en el punto A, el cual tomaremos como origen de las coordenadas cilíndricas (r, φ, z), el potencial V_0 debe tener una particularidad del tipo (3):

$$V_0 = \frac{\rho_0 I}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} + v_0, \tag{7}$$

donde v_0 es una función acotada.

La función V_1 debe ser acotada en el infinito. Las funciones v_0 y V_1 satisfacen a la ecuación (1), la cual, en virtud de la simetría cilíndrica del problema, adquiere la forma

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

El método de separación de las variables nos da, para V, dos tipos de soluciones, acotadas para $r = 0$:

$$e^{\pm\lambda z} J_0(\lambda r),$$

donde J_0 es la función de Bessel de orden nulo (véase el Complemento II, I Parte, § 1), y λ, el parámetro de la separación. Buscaremos la solución en la forma

$$V_0(r, z) = \frac{\rho_0 I}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} + \int_0^\infty (A_0 e^{-\lambda z} + B_0 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r)\, d\lambda,$$

$$V_1(r, z) = \int_0^\infty (A_1 e^{-\lambda z} + B_1 e^{\lambda z}) J_0(\lambda r)\, d\lambda,$$

donde A_0, B_0, A_1, B_1 son ciertas constantes. La condición (2) nos da el nexo entre A_0 y B_0. Calculemos la derivada

$$\frac{\partial V_0}{\partial z}=-\frac{\rho_0 I}{2\pi}\cdot\frac{z}{(z^2+r^2)^{3/2}}+\int_0^\infty(-\lambda A_0e^{-\lambda z}+\lambda B_0e^{\lambda z})\,J_0(\lambda r)\,d\lambda.$$

La condición (2) toma la forma

$$\int_0^\infty(B_0-A_0)\,J_0(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda=0$$

para un r arbitrario, de donde

$$B_0=A_0.$$

De la condición de acotación de V_1 cuando $z\to\infty$, se deduce que

$$B_1=0.$$

De esta manera,

$$V_1(r,z)=\int_0^\infty A_1e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)\,d\lambda$$

y

$$V_0(r,z)=\int_0^\infty[qe^{-\lambda z}+A_0(e^{-\lambda z}+e^{\lambda z})]\,J_0(\lambda r)\,d\lambda;$$

aquí hemos utilizado la fórmula

$$\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}=\int_0^\infty J_0(\lambda r)\,e^{-\lambda z}\,d\lambda \tag{8}$$

(véase el Complemento II, I Parte, § 5) e introducido la notación $\frac{\rho_0 I}{2\pi}=q$.

Las constantes que quedan, A_0 y A_1, se determinan de las condiciones (5) y (6) para $z=l$, las cuales se reducen al sistema de ecuaciones algebraicas:

$$A_0(e^{-2\lambda l}+1)-A_1e^{-2\lambda l}=-qe^{-2\lambda l},$$

$$\frac{1}{\rho_0}A_0(e^{-2\lambda l}-1)-\frac{1}{\rho_1}A_1e^{-2\lambda l}=-\frac{q}{\rho_0}e^{-2\lambda l},$$

de donde se halla el coeficiente

$$A_0=q\frac{(\rho_1-\rho_0)\,e^{-2\lambda l}}{(\rho_1+\rho_0)-(\rho_1-\rho_0)\,e^{-2\lambda l}},$$

y la solución V_0 para la capa superior se da por la fórmula

$$V_0(r,z)=\frac{I\rho_0}{2\pi}\int_0^\infty\left[e^{-\lambda z}+\frac{ke^{-2\lambda l}}{1-ke^{-2\lambda l}}(e^{-\lambda z}+e^{\lambda z})\right]J_0(\lambda r)\,d\lambda, \tag{9}$$

donde se hizo

$$\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_1 + \rho_0} = k.$$

Transformemos la expresión obtenida. Como $|k| < 1$, se puede escribir:

$$\frac{ke^{-2\lambda l}}{1 - ke^{-2\lambda l}} = \sum_{n=1}^{\infty} k^n \cdot e^{-2\lambda l n}$$

y

$$V_0(r, z) = \frac{I\rho_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k^n e^{-\lambda(2nl+z)} J_0(\lambda r)\, d\lambda +$$

$$+ \frac{I\rho_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} k^n e^{-\lambda(2nl-z)} J_0(\lambda r)\, d\lambda. \qquad (9')$$

De aquí, aplicando la fórmula (8), se obtiene:

$$V_0(r, z) =$$

$$= \frac{I\rho_0}{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - 2nl)^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} k^n \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + 2nl)^2}} \right]. \qquad (10)$$

Esta expresión para la solución (9) se puede escribir directamente, si se resuelve el problema por el método de las imágenes. Haciendo $z = 0$, se obtiene la distribución del potencial en la superficie de la tierra:

$$V_0(r, 0) = \frac{I\rho_0}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{r^2 + (2nl)^2}} \right], \qquad (11)$$

de donde

$$\frac{\partial V_0}{\partial r} = -\frac{I\rho_0}{2\pi} \left[\frac{1}{r^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n r}{[r^2 + (2nl)^2]^{3/2}} \right],$$

y para ρ_a, según la fórmula (4), se tiene:

$$\rho_a = \rho_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n r^3}{[r^2 + (2nl)^2]^{3/2}} \right] =$$

$$= \rho_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n \left(\frac{\xi}{2}\right)^3}{\left[\left(\frac{\xi}{2}\right)^2 + n^2\right]^{3/2}} \right] = \rho_0 f(\xi), \qquad (12)$$

donde $\xi = \frac{r}{l}$, y $f(\xi)$ denota la expresión entre corchetes. Para $r \ll l$, se tiene que

$$\rho_a \cong \rho_0.$$

Para apreciar el comportamiento de ρ_a para r grandes, hagamos tender en la fórmula (12) $r \to \infty$ ($\xi \to \infty$). En límite del n-ésimo término de la suma será igual a k^n, de donde se desprende que

$$\lim_{r\to\infty} \rho_a = \rho_0 \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} k^n\right) = \rho_0 \left(1 + \frac{2k}{1-k}\right) =$$

$$= \rho_0 \frac{1+k}{1-k} = \rho_0 \frac{\rho_1 + \rho_0 + (\rho_1 - \rho_0)}{\rho_1 + \rho_0 - (\rho_1 - \rho_0)} = \rho_1.$$

Comparando la curva experimental con la determinada por la fórmula (12), se puede determinar ρ_0 a partir de los valores de ρ_a para valores pequeños de r, y ρ_1, para valores grandes de r. La potencia de la capa conductora superior l se determina mediante pruebas. Esta es igual al valor de l, para el cual la curva empírica, como función $\rho(\xi) = \rho\left(\frac{r}{l}\right)$, se aproxime más a la curva calculada por la fórmula (12). En la técnica de la elección, que se efectúa mediante escalas bilogarítmicas, no nos vamos a detener[1]).

En el caso de cortes de varias capas, las curvas para ρ_a se calculan análogamente. El carácter del corte eléctrico del medio se determina probando las curvas teóricas que se aproximen más a la empírica. Al aumentar el número de capas, la técnica de la interpretación se complica mucho, puesto que el número de curvas teóricas auxiliares aumenta grandemente.

Obsérvese que para cortes eléctricos diferentes, $\rho_1(z) \neq \rho_2(z)$, las resistencias aparentes respectivas también son distintas:

$$\rho_k^{(1)}(r) \neq \rho_k^{(2)}(r);$$

por consiguiente, el problema de la determinación del corte eléctrico a partir de la resistencia aparente tiene una solución única desde el punto de vista matemático[2]).

En distintas ramas de la física y de la técnica, se encuentran problemas análogos al problema considerado de la exploración eléctrica.

---

[1]) Véase, por ejemplo, el excelente libro de A. I. Zaborovski *«Exploración Eléctrica»*, 1943.

[2]) Véase A. N. Tíjonov, *Sobre la unicidad de la solución del problema de la exploración eléctrica*, DAN URSS, t. 69, № 6, 797 (1949).

Con problemas electrostáticos nos encontramos en la construcción de distintos aparatos electrónicos, con problemas térmicos e hidrodinámicos, en muchos campos de la técnica (desprendimiento de calor de los edificios, filtración del agua debajo de un dique, etc.)[1]).

Los problemas de determinación de un campo magnético en un medio no homogéneo se encuentran, por ejemplo, en la defectoscopía magnética. Para la determinación del defecto en un detalle, por ejemplo, la presencia de vacíos debajo de la superficie, se ubica el detalle metálico entre los polos de un imán y se mide el campo magnético en la superficie del detalle. Se pide determinar, a partir de la perturbación del campo magnético, la presencia del defecto, así como también, si es posible, las dimensiones de éste, su profundidad, etc.

Para la resolución de los problemas, se utilizan los métodos de modelación, basados en la semejanza de los campos potenciales de distinta naturaleza física[2]).

En efecto, consideremos los campos potenciales en medios no homogéneos de diferente naturaleza física (por ejemplo, un campo estacionario de temperaturas, un campo magnético en un medio no homogéneo, un campo electrostático, el campo de velocidades de un líquido en una filtración). Las funciones potenciales de estos campos, $u(x, y, z)$, satisfacen a la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ en cada región homogénea. En la frontera de las regiones G_1 y G_2 de distintos coeficientes de conductividad térmica, permeabilidad magnética, etc., se cumple la condición

$$k_1 \frac{\partial u^{(1)}}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u^{(2)}}{\partial n},$$

donde k_1 y k_2 son las constantes físicas correspondientes.

Supongamos que en las fronteras de regiones geométricas iguales están dados valores numéricamente iguales de los potenciales, o de sus derivadas normales, de distintos campos físicos. Supongamos que las heterogeneidades físicas de estas regiones son iguales geométricamente y están distribuidas de igual modo; que los cocientes de las constantes físicas (conductividades térmicas, permeabilidades magnéticas, etc.) de cualquier par de heterogeneidades correspondientes son también iguales. Entonces,

---

[1]) Véase N. N. Pavlovski, *Teoría del movimiento de las aguas del terreno debajo de las construcciones hidrotécnicas y sus aplicaciones fundamentales*, 1922, cap. XIV.

[2]) Véase A. V. Lukiánov, *Sobre la modelación electrolítica de los problemas espaciales*, DAN URSS t. 75, № 5 (1950).

los valores numéricos de los potenciales de estos campos en los puntos interiores correspondientes serán también iguales, puesto que son soluciones de un mismo problema matemático, que posee solución única.

IV. DETERMINACION DE LOS CAMPOS VECTORIALES

Conjuntamente con los problemas escalares, en muchas cuestiones de la electro e hidrodinámica se encuentran con frecuencia problemas sobre la determinación de un campo vectorial a partir de su rotacional y de su divergencia.

Demostremos que el campo vectorial A está determinado unívocamente, dentro de cierta región G, delimitada por la superficie cerrada S, si se dan el rotacional y la divergencia del campo dentro de G:

$$\operatorname{rot} A = B, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} A = C, \tag{2}$$

y en la frontera S se da la componente normal del vector A:

$$A_n|_S = f(M). \tag{3}$$

Obsérvese que las funciones B, C y f no se pueden fijar arbitrariamente. Deben cumplirse las relaciones

$$\operatorname{div} B = 0, \tag{4}$$

$$\iint_S f(M)\, dS = \iiint_G C\, d\tau. \tag{5}$$

La funcion f se considerará continua en la superficie S, las funciones B y C, continuas en G conjuntamente con sus derivadas, y la superficie S tal que para ésta tenga solución el segundo problema interior de contorno para valores de frontera continuos.

Resolveremos el problema planteado en varias etapas. Hallemos el vector A_1 que satisfaga a las condiciones

$$\operatorname{rot} A_1 = 0, \tag{6}$$

$$\operatorname{div} A_1 = C. \tag{7}$$

De la fórmula (6) se deduce que

$$A_1 = \operatorname{grad} \varphi. \tag{8}$$

Tomando la función φ en la forma

$$\varphi(P) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_G \frac{C(Q)}{R_{PQ}}\, d\tau_Q, \tag{9}$$

satisfaremos también a la ecuación (7). Hallemos ahora un vector A_2 tal que

$$\operatorname{rot} A_2 = B, \tag{10}$$

$$\operatorname{div} A_2 = 0. \tag{11}$$

Haciendo

$$A_2 = \text{rot}\,\psi, \tag{12}$$

se satisface a la condición (11). Sustituyendo (12) en (10), se obtiene:

$$\text{grad div}\,\psi - \Delta\psi = B. \tag{13}$$

Hagamos que se cumpla

$$\text{div}\,\psi = 0. \tag{14}$$

Entonces, la ecuación (13), para el vector ψ, tomará la forma

$$\Delta\psi = -B. \tag{15}$$

Consideremos la región G_1 que contiene enteramente a la G y está delimitada por la superficie S_1.

Continuemos el vector B a la región $G_1 - G$, exigiendo que se cumplan las condiciones:

1) la componente normal B_n del vector B es continua en la frontera S (el propio vector B es, en general, dicontinuo), $B_{ni} = B_{ne}$;

2) $$B_n = 0 \text{ en } S_1; \tag{16}$$

3) $$\text{div}\,B = 0 \text{ en } G_1 - G. \tag{4'}$$

Indiquemos cómo efectuar esta continuación de B a la región $G_1 - G$. Hagamos

$$B = \text{grad}\,\chi \text{ en } G_1 - G.$$

La condición $\text{div}\,B = 0$ nos da

$$\Delta\chi = 0 \text{ en } G_1 - G. \tag{17}$$

Las condiciones de frontera, en virtud de 1) y 2), tienen la forma

$$\frac{\partial\chi}{\partial n} = B_{ni} \quad \text{en} \quad S; \tag{17'}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial n} = 0 \quad \text{en} \quad S_1, \tag{17''}$$

donde B_{ni} es el valor límite de B_n por el lado interior de S. Para la función χ se obtiene el segundo problema de contorno (17)—(17''). La condición necesaria para que este problema tenga solución

$$\iint_{S+S_1} \frac{\partial\chi}{\partial n}\,dS = \iint_S B_n\,dS = 0$$

se cumple, puesto que

$$\iint_S B_n\,dS = \iiint_G \operatorname{div} B\,d\tau = 0.$$

Haciendo

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{G_1} \frac{B(Q)}{R_{PQ}}\,d\tau_Q,$$

$P = P(x, y, z)$, $Q = Q(\xi, \eta, \zeta)$, $R_{PQ} =$
$= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ satisfaremos, evidentemente, a la ecuación (15).

No es difícil comprobar que la condición (14) también se cumple. Efectivamente, calculemos las derivadas

$$\frac{\partial\psi_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi_z}{\partial z}.$$

Representando la integral por la región G_1 como la suma de las integrales sobre G y $G_1 - G$ y teniendo en cuenta la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial x}\iiint \frac{B_x}{R}\,d\tau = \iiint B_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)d\tau = -\iiint B_x \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right)d\tau,$$

tendremos, después de integrar por partes:

$$\frac{\partial}{\partial x}\iiint_G \frac{B_x}{R}\,d\tau = \iiint_G \frac{\partial B_x}{\partial \xi}\frac{1}{R}\,d\tau - \iint_S B_{xi}\frac{\cos\alpha}{R}\,dS,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\iiint_{G_1-G} \frac{B_x}{R}\,d\tau = \iiint_{G_1-G} \frac{\partial B_x}{\partial \xi}\frac{1}{R}\,d\tau + \iint_S B_{xe}\frac{\cos\alpha}{R}\,dS -$$

$$- \iint_{S_1} B_x \frac{\cos\alpha_1}{R}\,dS,$$

donde $\cos\alpha = \cos(n, x)|_S$, $\cos\alpha_1 = \cos(n, x)|_{S_1}$, y n es la dirección de la normal exterior a la superficie.

Para $\dfrac{\partial\psi_x}{\partial x}$, se obtiene:

$$\frac{\partial\psi_x}{\partial x} = \frac{1}{4\pi}\iiint_{G_1} \frac{\partial B_x}{\partial \xi}\frac{1}{R}\,d\tau + \frac{1}{4\pi}\iint_S \frac{B_{xe} - B_{xi}}{R}\cos\alpha\,dS -$$

$$- \frac{1}{4\pi}\iint_{S_1} B_x \frac{\cos\alpha_1}{R}\,dS.$$

Expresiones análogas tienen lugar para las derivadas

$$\frac{\partial\psi_y}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\psi_z}{\partial z}.$$

De aquí se deduce que

$$\operatorname{div} \psi = \frac{1}{4\pi} \iiint_{G_1} \frac{\operatorname{div} B}{R} d\tau - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{B_n}{R} dS + \frac{1}{4\pi} \iint_{S} \frac{B_{ne} - B_{ni}}{R} dS.$$

En virtud de las condiciones (4) y (16), así como también de la continuidad de las componentes normales del vector B en S ($B_{ni} = B_{ne}$), el vector A_2, determinado mediante la fórmula (12), satisface a la ecuación (10), si el vector ψ satisface a las condiciones (14) y (15).

Está claro que el vector $A_1 + A_2$ satisface a las condiciones

$$\operatorname{rot}(A_1 + A_2) = B, \tag{18}$$

$$\operatorname{div}(A_1 + A_2) = C. \tag{19}$$

Para hallar el vector A, nos queda satisfacer a la condición de frontera (2). Para esto, hallemos el vector A_3 que satisface a las condiciones dentro de G:

$$\operatorname{rot} A_3 = 0, \tag{20}$$

$$\operatorname{div} A_3 = 0, \tag{21}$$

y en S:

$$A_n |_S = f(M) - A_{1n} |_S - A_{2n} |_S = f^*(M). \tag{22}$$

Está claro que la función $f^*(M)$ se determina unívocamente. De la ecuación (20) se deduce que

$$A_3 = \operatorname{grad} \theta.$$

Sustituyendo este valor de A_3 en la ecuación (21), se obtiene, dentro de G:

$$\Delta\theta = 0; \tag{23}$$

la condición (22) nos da:

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial n}\right|_S = f^*(M), \tag{24}$$

es decir, para hallar la función θ se obtuvo el segundo problema de contorno. Por esto, el vector A_3 se determina unívocamente.

De esta forma, se ha demostrado que el problema (1)—(3) tiene la solución única

$$A = A_1 + A_2 + A_3.$$

V. APLICACION DEL METODO DE LA TRANSFORMACION CONFORME A LA ELECTROSTATICA

1. Para la resolución de los problemas electrostáticos bidimensionales, con frecuencia se aplica la teoría de funciones de variable compleja. Consideremos, por ejemplo, el siguiente problema de la electrostática:

hallar el campo eléctrico de varios conductores cargados, cuyos potenciales son iguales a u_1, u_2, ...

Este problema, como es sabido (véase el apéndice II), conduce a la ecuación

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

con las condiciones de frontera

$$u\,|_{S_i} = u_i, \tag{2}$$

donde S_i denota la superficie del conductor de número i. Si el campo se puede considerar plano, que no cambia, por ejemplo, a lo largo del eje z, la ecuación (1) y las condiciones de frontera toman la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

$$u\,|_{C_i} = u_i, \tag{4}$$

donde C_i es el contorno que limita a la región S_i.

Buscaremos el potencial u como la parte imaginaria de cierta función analítica:

$$f(z) = v(x,\ y) + iu(x,\ y) \quad (z = x + iy), \tag{5}$$

siendo, en virtud de las condiciones de Cauchy-Riemann

$$v_x = u_y, \quad v_y = -u_x \tag{6}$$

y

$$v_x v_y + u_x u_y = 0. \tag{7}$$

De la condición de frontera (4), se deduce que la función $f(z)$ debe tener parte imaginaria constante en los contornos C_i, que limitan a nuestros conductores.

Tomando la condición (6), se ve que

$$v(x,\ y) = \text{const} \tag{8}$$

representa la ecuación de la familia de las líneas de fuerza[1]), mientras que la ecuación

$$u(x,\ y) = \text{const} \tag{9}$$

---

[1]) En efecto, la ecuación de las líneas de fuerza tiene la forma $\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$. Sustituyendo u_x y u_y, de acuerdo con las condiciones (6), por $-v_y$ y v_x, se obtiene $v_x dx + v_y dy = dv = 0$, o bien $v(x,\ y) = \text{const}$.

determina, en virtud de la condición (7), la familia de líneas equipotenciales.

De esta manera, para resolver el problema planteado es suficiente hallar la transformación conforme

$$w = f(z)$$

que transforme el plano de la variable compleja

$$z = x + iy$$

en el plano

$$w = v + iu,$$

bajo la cual las fronteras de los conductores se transformen en las rectas

$$u = \text{const},$$

o bien

$$\operatorname{Im} w = \text{const}.$$

Si se conoce esta función $w = f(z)$, el potencial buscado se halla por la fórmula

$$u = u(x, y) = \operatorname{Im} f(z).$$

Conociendo el potencial, se puede calcular el campo eléctrico:

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{10}$$

y la densidad de las cargas superficiales para la unidad de longitud sobre el eje z:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{4\pi}\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2},$$

la cual, en virtud de las condiciones de Cauchy-Riemann, es igual a

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}|f'(z)|. \tag{11}$$

2. Campo de un condensador plano semiinfinito. Hallemos el campo de un condensador formado por las chapas metálicas infinitamente delgadas $y = -\frac{d}{2}$ e $y = \frac{d}{2}$, que se extienden a la región $x < 0$. Sin detenernos en la deducción de la transformación conforme que transforme la región representada en la fig. 68 en

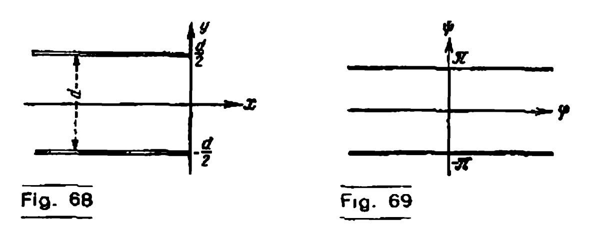


Fig. 68

Fig. 69

la capa $|\operatorname{Im} w| \leqslant \pi$, la aplicaremos directamente a la resolución del problema indicado[1]).

La transformación

$$z = \frac{d}{2\pi}(w + e^{w}) \qquad (w = \varphi + i\psi) \tag{12}$$

traduce el plano $z = x + iy$ con dos cortes $\left(y = \pm\frac{d}{2}, x < 0\right)$ a la capa $|\psi| \leqslant \pi$ del plano $w = \varphi + i\psi$ (fig. 69). Como potencial complejo, tomaremos la función

$$\frac{u_0}{2\pi} w, \tag{13}$$

donde u_0 denota la diferencia de potenciales entre las placas del condensador, de forma que el potencial del campo eléctrico se expresa mediante la función

$$u(x, y) = \frac{u_0}{2\pi}\psi, \tag{14}$$

donde ψ está ligado a x e y mediante las relaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{d}{2\pi}(\varphi + e^{\varphi}\cos\psi), \\ y &= \frac{d}{2\pi}(\psi + e^{\varphi}\operatorname{sen}\psi). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

En la fig. 70 se representan las líneas equipotenciales y las de fuerza del condensador plano infinito.

Pasemos al análisis del campo en las proximidades del extremo del condensador.

[1]) Véase F. Frank y R. Mises, *Ecuaciones Diferenciales e Integrales de la Física matemática*, t. II, cap. XV, § 5, 1937.

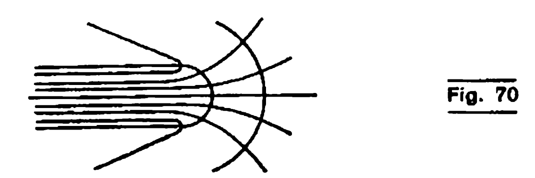


Fig. 70

De las fórmulas (15) se aprecia que para $\varphi \to -\infty$, será

$$x \approx \frac{d}{2\pi}\varphi, \quad y \approx \frac{d}{2\pi}\psi, \tag{16}$$

es decir, dentro del condensador, lejos de los extremos, el campo es plano, y cuando $\varphi \to \infty$, se tendrá que

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \approx \frac{d}{2\pi}e^{\varphi}, \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \approx \psi, \tag{17}$$

es decir, fuera del condensador, a grandes distancias de sus extremos, las líneas equipotenciales son círculos.

Si en lugar de w se introduce el potencial complejo $f = \frac{u_0}{2\pi}w$, de modo que $w = \frac{2\pi}{u_0}f$, entonces la relación entre z y $f(z)$ se expresa por la ecuación

$$z = d\left(\frac{f}{u_0} + \frac{1}{2\pi}e^{\frac{2\pi f}{u_0}}\right),$$

de donde se deduce que

$$\frac{dz}{df} = \frac{d}{u_0}\left(1 + e^{\frac{2\pi f}{u_0}}\right),$$

y para $f = \frac{u_0}{2\pi}(\varphi \pm \pi i)$, se obtiene:

$$\frac{dz}{df} = \frac{d}{u_0}(1 - e^{\varphi}), \quad \text{o bien} \quad f'(z) = \frac{u_0}{d(1 - e^{\varphi})}.$$

Haciendo $u_0 = 1$, se obtiene, para la densidad de las cargas σ, de acuerdo con la fórmula (11), el siguiente valor:

$$\sigma = \frac{|f'(z)|}{4\pi} = \frac{1}{4\pi d\,|1 - e^{\varphi}|}. \tag{18}$$

De aquí se deduce que para $\varphi \to -\infty$, es $\sigma \approx \frac{1}{4\pi d}$, y para $\varphi \to$ $\to +\infty$, será $\sigma \approx \frac{1}{4\pi d e^{\varphi}}$, es decir, en este caso la densidad de las cargas disminuye en el lado exterior de las placas como $\frac{1}{\rho}$.

De la fórmula (18) se observa que para $\varphi = 0$ (en el borde del condensador) es $\sigma = \infty$. En efecto, el extremo de una placa plana tiene curvatura infinita, y para cargarlo hasta cierto potencial es necesario darle una carga infinita.

La clase de problemas que se resuelven por el método de la transformación conforme es muy amplia. Con su ayuda se puede resolver con éxito el problema sobre la influencia del borde de la pared gruesa de un condensador plano, varios problemas relacionados con la influencia de las inflexiones en un condensador, etc. La transformación conforme se puede aplicar también al cálculo de problemas dinámicos. El defecto del método expuesto consiste en que la transformación conforme se aplica fundamentalmente sólo a los problemas planos, que se reducen a la ecuación bidimensional $\Delta_2 u = 0$.

VI. APLICACION DEL METODO DE LA TRANSFORMACION CONFORME A LA HIDRODINAMICA

1. En la resolución de problemas sobre el **movimiento de un cuerpo rígido en un líquido**, juegan un papel fundamental las condiciones de frontera en la superficie del cuerpo.

En el caso de un líquido ideal, la condición de frontera consiste en que la proyección v_n de la velocidad del líquido en la dirección de la normal a la superficie del cuerpo debe ser igual a la componente normal de la velocidad del movimiento del cuerpo.

Si el cuerpo está inmóvil, la condición de frontera toma la forma sencilla

$$v_n = 0$$

en la superficie del cuerpo.

Si el movimiento considerado es potencial, es decir, si

$$v = \operatorname{grad} \varphi,$$

las condiciones de frontera toman la forma

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = 0, \quad \text{en el caso de un cuerpo inmóvil,}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = u_n, \quad \text{en el caso de un cuerpo que se mueve con la velocidad } u.$$

Como es sabido de la hidrodinámica, el potencial de las velocidades, para un líquido incompresible, satisface a la ecuación

$$\Delta\varphi = 0.$$

De esta manera, el problema sobre la circundación potencial de un cuerpo rígido por una corriente de líquido ideal incompresible, se reduce a la resolución de la ecuación de Laplace

$$\Delta\varphi = 0$$

con la condición de frontera complementaria en la superficie del cuerpo que se circunda

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = u_n,$$

es decir, a la resolución del segundo problema de contorno para la ecuación de Laplace.

Si el movimiento considerado es plano, la solución del problema se puede obtener mediante la teoría de las funciones de variable compleja.

En el caso del movimiento plano de un líquido incompresible, la ecuación de continuidad nos da:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial(-v_y)}{\partial y}. \qquad (1)$$

Escribamos la ecuación de las líneas de corriente:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

en la forma

$$v_x\,dy - v_y\,dx = 0 \qquad (2)$$

e introduzcamos una función ψ mediante las relaciones

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \qquad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Entonces, de la ecuación (1) se sigue que el primer miembro de la expresión (2) es la diferencial total de la función ψ:

$$v_x\,dy - v_y\,dx = d\psi.$$

La familia monoparamétrica de curvas

$$\psi(x, y) = C$$

representa las líneas de corriente del líquido incompresible.

Si existe el potencial de las velocidades, la igualdad rot $v = 0$ es equivalente a la ecuación

$$\Delta\psi = 0.$$

De la expresión para v_x y v_y se deduce que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

es decir, las funciones φ y ψ satisfacen a las condiciones de Cauchy-Riemann. Por consiguiente, la función de variable compleja

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

es analítica.

De este modo, cualquier movimiento plano potencial de un líquido corresponde a una función analítica de variable compleja determinada y, recíprocamente, toda función analítica está relacionada con un cuadro cinemático determinado de movimiento de un líquido (más exactamente, con dos cuadros, puesto que las funciones φ y ψ se pueden intercambiar).

Consideremos ejemplos concretos de aplicación de la teoría de las funciones analíticas a la resolución de problemas sobre la circundación de cuerpos por una corriente plana de líquido.

2. **Circundación de un cilindro circular.** Supongamos que un cilindro de radio $r = a$ es rodeado por una corriente de líquido, que tiene una velocidad constante u en el infinito. En el caso de un movimiento estacionario, el problema se puede invertir y considerar el movimiento de un cilindro con velocidad constante u con respecto al líquido.

Fijemos al cilindro un sistema inmóvil de coordenadas y dirijamos el eje Ox paralelamente a la velocidad del movimiento del cilindro.

En la superficie del cuerpo que se mueve en el líquido, evidentemente, se cumple la condición de frontera

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = u\frac{\partial y}{\partial s},$$

donde ds es el elemento de arco en el contorno que delimita al cuerpo.

En el caso de una traslación con velocidad u, esta condición se puede integrar por la superficie del cuerpo, y se obtiene:

$$\psi = uy + C$$

en la superficie del cuerpo.

De esta manera, el problema se redujo a la resolucion de la ecuación

$$\Delta\psi = 0$$

con las condiciones de frontera:

1) $\psi = uy + C$ en la superficie del cilindro,

2) $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ y $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ tienden a cero en el infinito.

La última condición significa que la función

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_x - iv_y$$

es una función analítica uniforme fuera del círculo C, que se anula en el infinito. Esto permite representar a w en la forma

$$w = C_1 \ln z - \frac{C_2}{z} - \frac{C_3}{z^2} + \ldots$$

Haciendo

$$C_k = A_k + iB_k,$$

se determinan las constantes A_k y B_k de la condición de frontera

$$\psi = ua \operatorname{sen} \theta + C,$$

pasando a las coordenadas polares $z = ae^{i\theta}$.

Para las constantes, se obtienen las expresiones

$$A_1 = 0;\ A_2 = ua^2;\ B_2 = 0;\ A_3 = B_3 = 0;$$

$$B_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi}.$$

De aquí será

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - u\frac{a^2}{z};$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta - u\cos\theta\frac{a^2}{r};$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r + u \operatorname{sen}\theta\frac{a^2}{r}.$$

El primer término de la expresión para w expresa la circulación alrededor del cilindro, de intensidad Γ. En el caso más sencillo

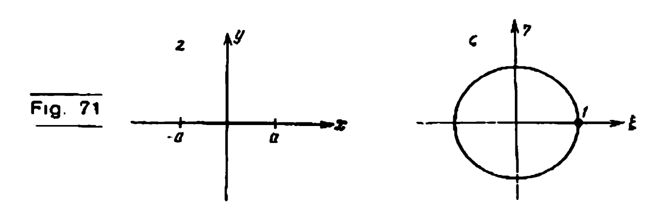


Fig. 71

de ausencia de circulación, se obtiene

$$w = -u\frac{a^2}{z}.$$

El potencial complejo para la corriente que circunda a un cilindro inmóvil y que tiene en el infinito la velocidad u, tiene la forma

$$w = uz + \frac{ua^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z.$$

3. **Circundación de una placa.** Los resultados obtenidos para la circundación de un cilindro circular permiten resolver problemas sobre la circundación de contornos arbitrarios. En estos casos, se aplica el método de la transformación conforme. Analicemos su aplicación en el problema concreto sobre la circundación de una placa.

Supongamos que una chapa infinitamente larga de espesor $2a$, situada en el eje Ox (fig. 71), es rodeada por una corriente plana constante, que tiene en el infinito una velocidad de componentes u y v. Mediante la función analítica

$$z = \frac{a}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) = f(\zeta),$$

se puede establecer una correspondencia biunívoca entre la región fuera de la placa en el plano z y la región fuera del círculo de radio unitario en el plano ζ. Aquí, al punto $z = \infty$ le corresponderá el $\zeta = \infty$, y

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{a}{2} > 0 \quad \text{para} \quad \zeta = \infty.$$

Veamos cómo cambia la condición en el infinito. Para el potencial complejo

$$w(z) = \varphi + i\psi,$$

se tiene

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\infty}=u-iv=\bar{v}_{\infty},$$

que es el valor conjugado de la velocidad compleja.

Hallemos el valor de la velocidad compleja de la corriente ficticia en el plano ζ:

$$w(\zeta)=w[f(z)];\qquad \frac{dw}{d\zeta}=\frac{dw}{dz}\cdot\frac{dz}{d\zeta},$$

de donde

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)_{\zeta=\infty}=k\bar{v}_{\infty}\qquad\left(k=\frac{a}{2}\right).$$

De este modo, la corriente ficticia representa la circundación de un cilindro de radio unitario por una corriente, que tiene en el infinito la velocidad compleja kv_{∞}. Para este movimiento, el potencial complejo tiene la forma

$$w(\zeta)=k\bar{v}_{\infty}\zeta+\frac{kv_{\infty}}{\zeta}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\zeta.$$

De la relación $z=f(\zeta)$, se deduce que

$$\zeta=\frac{z+\sqrt{z^2-a^2}}{a};\quad \frac{1}{\zeta}=\frac{z-\sqrt{z^2-a^2}}{a}$$

Utilizando estas igualdades, se obtiene la expresión

$$w(z)=uz-iv\sqrt{z^2-a^2}+\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\left(\frac{z+\sqrt{z^2-a^2}}{a}\right)$$

para el potencial complejo del líquido que circunda a una placa. Si no hay circulación, esta expresión toma la forma

$$w(z)=uz-iv\sqrt{z^2-a^2}.$$

De las fórmulas obtenidas, se ve que la velocidad en los extremos de la placa alcanza valores infinitamente grandes. En las condiciones reales esto, claro está, no tiene lugar. Nuestros resultados se explican por el hecho de que consideramos al líquido como ideal. Aplicando el teorema de Bernoulli, se puede hallar la expresión para la fuerza que actúa sobre el cuerpo circundado por un líquido.

La teoría aerodinámica del ala trata del estudio de las fuerzas con que el aire actúa sobre el ala de un avión que se mueve dentro de éste. Un papel fundamental en el desarrollo de esta teoría pertenece a los científicos rusos y soviéticos, en primer lugar, a N. E. Zukovski y S. A. Chapliguin. En el caso más sencillo de circundación de un cilindro sin circulación por una corriente plana de líquido, se obtiene un resultado paradójico: la corriente no ejerce ninguna acción sobre el cilindro. Si la circulación de la velocidad alrededor del cilindro no es nula, surge una fuerza que actúa sobre éste perpendicularmente a la dirección de la velocidad de la corriente en el infinito.

La teoría de las funciones analíticas se puede aplicar sólo en el caso de un movimiento plano. En el caso tridimensional, hay que recurrir a otros métodos de resolución del problema sobre la circundación de un cuerpo rígido por un líquido. En el caso general, la resolución del problema presenta grandes dificultades. Consideremos el caso más sencillo del movimiento de una esfera en un líquido ilimitado en reposo, con velocidad constante. El problema consiste en resolver la ecuación

$$\Delta\varphi = 0$$

fuera de la esfera, con la condición de frontera

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{r=a} = u\cos\theta$$

en la superficie de la esfera y

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

en el infinito.

Buscaremos la solución en la forma

$$\varphi = A\frac{\cos\theta}{r^2}.$$

Utilizando la condición de frontera, se obtiene:

$$\varphi = -\frac{ua^3}{2r^2}\cos\theta,$$

lo que da la solución del problema planteado.

En todos los casos analizados hemos considerado que el líquido era ideal. Para un líquido viscoso, las condiciones de frontera cambian. En la superficie del cuerpo debe cumplirse la

condición de adherencia, a saber: en los puntos de la frontera sólida, la velocidad del líquido debe coincidir en magnitud y dirección con la velocidad del punto correspondiente de la frontera.

El problema de la circundación de cuerpos por un líquido viscoso conduce a grandes dificultades matemáticas. Un gran papel en el desarrollo de esta rama de la hidrodinámica lo jugaron las teorías de la capa de frontera.

VII. ECUACION BIARMONICA

En el apéndice I del capítulo II, fue obtenida la ecuación de las oscilaciones transversales de una barra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \tag{1}$$

El problema de las oscilaciones de una placa delgada, libre de cargas y fija en sus extremos, nos conduce también a la ecuación análoga[1])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) = 0, \text{ o bien } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \Delta \Delta u = 0 \tag{2}$$

y a las condiciones de frontera

$$u = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ en la frontera.} \tag{3}$$

Además, la función u debe satisfacer a las condiciones iniciales

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y). \tag{4}$$

Si sobre la placa actúa una fuerza exterior, distribuida con densidad $f(x, y)$, la flexión estática de una placa fija en sus extremos se determinará mediante la ecuación

$$\Delta \Delta u = f \tag{5}$$

con las condiciones de frontera

$$u = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0. \tag{3}$$

---

[1]) Véase V. I. Smirnov, «*Curso de Matemáticas Superiores*», t. III, ed. Gostejizdat, 1956.

La ecuación

$$\Delta\Delta u = 0 \qquad (5')$$

se llama *biarmónica*, y sus soluciones que poseen derivadas de hasta cuarto orden inclusive, se llaman *funciones biarmónicas*.

El problema fundamental de contorno para la ecuación biarmónica se plantea del siguiente modo:

hallar la función $u(x, y)$, continua conjuntamente con su derivada primera en la región cerrada $S + C$, que tenga derivadas de hasta cuarto orden en S, que satisfaga a la ecuación (5) ó (5′) dentro de S y a las condiciones de frontera en C

$$u|_C = g(s); \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = h(s), \qquad (6)$$

donde $g(s)$ y $h(s)$ son funciones continuas del arco s.

Al resolver el problema (2)—(4) que formulamos antes, con condiciones iniciales, por el método de separación de las variables se hace, como de costumbre,

$$u(x, y, t) = v(x, y)\, T(t). \qquad (7)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2) y separando las variables, se obtiene el problema de la determinación de los valores propios de la ecuación

$$\Delta\Delta v - \lambda v = 0 \qquad (8)$$

con las **condiciones de frontera**

$$v = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{en} \quad C. \qquad (9)$$

1. Unicidad de la solución. Demostremos que **la ecuación biarmónica**

$$\Delta\Delta u = 0$$

con las condiciones de frontera

$$u|_C = g(s), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = h(s) \qquad (3')$$

tiene solución única.

Supongamos que existen dos soluciones u_1 y u_2. Consideremos su diferencia

$$v = u_1 - u_2.$$

La función v satisface a la ecuación biarmónica (5′) y a las condiciones de frontera homogéneas

$$v|_C = 0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_C = 0.$$

Aplicando la fórmula de Green

$$\int_G (\Delta\varphi\cdot\psi - \varphi\,\Delta\psi)\,dS = \int_C \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)ds$$

a las funciones $\varphi = v$, $\psi = \Delta v$, se obtiene:

$$\int_G (\Delta v)^2\,dS = 0,$$

de donde

$$\Delta v = 0.$$

Teniendo en cuenta que $v|_C = 0$, se obtiene

$$v \equiv 0 \text{ y } u_1 \equiv u_2.$$

Por lo tanto, la función biarmónica se determina unívocamente por las condiciones de frontera (3′).

2. **Representación de las funciones biarmónicas mediante las armónicas.** Demostremos el siguiente teorema:

si u_1 y u_2 son dos funciones armónicas en cierta región G, la función $u = xu_1 + u_2$ es biarmónica en la región G.

Para demostrarlo, apliquemos la identidad

$$\Delta(\varphi\psi) = \varphi\,\Delta\psi + \psi\,\Delta\varphi + 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right). \tag{10}$$

Haciendo

$$\varphi = x, \quad \psi = u_1,$$

se halla:

$$\Delta(xu_1) = 2\frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{11}$$

Aplicando nuevamente el operador Δ, teniendo en cuenta que $\Delta\Delta u_2 = 0$, se obtiene:

$$\Delta\Delta(xu_1 + u_2) = 0.$$

Si la región G es tal que una recta paralela al eje x corta a su frontera en no más de dos puntos, tiene lugar el siguiente teorema recíproco:

para cualquier función biarmónica u, dada en la región G, existen dos funciones armónicas u_1 y u_2, tales que

$$u = xu_1 + u_2.$$

Para demostrar esta afirmación, evidentemente, es suficiente establecer la posibilidad de determinar una función u_1 que satisfaga a las dos condiciones

$$\Delta u_1 = 0 \tag{12}$$

y

$$\Delta (u - x u_1) = 0. \tag{13}$$

De la condición (13) y la fórmula (11), se deduce que

$$\Delta u = \Delta (x u_1) = 2 \frac{\partial u_1}{\partial x}. \tag{14}$$

La ecuación (14) se satisface por la función

$$\bar{u}_1 (x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{2} \Delta u (\xi, y) \, d\xi.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \bar{u}_1 = \Delta \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}_1 = \frac{1}{2} \Delta \Delta u = 0,$$

$\Delta \bar{u}_1$ depende solamente de y:

$$\Delta \bar{u}_1 = v (y).$$

Determinemos la función $\bar{\bar{u}}_1 (y)$ de forma que sea

$$\Delta \bar{\bar{u}}_1 = \frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}_1}{\partial y^2} = - v (y),$$

y hagamos

$$u_1 = \bar{u}_1 + \bar{\bar{u}}_1.$$

Esta función satisfará, evidentemente, a ambas condiciones, (12) y (13).

Consideremos otro tipo de representación de las funciones biarmónicas. Supongamos que el origen de coordenadas se tomó dentro de la región G, y que cualquier semirrecta que sale del origen corta a la frontera de la región G en un punto. Entonces, **cualquier función u biarmónica en G puede ser representada mediante dos funciones armónicas u_1 y u_2 en la forma**

$$u = (r^2 - r_0^2) \, u_1 + u_2. \tag{15}$$

Aquí $r^2 = x^2 + y^2$, y r_0 es una constante dada.

Esto se demuestra análogamente al razonamiento anterior, mediante la identidad (10) y las relaciones

$$\Delta r^2 = 4; \qquad \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}.$$

3. Resolución de la ecuación biarmónica para el círculo. Consideremos un círculo de radio r_0 con centro en el origen de coordenadas, y buscaremos la función biarmónica que satisfaga, para $r = r_0$, a las condiciones de frontera (6). Como fue demostrado más arriba, la función buscada se puede representar en forma de la suma

$$u = (r^2 - r_0^2)\, u_1 + u_2, \tag{15}$$

donde u_1 y u_2 son funciones armónicas. De las condiciones de frontera se halla:

$$u_2|_{r=r_0} = g.$$

De aquí se ve que u_2 es la solución del primer problema de contorno para la ecuación de Laplace y puede ser representada mediante la integral de Poisson

$$u_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)\, g\, d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)}. \tag{17}$$

De la segunda condición de frontera, se obtiene:

$$2r_0 u_1 + \left.\frac{\partial u_2}{\partial r}\right|_{r=r_0} = h. \tag{18}$$

No es difícil demostrar, mediante derivación directa, que la función

$$2r_0 u_1 + \frac{r}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial r} \tag{19}$$

satisface a la ecuación de Laplace y, por esto, puede ser expresada por la integral de Poisson

$$2r_0 u_1 + \frac{r}{r_0} \frac{\partial u_2}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)\, h\, d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)}. \tag{20}$$

Derivando (17) con respecto a r y sustituyendo el valor de $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ en la fórmula (20), se halla u_1. Sustituyendo en la fórmula (15) u_1 y u_2 por sus expresiones, se obtiene:

$$u = \frac{1}{2\pi r_0} (r^2 - r_0^2)^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{-h\, d\alpha}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 (\cos\alpha - \theta)} + \right.$$
$$\left. + \int_0^{2\pi} \frac{g\,[r_0 - r\cos(\alpha - \theta)]\, d\alpha}{[r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\alpha - \theta)]^2} \right].$$

CAPITULO V

PROPAGACION DE LAS ONDAS EN EL ESPACIO

En este capítulo se estudia el problema con condiciones iniciales (problema de Cauchy) para la ecuación de las oscilaciones

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - f, \qquad u = u(M, t) \tag{1}$$

en el espacio no acotado ($M = M(x, y, z)$) y en el plano ($M = M(x, y)$).

§ 1. PROBLEMA CON CONDICIONES INICIALES

1. Ecuación de las oscilaciones en el espacio. La ecuación más sencilla de tipo hiperbólico es la ecuación de las oscilaciones (1), que en Física se llama comúnmente ecuación de D'Alembert.

En el cap. II fue demostrado que la ecuación (1) describe el proceso de propagación del sonido en un gas, el proceso de las oscilaciones de una membrana; en este caso, (1) tiene la forma

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{a^2} u_{tt} - f(x, y, t).$$

A la ecuación (1) se reducen también los problemas sobre la propagación de campos electromagnéticos en un medio aislador y problemas de la teoría de la elasticidad (véase el Apéndice I del cap. V).

Para la ecuación (1) se estudia el problema con condiciones iniciales (problema de Cauchy) en el espacio infinito y los problemas de contorno en una región acotada.

En este capítulo, estudiaremos el problema de Cauchy en el espacio infinito:

hallar la solución de la ecuación

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt} - f(M, t), \qquad M = M(x, y, z)$$

$$\text{para } t > 0, \ -\infty < x, y, z < \infty, \tag{1}$$

que satisfaga a las condiciones iniciales:

$$u(M, 0) = \varphi(M), \ u_t(M, 0) = \psi(M) \text{ para } t = 0, \tag{2}$$

donde f, φ, ψ son funciones dadas.

Llamaremos solución de la ecuación (1) en cierta región, para $t > 0$, a una función $u(M, t)$, continua conjuntamente con sus derivadas que figuran en la ecuación (1) en todos los puntos de la región considerada y para todo $t > 0$.

Consideremos las soluciones particulares de la ecuación homogénea

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt} \tag{3}$$

que poseen simetría central con respecto a cierto punto M_0, es decir, soluciones del tipo

$$u(M, t) = u(r, t),$$

donde $r = r_{MM_0}$ es la distancia entre los puntos M y M_0. En este caso, la ecuación de las oscilaciones (3) se reduce a la ecuación unidimensional para la función $v = ru$

$$v_{rr} = \frac{1}{a^2} v_{tt}. \tag{4}$$

En efecto, si $u = u(r, t)$, entonces el operador de Laplace en el sistema esférico de coordenadas con centro en el punto M_0 (véase el cap. IV, § 1, p. 3) se puede transformar a la forma

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru),$$

cosa que se puede probar mediante derivación. Por esto, la ecuación (3) toma la forma $\frac{1}{r}(ru)_{rr} = \frac{1}{a^2} u_{tt}$. Introduciendo luego la función $v = ru$, se obtiene, para ésta, la ecuación (4). Si la función $u(r, t)$ es acotada para $r = 0$, la función $v = ru$ se anula

cuando $r = 0$, $v(0, t) = 0$. Por esto, el problema de Cauchy para la ecuación (3) con las condiciones iniciales

$$u(r, 0) = \varphi(r), \quad u_t(r, 0) = \psi(r) \tag{5}$$

se reduce al problema de las oscilaciones de una cuerda semiacotada ($0 \leqslant r < \infty$) de extremo fijo $r = 0$:

$$v_{rr} = \frac{1}{a^2} v_{tt}, \quad v(r, 0) = r\varphi(r), \quad v_t(r, 0) = r\psi(r), \quad v(0, t) = 0, \tag{6}$$

estudiado en el cap. II.

La solución general de la ecuación (4) tiene la forma

$$v(r, t) = f_1\left(t - \frac{r}{a}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{a}\right)$$

y, por consiguiente,

$$u(r, t) = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{a}\right) + \frac{1}{r} f_2\left(t + \frac{r}{a}\right),$$

donde $f_1(\xi)$ y $f_2(\xi)$ son funciones arbitrarias que posean derivadas segundas. Las soluciones particulares de la ecuación (3)

$$u_1 = \frac{1}{r} f_1\left(t - \frac{r}{a}\right) \quad \text{y} \quad u_2 = \frac{1}{r} f_2\left(t + \frac{r}{a}\right)$$

se llaman ondas esféricas; $u_1(r, t)$ es una onda esférica divergente, $u_2(r, t)$, una onda esférica que converge hacia el punto $r = 0$; a es la velocidad de propagación de las ondas. A diferencia de las ondas planas $f\left(t \pm \frac{x}{a}\right)$, la onda esférica disminuye en forma inversamente proporcional a la distancia del centro.

De esta forma, la solución general de la ecuación (3), en el caso de una simetría central, se representa en forma de suma de dos ondas esféricas.

Teniendo en cuenta la condición $v(0, t) = 0$, se halla $0 = f_1(t) + f_2(t)$, o bien $f_2(t) = -f_1(t) = f(t)$ para todos los valores de t, es decir,

$$u(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t + \frac{r}{a}\right) - \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{a}\right) \tag{7}$$

y, en particular,

$$u(0, t) = \frac{2}{a} f'(t). \tag{7'}$$

2. Método de promediación. Consideremos, en el espacio infinito, el problema de Cauchy

$$\left.\begin{array}{l} u_{tt}=a^2\,\Delta u=a^2\,(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}),\\ -\infty<x,\ y,\ z<\infty,\ t>0;\\ u\,(M,\ 0)=\varphi\,(M),\ u_t\,(M,\ 0)=\psi\,(M),\ M=M\,(x,\ y,\ z). \end{array}\right\} \qquad (8)$$

Supongamos que la solución de este problema existe, y hallemos la representación integral de ésta. Sea $M_0\,(x_0,\ y_0,\ z_0)$ un punto fijo. Introduzcamos el sistema esférico de coordenadas (r, θ, φ) con centro en el punto M_0.

Consideremos la función

$$\bar{u}\,(r,\ t)=M_r\,[u]=\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S_r} u\,dS=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_r} u\,d\Omega \quad (dS=r^2\,d\Omega), \qquad (9)$$

que es el valor medio de u en la esfera S_r de radio r con centro en el punto M_0, $d\Omega=\operatorname{sen}\theta\,d\theta\,d\varphi$.

De (9) se aprecia que

$$u\,(M_0,\ t_0)=\bar{u}\,(0,\ t_0). \qquad (10)$$

Demostremos que la función $r\bar{u}\,(r,\ t)=v$, que tiene simetría esférica con respecto al punto M_0, satisface a la ecuación (4). Integremos la ecuación (8) en el volumen de la esfera K_r, limitado por S_r:

$$\iiint\limits_{K_r} \Delta u\,d\tau=\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{K_r} u_{tt}\,d\tau.$$

Para transformar el primer miembro de la igualdad obtenida, apliquemos la primera fórmula de Green (capítulo IV)[1]) para $v=1$, $u=u\,(M,\ t)$ y tomemos en cuenta que la normal a S_r está dirigida por el radio $\left(\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial r}\right)$:

$$\iiint\limits_{K_r} \Delta u\,d\tau=\iint\limits_{S_r}\frac{\partial u}{\partial r}\,r^2\,d\Omega=r^2\frac{\partial}{\partial r}\,\Big[\iint\limits_{S_r} u\,d\Omega\Big]=4\pi r^2\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}, \qquad (11)$$

$$\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{K_r} u_{tt}\,d\tau=\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\limits_0^r \rho^2\,d\rho\,\Big[\iint\limits_{S_r} u\,d\Omega\Big]=\frac{4\pi}{a^2}\int\limits_0^r \bar{u}_{tt}\,(\rho,\ t)\,\rho^2\,d\rho. \qquad (12)$$

[1]) Los autores se refieren a la fórmula (4), pág. 324 (*N. del T.*)

Derivando (11) y (12) con respecto a r y haciendo $v = ru$, se obtiene (4). De la fórmula (7′) se deduce que

$$u(M_0, t_0) = \bar{u}(0, t_0) = \frac{2}{a} f'(t_0). \qquad (13)$$

Expresemos f mediante φ y ψ. Después de derivar $\bar{u} = \frac{1}{r}\left[f\left(t + \frac{r}{a}\right) - f\left(t - \frac{r}{a}\right)\right]$ con respecto a r y a t, se halla que

$(r\bar{u})_r + \frac{1}{a}(r\bar{u})_t = \frac{2}{a} f'\left(t + \frac{r}{a}\right) = \frac{2}{a} f'(t_0)$ para $t = 0$ y $r = at_0$.

De aquí y de (13) y de (9) se obtiene:

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_r} ru\, d\Omega + \frac{1}{a}\iint_{S_r} r\frac{\partial u}{\partial t} d\Omega\right]_{r=at_0,\ t=0}. \qquad (14)$$

3. Fórmula de Poisson. Utilizando las condiciones iniciales (8) y omitiendo el subíndice 0 de M_0, t_0, se obtiene de (14) la fórmula de Poisson

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t} t \iint_{S_{at}} \varphi(P)\, d\Omega_P + t\iint_{S_{at}} \psi(P)\, d\Omega_P\right], \qquad (15)$$

$$(dS_p = (at)^2\, d\Omega),$$

la cual, teniendo en cuenta (9), se puede escribir en la forma

$$u(M, t) = \frac{\partial}{\partial t} tM_{at}[\varphi] + tM_{at}[\psi], \qquad (16)$$

donde

$$M_{at}[\varphi] = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_{at}^M} \varphi\, d\Omega = \frac{1}{4\pi a^2 t^2}\iint_{S_{at}^M} \varphi\, dS. \qquad (17)$$

Aquí $S_{at} = S_{at}^M$ es una esfera de radio at con centro en el punto M

Sea u_ψ la solución del problema (8) para $\varphi = 0$,

$$u_\psi(M, t) = tM_{at}[\psi]. \qquad (18)$$

De (16) se observa que la solución del problema (8) se puede escribir como sigue:

$$u(M, t) = \frac{\partial}{\partial t} u_\varphi + u_\psi, \qquad (19)$$

donde

$$u_\varphi = tM_{at}[\varphi]^{1)}.$$

1) Cfr. (19) con la fórmula de D'Alembert. (Especialmente en la forma (18), pág. 70).

De la fórmula de Poisson, obtenida bajo la hipótesis de la existencia de una solución del problema (8), se deduce la unicidad de dicha solución. Efectivamente, suponiendo que el problema de Cauchy tiene dos soluciones, u_1 y u_2, se obtienen para su diferencia las condiciones iniciales $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Aplicando a la función $u_1 - u_2$ los razonamientos anteriores, se obtiene la fórmula (15), en la cual $\varphi = 0$, $\psi = 0$ y, por lo tanto, $u \equiv 0$, o bien $u_1 \equiv u_2$.

Demostremos que la función $u(M, t)$, determinada por la fórmula de Poisson, da efectivamente la solución del problema de Cauchy (8), si $\varphi(x, y, z)$ es continua conjuntamente con sus derivadas terceras, y $\psi(x, y, z)$, con sus derivadas segundas. La demostración se hará suponiendo, primeramente, que $\varphi = 0$, es decir, que $u = u_\psi$. Introduzcamos las nuevas variables α, β, γ, haciendo $\xi = x + at\alpha$, $\eta = y + at\beta$, $\zeta = z + at\gamma$. De aquí se ve que α, β, γ son los cosenos directores del radio vector del punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ de la esfera S_{at} ($\alpha = \cos(r, x)$, etc.). Entonces, la integral sobre S_{at} se transforma en la integral sobre la esfera S_1 ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) de radio unitario, siendo $dS_1 = d\Omega_1 = dS/a^2t^2$; el integrando de (15) será

$$\psi(x + at\alpha,\ y + at\beta,\ z + at\gamma) = \psi(\xi, \eta, \zeta).$$

No es difícil advertir que

$$u_\psi = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_1} \psi(\xi, \eta, \zeta)\, dS_1, \tag{20}$$

$$\Delta u_\psi = (u_\psi)_{xx} + (u_\psi)_{yy} + (u_\psi)_{zz} = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_1} (\psi_{\xi\xi} + \psi_{\eta\eta} + \psi_{\zeta\zeta})\, dS_1 =$$

$$= \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_{at}} \Delta\psi\, d\Omega, \tag{21}$$

puesto que $\psi_{xx} = \psi_{\xi\xi}$, etc. Al derivar con respecto a t bajo el signo integral en (20), se obtiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = a(\psi_\xi \alpha + \psi_\eta \beta + \psi_\zeta \gamma) = a \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$$(u_\psi)_t = \frac{u_\psi}{t} + \frac{v}{t}, \quad v = \frac{at^2}{4\pi} \iint\limits_{S_1} \frac{\partial \psi}{\partial r}\, dS_1 = \frac{1}{4\pi a} \iint\limits_{S_{at}} \frac{\partial \psi}{\partial r}\, dS. \tag{22}$$

Derivando (22) con respecto a t, se halla que $(t(u_\psi)_t)_t = t(u_\psi)_{tt} + (u_\psi)_t = (u_\psi)_t + v_t$, es decir,

$$(u_\psi)_{tt} = \frac{1}{t} v_t. \tag{23}$$

La primera fórmula de Green nos da:

$$v=\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_{at}}\frac{\partial\psi}{\partial r}\,dS=\frac{1}{4\pi a}\iiint_{K_{at}}\Delta\psi\,d\tau=\frac{1}{4\pi a}\int_0^{at}\rho^2\,d\rho\iint_{S_\rho}\Delta\psi\,dS, \quad (24)$$

donde K_{at} es una esfera de radio at, S_ρ, una esfera de radio ρ con centro en el punto M (x, y, z). Calculemos la derivada, aplicando la igualdad (21):

$$v_t=\frac{a^2t^2}{4\pi}\iint_{S_{at}}\Delta\psi\,dS=a^2t\;\Delta u_\psi.$$

De aquí y de (23) se sigue que $(u_\psi)_{tt}=a^2\Delta u_\psi$, es decir, que u_ψ satisface a la ecuación (8). No es difícil comprobar que la función $\partial u_\varphi/\partial t$ también satisface a la ecuación (8), si posee derivadas terceras.

Demostremos que u_ψ, determinada por la fórmula (20), satisface a las condiciones iniciales. Las fórmulas (20), (22) nos dan: $u_\psi(M, 0)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{u_\psi}{t}=\psi(M)$, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{v}{t}=0$, puesto que la función ψ es continua y todas las integrales están acotadas. Por esto, de acuerdo con (22), será $(u_\psi)_t=\frac{1}{t}u_\psi+\frac{1}{t}v\to\psi(M)$ para $t\to 0$ y análogamente $u_\varphi\to 0$ cuando $t\to 0$. De la fórmula (18') para u_φ se aprecia que $(u_\varphi)_{tt}=0$ para $t=0$ y, en consecuencia, la función (16) satisface a las condiciones (8). Con esto queda demostrado que la fórmula de Poisson (16) determina la solución del problema de Cauchy (8).

De la fórmula (16) se ve directamente la dependencia continua de la solución del problema de Cauchy de las condiciones iniciales.

4. Método del descenso. La fórmula (19), obtenida en el punto anterior, resuelve, en el espacio (x, y, z), la ecuación homogénea de las oscilaciones con condiciones iniciales que son, en general, funciones arbitrarias de las variables x, y y z. Si las funciones iniciales φ y ψ no dependen de z, entonces, evidentemente, la función u, dada por la fórmula (19), tampoco dependerá de la variable z. Por consiguiente, esta función satisfará a la ecuación

$$u_{xx}+u_{yy}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=0$$

y a las condiciones iniciales

$$u(x, y, 0)=\varphi(x, y),$$
$$u_t(x, y, 0)=\psi(x, y).$$

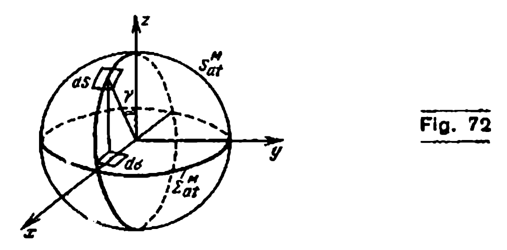


Fig. 72

De este modo, la fórmula que da la solución del problema tridimensional permite también resolver el problema en el plano.

En la fórmula (19), la integración se efectúa en la esfera S_{at}^M. En virtud de la independencia de las condiciones iniciales de z, la integración por la semiesfera superior se puede sustituir por la integración en el círculo Σ_{at}^M, que se obtiene al cortar la esfera S_{at}^M con el plano (x, y) (fig. 72). El elemento de superficie dS está relacionado con el elemento del plano $d\sigma$ por la fórmula

$$d\sigma = dS \cos\gamma,$$

donde

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}{at} = \frac{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{at}.$$

Lo mismo tiene lugar en la integración por la semiesfera inferior; por lo tanto, la integral por el círculo debe tomarse dos veces.

Como resultado, se obtiene la fórmula

$$u(M, t) = u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma_{at}^M}\frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} + \right.$$
$$\left. + \iint_{\Sigma_{at}^M}\frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\right], \qquad (25)$$

en la cual la integración se efectúa por el interior del círculo de radio at con centro en el punto (x, y).

Análogamente, si las funciones iniciales φ y ψ dependen sólo de la variable x, la fórmula (19) permite hallar la función $u(x, t)$, que es solución de la ecuación

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2}u_{tt} = 0$$

con las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$
$$u_t(x, 0) = \psi(x).$$

Para esto, introduzcamos un sistema de coordenadas esféricas, tomando el eje x como eje polar. El elemento de superficie dS se expresará por la siguiente igualdad:

$$dS = r^2 \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi = -r \, d\varphi \, d\xi,$$

puesto que

$$\xi = x + r \cos \theta, \quad d\xi = -r \operatorname{sen} \theta \, d\theta.$$

Integrando en la fórmula de Poisson (15) con respecto a φ, se obtiene:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) \, d\xi + \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \, d\xi \right].$$

Derivando la primera integral con respecto a t, se obtiene la fórmula de D'Alembert

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \, d\xi, \qquad (26)$$

que ya encontramos en el capítulo II, § 2.

Las ecuaciones de las oscilaciones con tres, dos y un argumentos espaciales, se llaman comúnmente ecuaciones de ondas esféricas, cilíndricas y planas respectivamente. Esta terminología corresponde totalmente al método aplicado más arriba, llamado *método del descenso*, por cuanto al resolver la ecuación de las oscilaciones en el plano y en la recta se partió del problema en el espacio, como si «descendiéramos» a un número menor de variables. Las soluciones obtenidas para dos y una variable tienen el carácter de ondas cilíndricas y planas.

El método del descenso se aplica no sólo a la ecuación de las oscilaciones, sino también a otros tipos de ecuaciones, y permite en muchos casos obtener, partiendo de la fórmula que determina la solución de la ecuación para varias variables, la solución del problema para una ecuación con menor número de variables independientes.

5. Interpretación física. Las fórmulas (19) y (25) permiten esclarecer la interpretación física de la propagación de las ondas esféricas y cilíndricas. Comencemos por el caso de tres variables, para el cual el carácter físico del proceso de propagación se diferencia esencialmente, como veremos, del caso de dos variables espaciales.

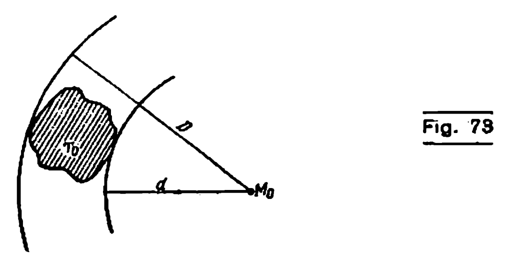


Fig. 73

Nos limitaremos al estudio de la propagación de una perturbación local, cuando el estado inicial (las funciones $\varphi > 0$ y $\psi > 0$) es diferente de cero sólo en cierta región acotada T_0. Consideremos primeramente el cambio de estado $u(M_0, t)$ en el punto M_0, que se encuentra fuera de la región T_0 (fig. 73). El estado u en el punto M_0 en el momento de tiempo t, se determina, en virtud de (19), por el estado inicial en los puntos que se encuentran en la esfera $S_{at}^{M_0}$ de radio at con centro en M_0. La función $u(M_0, t)$ es diferente de cero sólo en el caso en que la esfera $S_{at}^{M_0}$ intersecte la región de los valores iniciales T_0. Sean d y D las distancias del punto M_0 a los puntos más proximo y más alejado de la región T_0 (fig. 73). Es evidente que si t es suficientemente pequeño $\left(t < t_1 = \frac{d}{a}\right)$, la esfera $S_{at}^{M_0}$ no se intersecta con la región T_0, y las integrales de superficie en la fórmula (19) son iguales a cero: la perturbación aún no ha llegado al punto M_0. A partir del momento $t_1 = \frac{d}{a}$ hasta el momento $t_2 = \frac{D}{a}$, la esfera $S_{at}^{M_0}$ $(t_1 < t < t_2)$ cortará a la región T_0; las integrales de superficie en la fórmula (19) serán, en general, distintas de cero: el punto M_0 se ha perturbado. Al seguir aumentando t, la esfera $S_{at}^{M_0}$ contendrá a la región T_0 dentro de sí, y las integrales de superficie serán nulas: la perturbación pasó de largo por el punto M_0. De esta manera, cuando se propaga una perturbación local en el espacio tridimensional, no tiene lugar el fenómeno de acción con retardo.

Consideremos ahora el cuadro espacial instantáneo de la perturbación $u(M, t_0)$ en cierto momento t_0. Los puntos M, que se hallan en estado de perturbación, se caracterizan por que las esferas $S_{at_0}^{M}$ intersectan la región de las perturbaciones iniciales T_0. En otras palabras, esto significa que el lugar geométrico de los puntos W en los cuales la perturbación es diferente de

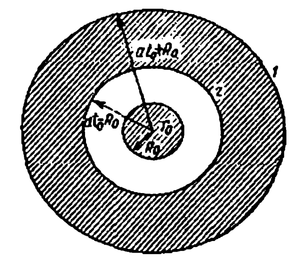


Fig. 74

cero, está formado por los puntos M que se hallan en las esferas $S^P_{at_0}$ de radio at_0 con centro en los puntos P de región T_0. Las envolventes de la familia de esferas $S^P_{at_0}$ serán las fronteras de la región W. La envolvente exterior se llama frente delantero, la interior, frente trasero de la onda. En la fig. 74 se representan los frentes delantero y trasero de la onda (1 y 2) para el caso en que la región T_0 es una esfera de radio R_0.

De este modo, la perturbación inicial localizada en el espacio causa, en cada punto M_0 del espacio, una acción localizada en el tiempo; aquí tiene lugar la propagación de una onda de frentes delantero y trasero marcados (*principio de Huygens*).

Pasemos al caso de dos variables. Supongamos que la perturbación inicial está dada en la región S_0 del plano (x, y). Analicemos el cambio de estado $u(M_0, t)$ en el punto M_0, que se halla fuera de S_0. El estado $u(M_0, t)$ en el punto M_0 en el momento t se determina, de acuerdo con (25), por los valores iniciales en los puntos P que pertenecen al círculo $\Sigma^{M_0}_{at_0}$ de radio at_0, con centro en M_0. Para los momentos de tiempo $t < t_1 = \frac{d}{a}$ (d es la distancia de M_0 al punto más próximo de la región S_0), la función es $u(M_0, t) = 0$: la perturbación aún no llegó hasta el punto M_0. Si $t > t_1$, entonces $u(M_0, t) \neq 0$. Esto significa que, a partir del momento $t = t_1$, en el punto M_0 surge una perturbación, la cual crece, en general, al principio y luego, a partir de cierto momento, disminuye gradualmente hasta cero (cuando $t \to \infty$). La diferencia entre el caso plano y el espacial consiste, precisamente, en este fenómeno de acción con retardo. La influencia de las perturbaciones iniciales, localizadas en el plano, no están localizadas en el tiempo y se caracterizan por una acción con retardo que continúa durante mucho tiempo. El principio de Huygens no tiene lugar.

El cuadro instantáneo de las perturbaciones en el plano tiene un frente delantero marcado, pero no posee frente trasero. El problema para dos dimensiones se puede considerar como un problema espacial, en el cual las perturbaciones iniciales están dadas en un cilindro infinito y no dependen de la tercera coordenada. Aplicando este esquema, es fácil explicarse el proceso de acción con retardo.

6. Método de la reflexión. El problema con condiciones iniciales para la ecuación de las oscilaciones, en el caso de regiones limitadas por planos, puede ser resuelto por el método de las imágenes.

Consideremos el problema para el semiespacio $z > 0$: **hallar la solución de la ecuación de las oscilaciones**

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt},$$

que satisfaga a las condiciones iniciales

$$\left.\begin{array}{l} u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \\ u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z) \end{array}\right\} \quad (z > 0)$$

y a la condición de frontera

$$u|_{z=0} = 0, \quad \text{o bien} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0.$$

La solución de este problema se da por la fórmula (19), si se continúan las condiciones iniciales, en forma impar con respecto a z, a todo el espacio (para $u|_{z=0} = 0$):

$$\varphi(x, y, z) = -\varphi(x, y, -z); \quad \psi(x, y, z) = -\psi(x, y, -z),$$

o en forma par $\left(\text{para } \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0\right)$:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y, -z); \quad \psi(x, y, z) = \psi(x, y, -z).$$

Verifiquemos que cuando las funciones φ y ψ se continúan en forma impar con respecto a la variable z, la condición $u|_{z=0} = 0$ se cumple automáticamente. En efecto,

$$u(P, t) = u(x, y, 0, t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^P} \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{at}\, ds + \iint\limits_{S_{at}^P} \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{at}\, ds\right] = 0,$$

puesto que las integrales de superficie sobre esferas con centro en los puntos del plano $z=0$ son nulas para funciones impares φ y ψ.

Análogamente se puede resolver el problema para la capa plana $0 \leqslant z \leqslant l$ con condiciones de frontera de primera y segunda especie:

$$u = 0 \text{ para } z = 0 \text{ y } z = l,$$

o bien

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{para} \quad z = 0 \text{ y } z = l$$

y con las condiciones iniciales correspondientes.

La fórmula (19) da directamente la solución del problema, si las condiciones iniciales se continúan en forma impar (o par) con respecto a los planos $z = 0$ y $z = l$. Las funciones iniciales φ y ψ, determinadas de esta manera, serán periódicas, con período $2l$, con respecto a la variable z (cfr. cap. II, § 2, p. 7).

Si las funciones iniciales φ y ψ son funciones locales en la capa $0 < z < l$, diferentes de cero en la región T_0, las funciones continuadas serán distintas de cero en una serie de regiones T_n que se obtienen de T_0 mediante imágenes especulares. La función $u(M, t)$, para todo M y t, se representa en forma de la suma de un número finito de sumandos, que se determinan por las perturbaciones en T_n (cfr. con el capítulo II, § 2, p. 7). El significado físico de esto consiste en que en un intervalo finito de tiempo tiene lugar un número finito de reflexiones en las paredes $z = 0$ y $z = l$. Análogamente se puede resolver el problema para el paralelepípedo.

§ 2. FORMULA INTEGRAL

1. Deducción de la fórmula integral. Al resolver la ecuación de las oscilaciones de la cuerda

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -f$$

por el método de la propagación de las ondas, utilizamos ampliamente el concepto de *ángulo característico*. Al pasar a la resolución de la ecuación de las oscilaciones en el plano o en el espacio,

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -f, \tag{1}$$

consideraremos la superficie

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = |t - t_0|,$$

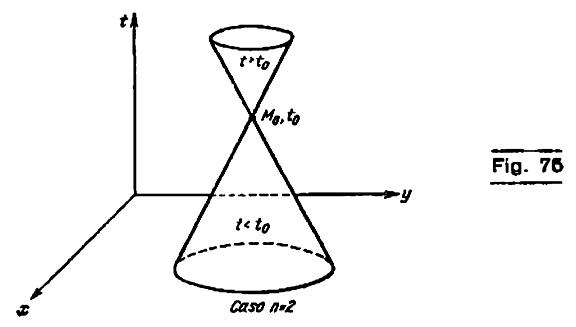


Fig. 76

llamada *cono característico* para el punto M_0 y el momento t_0. El conjunto de puntos del espacio «de fases» (M, t) a los cuales llega la señal que se propaga con velocidad a y que sale del punto M_0 en el momento t_0, se determina por la ecuación

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = t - t_0 \qquad (t > t_0)$$

y es la hoja superior del cono característico del punto M_0. Análogamente, la señal que sale del punto M en el momento t, llega al punto M_0 en el momento t_0, si

$$\frac{1}{a} r_{MM_0} = t_0 - t \qquad (t < t_0).$$

El lugar geométrico de estos puntos (M, t) forma la hoja inferior del cono característico (fig. 75).

Para determinar la función $u(M, t)$ en el punto (M_0, t_0), que sea la solución de la ecuación (1), introduzcamos, en lugar del tiempo t, el tiempo local t^* del punto M_0, haciendo

$$t^* = t - \left(t_0 - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)$$

y dejando invariantes las coordenadas geométricas. Utilizando el sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ), ligado al punto M_0, se obtiene el nuevo sistema de variables

$$r^* = r, \quad \theta^* = 0, \quad \varphi^* = \varphi, \quad t^* = t - \left(t_0 - \frac{r}{a}\right).$$

Establezcamos la ecuación a la cual satisface la función

$$u(r, \theta, \varphi, t) = u\left(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^* + t_0 - \frac{r}{a}\right) = U(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^*).$$

El operador de Laplace en el sistema de coordenadas esféricas tiene la forma

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Expresemos las derivadas de la función u mediante las de la nueva función U:

$$u_r = U_{r^*} + \frac{1}{a}U_{t^*},$$

$$u_{rr} = U_{r^*r^*} + \frac{2}{a}U_{r^*t^*} + \frac{1}{a^2}U_{t^*t^*},$$

$$u_\theta = U_{\theta^*};\quad u_{\theta\theta} = U_{\theta^*\theta^*},$$

$$u_\varphi = U_{\varphi^*};\quad u_{\varphi\varphi} = U_{\varphi^*\varphi^*},$$

$$u_t = U_{t^*};\quad u_{tt} = U_{t^*t^*}.$$

La ecuación (1) se transforma en

$$\Delta U = -\frac{2}{ar^*}\frac{\partial}{\partial r^*}(r^* U_{t^*}) - F(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^*), \tag{2}$$

donde

$$F(r^*, \theta^*, \varphi^*, t^*) = f(r, \theta, \varphi, t).$$

Supongamos que el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pertenece a cierto cuerpo T, delimitado por la superficie S. Considerando a (2) como una ecuación no homogénea de Laplace, en la cual t^* hace las veces de parámetro, apliquemos la fórmula fundamental de Green (capítulo IV). Aplicándola a la región T y haciendo $t^* = 0$, se obtiene[1]):

$$4\pi U(M_0, 0) = \iint_S \left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^*}\right)\right] dS +$$

$$+ \iiint_T \frac{2}{ar^{*2}}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial U}{\partial t^*}\right) d\tau + \iiint_T \frac{F}{r^*} d\tau.$$

[1]) En virtud de la convención, tomada en el capítulo IV, los signos en la fórmula corresponden a la normal exterior.

El punto M_0 es un punto singular del sistema esférico de coordenadas. Por esto, las integrales de volumen se consideran como los límites, cuando $\varepsilon \to 0$, de las integrales respectivas, tomadas por el volumen $T - T_\varepsilon$, donde T_ε es una esfera de radio ε con centro en el punto M_0. Transformemos la integral de volumen:

$$I_\varepsilon = \iiint\limits_{T-T_\varepsilon} \frac{2}{ar^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* \frac{\partial U}{\partial t^*}\right) d\tau =$$

$$= \iiint\limits_{T-T_\varepsilon} \frac{2}{a} \frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* \frac{\partial U}{\partial t^*}\right) \operatorname{sen}\theta^*\, dr^*\, d\theta^*\, d\varphi^*.$$

Integrando con respecto a la variable r^*, se obtiene:

$$I_\varepsilon = \iint\limits_S \frac{2}{ar^*} \frac{\partial U}{\partial t^*} \cos(\widehat{n, r^*})\, dS - \iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{2}{ar^*} \frac{\partial U}{\partial t^*}\, dS,$$

puesto que

$$dS_n = dS \cos(\widehat{n, r^*}) = r^{*2} \operatorname{sen}\theta^*\, d\theta^*\, d\varphi^*.$$

El segundo sumando en I_ε tiende a cero cuando $\varepsilon \to 0$, puesto que el área de la superficie S_ε es igual a $4\pi\varepsilon^2$. De esta manera, el límite de I_ε cuando $\varepsilon \to 0$ es igual a

$$I_0 = \iiint\limits_T \frac{2}{ar^{*2}} \frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^* \frac{\partial U}{\partial t^*}\right) d\tau = \iint\limits_S \frac{2}{ar^*} \frac{\partial U}{\partial t^*} \frac{dr^*}{dn}\, dS \ ^{1)}$$

puesto que

$$\cos(\widehat{n, r^*}) = \frac{dr^*}{dn},$$

lo cual nos da:

$$4\pi U(M_0, 0) =$$

$$= \iint\limits_S \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^*}\right) + \frac{2}{ar^*} \frac{\partial U}{\partial t^*} \frac{dr^*}{dn}\right) dS + \iiint\limits_T \frac{F}{r^*}\, d\tau.$$

Volvamos a las variables iniciales y a la función u:

$$u(M, t) = U(M, t^*) \qquad \left(t = t^* + t_0 - \frac{r_{M_0 M}}{a}\right).$$

---

[1]) En esta transformación hemos utilizado el hecho que $d\tau = (r^*)^2 d\Omega\, dr$, integrado con respecto a r^* y cambiado luego $d\Omega = \dfrac{dS}{(r^*)^2}$.

de modo que

$$U(M_0, 0) = u(M_0, t_0),$$

así como también

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial t^*}\frac{dr}{dn}.$$

Como resultado, se obtiene para la función $u(M_0, t_0)$ la siguiente *fórmula integral*:

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - [u]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{ar}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\frac{dr}{dn}\right\} dS_M +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\iiint_T \frac{[f]}{r}\, d\tau_M, \quad (3)$$

llamada comúnmente fórmula de Kirchhoff[1]. Aquí los corchetes indican que el valor de la función debe tomarse para $t^* = 0$, es decir, para $t = t_0 - \frac{r_{M_0M}}{a}$, de modo que $[f] = f\left(M, t - \frac{r_{MM_0}}{a}\right)$.

2. **Corolarios de la fórmula integral.** La fórmula (3) encuentra su aplicación en la resolución de muchos problemas. Como primer ejemplo, consideremos el problema con condiciones iniciales:

hallar la solución de la ecuación de las oscilaciones

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}u_{tt} = 0$$

en el espacio infinito, si se dan las condiciones iniciales

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z),$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x, y, z).$$

La hoja inferior del «cono» característico $r = a(t_0 - t)$ del punto (M_0, t_0) se intersecta con la variedad $t=0$ según la esfera $S_{at_0}^{M_0}$ $(r = at_0)$] de radio at_0 con centro en el punto M_0. Apliquemos la fórmula (3), haciendo $S = S_{at_0}^{M_0}$. Para cualquier función $v(M, t)$, los valores de $[v]$ en la esfera $S_{at_0}^{M_0}$ tienen la forma

$$[v] = v\left(M, t_0 - \frac{r_{M_0M}}{a}\right) = v(M, 0), \text{ puesto que } r_{MM_0} = at_0.$$

[1]) La fórmula de Kirchhoff fue generalizada por S. L. Sóbolev para las ecuaciones de tipo hiperbólico con número par de variables. Mediante esta fórmula de Kirchhoff—Sóbolev, se puede escribir la solución del problema con condiciones iniciales para dicha ecuación (G. L. Sóbolev, DAN URSS 1933).

Por esto, si el punto M se halla en la esfera $S_{at_0}^{M_0}$, entonces

$$[u]_S = u(M, 0) = \varphi(M),$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_S = \frac{\partial u}{\partial t}(M, 0) = \psi(M),$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_S = \frac{\partial u}{\partial r}(M, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial r}(M).$$

Continuando,

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - [u]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi).$$

Sustituyendo esta expresión en (3), se halla.

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_{S_{at_0}^{M_0}}\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi) + \frac{1}{ar}\psi\right\}dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\iint_{S_r^{M_0}} r\varphi\, d\Omega + \frac{1}{a}\iint_{S_r^{M_0}} r\psi\, d\Omega\right]_{r=at_0},$$

de donde, omitiendo los subíndices 0 de M_0 y t_0, se obtiene la fórmula de Poisson

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}^M}\frac{\varphi(P)}{r_{MP}}dS + \iint_{S_{at}^M}\frac{\psi(P)}{r_{MP}}dS\right](r_{MP} = at) \qquad (4)$$

(véase (19), § 1).

Como segundo ejemplo, consideremos ahora la resolución de la ecuación ondulatoria no homogénea con condiciones iniciales nulas. Tomando, como antes, $S = S_{at_0}^{M_0}$, se comprueba que la integral de superficie en (3) se anula, como resultado de lo cual se obtiene:

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{T_{at_0}^{M_0}}\frac{[f]}{r}d\tau_M, \qquad (5)$$

donde $T_{at_0}^{M_0}$ es una esfera de radio at_0 con centro en M_0. Analicemos con más detalle el caso en que el segundo miembro es una función periódica del tiempo:

$$f(M, t) = f_0(M)e^{i\omega t},$$

donde ω es la frecuencia dada de las oscilaciones. De (5) se halla:

$$u(M_0, t_0) = e^{i\omega t_0} \frac{1}{4\pi} \iiint_{T_{at_0}^{M_0}} f_0(M) \frac{e^{-ikr}}{r} d\tau_M \quad \left(k = \frac{\omega}{a}, \quad r = r_{MM_0}\right). \quad (6)$$

Sea $f_0(M)$ una función local, es decir, una función diferente de cero sólo dentro de cierta región T. Si M_0 se halla fuera de la región T y la distancia de M_0 al punto más próximo de la región T es igual a d, la integral por T_{at_0} es igual a cero para $t_0 < \frac{d}{a}$. Para estos valores, la perturbación no alcanza a llegar hasta el punto M_0. Si la distancia de M_0 al punto más alejado de la región T es igual a D, para los momentos $t_0 > \frac{D}{a}$, la integral del segundo miembro es constante y se reduce a la integral tomada sobre toda la región T. De esta forma, en cualquier punto M_0, a partir del momento $t_0 = \frac{D}{a}$, tienen lugar oscilaciones periódicas de amplitud

$$v(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint_T f_0(M) \frac{e^{-ikr_{MM_0}}}{r_{MM_0}} d\tau_M, \quad (7)$$

de modo que

$$u(M_0, t_0) = v(M_0) e^{i\omega t_0}.$$

La sustitución directa de la expresión (6) para $u\left(\text{para } t_0 > \frac{D}{a}\right)$ en la ecuación de las oscilaciones, demuestra que la función $v(M)$ debe satisfacer a la ecuación

$$\Delta v + k^2 v = -f_0(M) \qquad \left(k > \frac{\omega}{a}\right), \quad (8)$$

que llamaremos en lo sucesivo *ecuación ondulatoria* (véase el capítulo VII). Esta se llama también frecuentemente ecuación de Helmholtz.

Consideremos la fórmula (3) para el caso de las oscilaciones permanentes, cuando

$$u(M, t) = v(M) e^{i\omega t},$$

donde $v(M)$ es la amplitud de las oscilaciones, que satisface a la ecuación ondulatoria (8).

En este caso, tendremos:

$$[u]=u\left(M,\ t-\frac{r_{MM_0}}{a}\right)=v(M)\,e^{i(\omega t-kr)},$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]=\frac{\partial v}{\partial n}\,e^{i(\omega t-kr)},$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]=ikv(M)\,e^{i(\omega t-kr)},$$

$$[f]=f_0(M)\,e^{i(\omega t-kr)}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula (3), se obtiene la fórmula integral para la ecuación ondulatoria (8):

$$v(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)\right]dS_M+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint_T f_0(M)\frac{e^{-ikr}}{r}\,d\tau_M\qquad (r=r_{MM_0}),\qquad (9)$$

que también se llama con frecuencia fórmula de Kirchhoff.

Para $k=0$ ($\omega=0$, caso estático), la fórmula (9) se transforma en la fórmula fundamental de Green (cap. IV, § 2) para la ecuación no homogénea de Laplace.

§ 3. OSCILACIONES DE VOLUMENES ACOTADOS

1. Esquema general del método de separación de las variables. Ondas estacionarias. El problema sobre las oscilaciones de volúmenes acotados consiste en lo siguiente:

hallar la solución de la ecuación

$$\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)-q(M)\,u=\rho(M)\,u_{tt},\quad k>0,\ q\geqslant 0,\qquad (1)$$

donde

$$\operatorname{div}(k\operatorname{grad}u)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$M=M(x,y,z)$, **dentro de cierto volumen T, limitado por la superficie cerrada Σ, que satisfaga a las condiciones complementarias**

$$u(M,0)=\varphi(M),\quad u_t(M,0)=\psi(M)\qquad (2)$$

$$\text{en } T+\Sigma,$$

$$u|_\Sigma=0\ \text{para}\ t>0.\qquad (3)$$

En el caso de un medio homogéneo (k = const, ρ = const), para $q = 0$ la ecuación (1) toma la forma

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt} \qquad \left(a^2 = \frac{k}{\rho}\right).$$

Problemas de este tipo se encuentran en el estudio del proceso de las oscilaciones de una membrana (caso de dos variables geométricas independientes), de las oscilaciones acústicas de un gas, de los procesos electromagnéticos en medios dieléctricos. Una importancia fundamental tienen los problemas relacionados con la generación de las oscilaciones electromagnéticas en resonadores cerrados huecos (endovibradores, clistrones, magnetrones, etc.).

Obsérvese que la homogeneidad de la condición de frontera (3) no va en detrimento de la generalidad. En efecto, el caso

$$u\,|_S = \mu, \tag{3'}$$

donde μ es una función arbitraria del punto P de la superficie S y del tiempo t, se reduce fácilmente al caso de una condición de frontera homogénea por el método expuesto en el § 3 del capítulo II para una variable, y que consiste en que se estudia la desviación con respecto a una función dada. Análogamente se plantean los problemas de contorno segundo y tercero.

Buscaremos la solución $u(M, t)$ de la ecuación homogénea (1) con las condiciones (2) y (3) por el método de separación de las variables. En lo sucesivo, nos limitaremos a exponer el esquema formal de la resolución. Con este fin, consideremos el problema auxiliar fundamental (cfr. § 3, cap. II):

hallar la solución no trivial de la ecuación homogénea

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qu = \rho u_{tt} \text{ en } T,\ t > 0\ (k > 0,\ \rho > 0,\ q \geqslant 0), \tag{1*}$$

que satisfaga a la condición de frontera homogénea

$$u\,|_\Sigma = 0 \tag{3}$$

y que se represente en forma del producto

$$u(M, t) = v(M)\, T(t). \tag{4}$$

Sustituyendo esta forma (4) de la solución en (1) y separando, como de costumbre, las variables, se obtienen las siguientes ecuaciones para las funciones $v(M)$ y $T(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qv + \lambda\rho v = 0, \quad v \neq 0;\\ v\,|_\Sigma = 0; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$T'' + \lambda T = 0. \tag{6}$$

Para $v(M)$, se obtiene el problema de determinación de los valores propios (problema de Sturm-Liouville):

hallar los valores del parámetro λ, para los cuales existen soluciones no triviales del problema:

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) - qv + \lambda\rho v = 0 \\ (k > 0,\ q \geqslant 0,\ \rho > 0), \\ v|_{\Sigma} = 0, \end{array}\right\} \qquad (5)$$

así como también hallar estas soluciones. Estos valores del parámetro λ se llaman valores propios, y las soluciones no triviales correspondientes, funciones propias del problema (5).

Detengámosnos con más detalle en este problema, que es análogo al problema fundamental del § 3 del capítulo II. En nuestro caso, la ecuación para las funciones propias es una ecuación en derivadas parciales, a consecuencia de lo cual es difícil pretender obtener la representación explícita de las funciones propias para una región arbitraria T. En lo sucesivo (puntos 2 y 3) se estudiarán ejemplos de regiones T, para las cuales es posible la representación explícita, aunque exige la introducción de una nueva clase de funciones especiales. Aquí analizaremos las propiedades generales de las funciones y valores propios y daremos el esquema formal del método de separación de las variables. Enumeremos dichas propiedades.

1. Existe un conjunto numerable de valores propios, $\lambda_1 \leqslant \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$, a los cuales les corresponden las funciones propias

$$v_1(x, y, z),\ v_2(x, y, z),\ \ldots,\ v_n(x, y, z),\ \ldots$$

Los valores propios λ_n crecen indefinidamente al aumentar el número n; $\lambda_n \to \infty$ para $n \to \infty$.

2. Para $q \geqslant 0$, todos los valores propios λ son positivos:

$$\lambda_n > 0.$$

3. Las funciones propias $\{v_n\}$ son ortogonales dos a dos, con densidad $\rho(x, y, z)$, en la región T:

$$\int_T v_m(M)\, v_n(M)\, \rho(M)\, d\tau_M = 0 \qquad (m \neq n), \qquad (7)$$

$$M = M(x, y, z);\ d\tau_M = dx\, dy\, dz.$$

4. Teorema del desarrollo. **Una función arbitraria $F(M)$, con derivada segunda continua y que satisfaga a la condición de frontera**

$$F = 0 \text{ en } \Sigma,$$

se desarrolla en serie por las funciones $\{v_n(M)\}$ convergente en forma absoluta y uniforme:

$$F(M)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(M),$$

siendo F_n los coeficientes del desarrollo.

La demostración de las propiedades 1 y 4 se basa comúnmente en la teoría de las ecuaciones integrales. Pasemos a demostrar las propiedades 2 y 3, que no exigen la aplicación de un aparato matemático especial. Demostremos la ortogonalidad de las funciones propias $\{v_n\}$ (propiedad 3). Sean $v_n(M)$ y $v_m(M)$ dos funciones propias, que corresponden a los valores propios λ_n y λ_m:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v_m}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial v_m}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial v_m}{\partial z}\right)-qv_m+\lambda_m\rho v_m=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial v_n}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial v_n}{\partial z}\right)-qv_n+\lambda_n\rho v_n=0,$$

siendo, además, $v_m=0$ y $v_n=0$ en S. Multiplicando la primera ecuación por $v_n(M)$ y restándole la segunda, multiplicada por $v_m(M)$, se halla:

$$\iiint_T \{v_n \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v_m)-v_m \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v_n)\}\,d\tau+ \\ +(\lambda_m-\lambda_n)\iiint_T v_n v_m \rho\, d\tau=0.$$

De aquí se obtiene, después de efectuar transformaciones análogas a las que se utilizan al deducir la segunda fórmula de Green[1]):

$$\iint_\Sigma \left(v_n k\frac{\partial v_m}{\partial \nu}-v_m k\frac{\partial v_n}{\partial \nu}\right)d\sigma+(\lambda_m-\lambda_n)\iiint_T v_n v_m \rho\, d\tau=0.$$

En virtud de las condiciones de frontera $v_m=0$ y $v_n=0$ en Σ, será

$$(\lambda_m-\lambda_n)\iiint_T v_m v_n \rho\, d\tau=0,$$

de donde se deduce que, para $\lambda_m\neq\lambda_n$,

$$\iiint_T v_m v_n \rho\, d\tau=0 \qquad (m\neq n),$$

[1]) En esta fórmula figuran las derivadas normales de las funciones propias en la superficie Σ. La fundamentación de esta fórmula para las superficies de Liapunov se da en el libro de V. I. Smirnov *«Curso de Matemáticas Superiores»*, t. IV, ed. Fizmatguiz, 1958.

es decir, las funciones propias que corresponden a valores propios diferentes son ortogonales, con densidad $\rho(M)$.

Al estudiar un problema de contorno análogo para una variable independiente:

$$X'' + \lambda\rho X = 0$$
$$X(0) = 0,$$
$$X(l) = 0$$

se demostró que a cada valor propio le corresponde una sola función propia normalizada. Para dos y tres variables independientes esto no tiene lugar. Como se aprecia en los ejemplos de las funciones propias del rectángulo y el círculo, estudiados más abajo (puntos 2 y 3), a un mismo valor propio le pueden corresponder varias funciones propias. Sin embargo, a cada valor propio, como se deduce de la teoría de las ecuaciones integrales, le puede corresponder sólo un número finito de funciones propias linealmente independientes. Supongamos que a cierto valor λ_n le corresponde el sistema de funciones linealmente independientes $v_n^{(1)}, v_n^{(2)}, \ldots, v_n^{(m)}$. Es evidente que cualquier combinación lineal de estas funciones

$$\bar{v}_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_n^{(i)}$$

es también función propia para el mismo valor propio λ_n. Utilizando el conocido método de *ortogonalización*[1]), se pueden obtener las funciones $\overline{v}_n^{(1)}, \ldots, \overline{v}_n^{(m)}$, que son combinaciones lineales de las funciones iniciales y son ortogonales entre sí. De este modo, si las funciones propias que corresponden a cierto λ_n no son ortogonales entre sí, se las puede ortogonalizar y obtener un nuevo sistema de funciones propias, ya ortogonales, que correspondan al mismo λ_n.

El conjunto de estos sistemas de funciones propias para distintos λ_n forma el sistema ortogonal de funciones propias del problema de contorno considerado:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) - qv + \lambda\rho v = 0,$$
$$v = 0 \text{ en } \Sigma.$$

El número

$$\| v_n \| = \left[\iiint_T v_n^2 \rho \, d\tau\right]^{1/2}$$

---

[1]) Véase, por ejemplo, V. I. Smirnov, «*Curso de Matemáticas Superiores*», t. IV, ed. Fizmatguiz, 1958.

se llama *norma* de la función propia. Multiplicando cada función v_n por $\frac{1}{\|v_n\|}$, se obtiene un sistema de funciones propias normalizadas.

Para demostrar que los valores propios son positivos (propiedad 2), es suficiente aplicar la primera fórmula de Green:

$$\iiint_T (k \operatorname{grad} v_n)^2 \, d\tau =$$

$$= -\iiint_T v_n \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v_n) \, d\tau + \iint_\Sigma v_n k \frac{\partial v_n}{\partial n} \, d\sigma =$$

$$= -\iiint_T q v_n^2 \, d\tau + \lambda_n \iiint_T v_n^2 \rho \, d\tau.$$

De aquí se aprecia que, para $q \geqslant 0$, los valores propios λ_n son positivos.

En lo sucesivo, utilizaremos el teorema del desarrollo (propiedad 4), refiriéndonos para su demostración a la sección correspondiente de la teoría de las ecuaciones integrales. Sea

$$F(M) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(M).$$

De aquí se hallan los coeficientes del desarrollo por el método habitual, aplicando la condición de ortogonalidad (7):

$$F_n = \frac{\iiint_T F(M) \, v_n(M) \, \rho \, d\tau}{\iiint_T v_n^2 \rho \, d\tau}. \tag{8}$$

Volvamos ahora a la ecuación en derivadas parciales. La solución de la ecuación

$$T_n'' + \lambda_n T_n = 0$$

es de la forma

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{\lambda_n} \, t + B_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} \, t,$$

de modo que la solución de nuestro problema auxiliar fundamental será el producto

$$u_n(M, t) = T_n(t) \, v_n(M) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} \, t + B_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} \, t) \, v_n(M).$$

La solución general del problema inicial con condiciones iniciales es natural buscarla en forma de la suma

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(M, t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \sqrt{\lambda_n} \, t + B_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} \, t) \, v_n(M). \tag{9}$$

Al satisfacer las condiciones (2):

$$u(M, 0) = \varphi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n(M),$$

$$u_t(M, 0) = \psi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n}\, v_n(M)$$

se halla, aplicando el teorema 4 del desarrollo:

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n \sqrt{\lambda_n} = \psi_n,$$

donde φ_n y ψ_n son los coeficientes de Fourier de las funciones $\varphi(M)$ y $\psi(M)$ en su desarrollo por el sistema de funciones $v_n(M)$, ortogonal con densidad $\rho(M)$. Con esto queda terminada la construcción formal de la solución del problema inicial.

La interpretación física de la solución obtenida es totalmente análoga al caso de una variable. Las soluciones particulares

$$u_n(M, t) = (A_n \cos \sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, t)\, v_n(M)$$

son *ondas estacionarias*, que pueden existir dentro del volumen acotado T.

Los «perfiles» de las ondas estacionarias, determinadas por las funciones $v_n(M)$, se diferencian, para distintos momentos de tiempo, solamente en un factor de proporcionalidad. Las líneas o superficies (para el caso de dos o tres variables respectivamente), a lo largo de las cuales es $v_n(M) = 0$, se llaman *líneas nodales* (superficies nodales) de la onda estacionaria $v_n(M)$. Los puntos en los cuales $v_n(M)$ alcanza máximos o mínimos relativos, se llaman *vientres* de esta onda estacionaria[1]). La solución general se representa en forma de suma infinita de tales ondas estacionarias. La posibilidad de representar la solución general en forma de suma de términos de este tipo significa, precisamente, la posibilidad de representar una oscilación arbitraria en forma de superposición de ondas estacionarias[2]).

De esta manera, el problema de las oscilaciones de membranas o de volúmenes se reduce, de hecho, a hallar las funciones propias correspondientes. En los puntos 2 y 3 estudiaremos las oscilaciones de las membranas rectangular y redonda, dedicando la aten-

[1]) Si se generan las oscilaciones en una membrana cubierta de arena, ésta pasará de los vientres a las líneas nodales, formando las llamadas figuras de Chladni, que reproducen las líneas nodales de las funciones propias.

[2]) A la fundamentación del método de separación, para el caso de varias variables, se dedica el trabajo de O. A. Ladíyenskaia (DAN URSS, t. 85, № 3 (1952)) y el de V. A. Ilín «*Sobre la resolución de los problemas mixtos para las ecuaciones hiperbólicas y parabólicas*», UMN, t. 15, fasc. 2 (1960).

ción principalmente a la determinación de las funciones propias. Como ya se indicó más arriba, la determinación de las funciones propias en forma analítica explícita es muy compleja para regiones de forma más complicada. En el caso de regiones arbitrarias, para hallar las funciones propias se pueden aplicar métodos aproximados. Existen distintos métodos aproximados, basados en la aplicación de ecuaciones integrales, de principios variacionales y de diferencias finitas.

2. Oscilaciones de una membrana rectangular. El proceso de las oscilaciones de una membrana homogénea plana, como fue demostrado en el capítulo II, § 1, se describe por la ecuación de las oscilaciones

$$u_{tt} = a^2 \Delta u. \tag{10}$$

Supongamos que en el plano (x, y) se halla una membrana rectangular de lados b_1 y b_2, fija en sus extremos, y perturbada mediante una desviación y una velocidad iniciales. Para hallar la función $u(x, y, t)$ que caracterice la desviación de la membrana de su posición de equilibrio, debemos resolver la ecuación de las oscilaciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{10'}$$

con las condiciones iniciales dadas:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, 0) &= \varphi(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) &= \psi(x, y) \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

y las condiciones de frontera

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(b_1, y, t) = 0, \tag{12}$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, b_2, t) = 0. \tag{13}$$

Buscaremos, como de costumbre, la solución por el método de separación de las variables, haciendo

$$u(x, y, t) = v(x, y)\, T(t). \tag{14}$$

Sustituyendo (14) en (10) y separando las variables, se obtiene, para la función $T(t)$, la ecuación

$$T'' + a^2 \lambda T = 0, \tag{15}$$

y para la función $v(x, y)$, el siguiente problema de contorno:

$$\left.\begin{aligned} v_{xx}+v_{yy}+\lambda v=0; \\ v(0, y)=0, \quad v(b_1, y)=0; \\ v(x, 0)=0, \quad v(x, b_2)=0. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

De este modo, el propio problema para hallar los valores propios consiste en la resolución de una ecuación homogénea en derivadas parciales con condiciones de frontera homogéneas. Este problema también lo resolveremos por el método de separación de las variables, haciendo

$$v(x, y) = X(x) Y(y).$$

Efectuando la separación de las variables, se obtienen los siguientes problemas unidimensionales de valores propios:

$$\left.\begin{aligned} X''+\nu X=0, \\ X(0)=0, \quad X(b_1)=0; \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned} Y''+\mu Y=0, \\ Y(0)=0, \quad Y(b_2)=0, \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

donde ν y μ son constantes de la separación de las variables, ligadas por la relación $\mu+\nu=\lambda$. Las condiciones de frontera para $X(x)$ e $Y(y)$ se desprenden de las condiciones respectivas para la función v. Por ejemplo, de

$$v(0, y) = X(0) Y(y) = 0,$$

se sigue $X(0)=0$, puesto que $Y(y) \not\equiv 0$ (se buscan las soluciones no triviales).

Al estudiar las oscilaciones de una cuerda, ya nos encontramos con la resolución de problemas semejantes a (17) y (18). Las soluciones de las ecuaciones (17) y (18) tienen la forma

$$X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b_1} x, \qquad Y_m(y) = \operatorname{sen} \frac{m\pi}{b_2} y;$$

$$\nu_n = \left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2; \qquad \mu_m = \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2.$$

A los valores propios

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2$$

les corresponden, de este modo, las funciones propias

$$v_{n,m}=A_{n,m}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{b_1}x\operatorname{sen}\frac{m\pi}{b_2}y,$$

donde $A_{n,m}$ es cierto factor constante. Escojámoslo de modo que la norma de la función $v_{n,m}$, con densidad 1, sea igual a la unidad:

$$\int_0^{b_1}\int_0^{b_2} v_{n,m}^2\,dx\,dy=A_{n,m}^2\int_0^{b_1}\operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{b_1}x\,dx\int_0^{b_2}\operatorname{sen}^2\frac{m\pi}{b_2}y\,dy=1.$$

De aquí se obtiene que

$$A_{n,m}=\sqrt{\frac{4}{b_1b_2}}.$$

La ortogonalidad de las funciones $\{v_{n,m}\}$ es evidente y no necesita ser demostrada. Por lo tanto, las funciones

$$v_{n,m}(x,y)=\sqrt{\frac{4}{b_1b_2}}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{b_1}x\operatorname{sen}\frac{m\pi}{b_2}y \qquad (19)$$

forman un sistema ortonormal de funciones propias de la membrana rectangular.

El número de funciones propias que pertenecen a $\lambda_{n,m}$ (multiplicidad de $\lambda_{n,m}$) depende de la cantidad de soluciones enteras n y m de la ecuación

$$\left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2=\lambda_{n,m}.$$

El sistema hallado de funciones propias $v_{n,m}$ es tal que cualquier función $F(x, y)$, derivable continuamente dos veces y que satisfaga a la condición de frontera, puede ser desarrollada en serie que converge en forma absoluta y uniforme, por las funciones $v_{n,m}$. Esta afirmación se puede fundamentar aplicando la teoría de las series múltiples de Fourier.

Demostremos que el sistema (19) contiene todas las funciones propias de nuestro problema sobre valores propios. Supongamos que existe una función propia u_0, que pertenece al valor propio λ_0. Como la función u_0 es ortogonal a todas las funciones propias que pertenecen a otros valores de λ, en su desarrollo según el sistema (19) quedará sólo un número finito de términos, que corresponden a funciones propias que pertenecen al valor propio $\lambda_{n,m}=\lambda_0$. Por esto, u_0 es una combinación lineal sólo de las funciones (19) que corresponden a $\lambda_{n,m}=\lambda_0$. De este modo, todas las funciones propias de la membrana rectangular se dan por la fórmula (19).

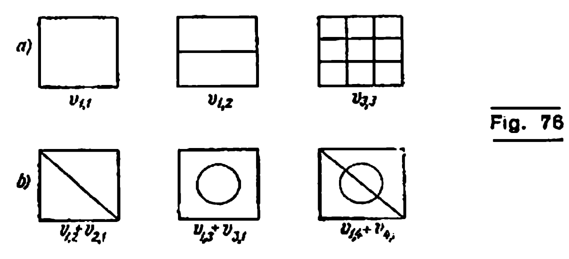


Fig. 76

Volviendo al problema original para la ecuación (10), se observa que las soluciones particulares

$$u_{n,m}=v_{n,m}(x, y)\left(\bar{B}_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at+\bar{\bar{B}}_{n,m}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at\right)$$

son ondas estacionarias, cuyo perfil se determina por las funciones propias $v_{n,m}$. Los lugares geométricos de los puntos dentro del rectángulo, en los cuales las funciones propias se anulan, se llaman líneas nodales. Consideremos, para mayor sencillez, un cuadrado de lado b ($b_1=b_2$). Las líneas nodales de la función

$$v_{n,m}=\frac{2}{b}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{b}x\operatorname{sen}\frac{m\pi}{b}y$$

son rectas paralelas a los ejes de coordenadas (fig. 76, a).

Para valores propios múltiples, la combinación lineal de funciones propias será también una función propia. Sus líneas nodales pueden tener una forma muy compleja (fig. 76, b).

La solución buscada de la ecuación (10) con las condiciones complementarias (11)—(13) tiene la forma

$$u(x, y, t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\bar{B}_{n,m}\cos\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at+\bar{\bar{B}}_{n,m}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_{n,m}}\,at\right)\times$$
$$\times\, v_{n,m}(x, y),$$

donde $v_{n,m}$ se determina por la fórmula (19), y los coeficientes $\bar{B}_{n,m}$ y $\bar{\bar{B}}_{n,m}$ son iguales a

$$\bar{B}_{n,m}=\int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\varphi(x, y)\,v_{n,m}(x, y)\,dx\,dy=$$
$$=\sqrt{\frac{4}{b_1b_2}}\int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\varphi(x, y)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{b_1}x\operatorname{sen}\frac{m\pi}{b_2}y\,dx\,dy.$$

$$\bar{\bar{B}}_{n,m}=\frac{1}{\sqrt{a^2\lambda_{n,m}}}\sqrt{\frac{4}{b_1b_2}}\int_0^{b_1}\int_0^{b_2}\psi(x, y)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{b_1}x\operatorname{sen}\frac{m\pi}{b_2}y\,dx\,dy.$$

3. Oscilaciones de una membrana circular. Al estudiar las oscilaciones de una membrana circular, es útil pasar a las coordenadas polares. Entonces, la ecuación de las oscilaciones se escribirá en la forma

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{20}$$

Buscaremos la solución de esta ecuación con las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u(r,\theta,0)&=f_1(r,\theta),\\ u_t(r,\theta,0)&=f_2(r,\theta)\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

y la condición de frontera

$$u(r_0,\ \theta,\ t)=0$$

(membrana de radio r_0 fija en su borde). Igual que en el caso de una membrana rectangular, aplicaremos la separación de las variables. Haciendo

$$u(r,\ \theta,\ t)=v(r,\ \theta)\ T(t),$$

se obtiene la ecuación para $T(t)$:

$$T''+a^2\lambda T=0,$$

$$T=C_1\cos\sqrt{a^2\lambda}\,t+C_2\operatorname{sen}\sqrt{a^2\lambda}\,t$$

y el siguiente problema sobre valores propios para la función $v(r,\ \theta)$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\lambda v=0 \quad (0<r<r_0),\\ &|v(0,\theta)|<\infty \qquad \text{(condición de acotación)},\\ &v(r_0,\theta)=0 \qquad \text{(condición de frontera)},\\ &v(r,\theta)=v(r,\theta+2\pi) \quad \text{(condición de periodicidad)}.\end{aligned}\right\}$$

La función v debe ser una función uniforme y derivable del punto; como θ es una coordenada cíclica, para la uniformidad de v se debe exigir que se cumpla la condición de periodicidad con período 2π, es decir, que $v(r,\ \theta+2\pi)=v(r,\ \theta)$.

Hagamos

$$v(r,\ \theta)=R(r)\,\Theta(\theta).$$

Sustituyendo esta forma de la solución en nuestra ecuación y dividiendo entre $R\Theta$, se obtiene:

$$\frac{r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{R}+\frac{\Theta''}{\Theta}+\lambda r^2=0.$$

De aquí se obtienen las ecuaciones

$$\Theta''+\mu^2\Theta=0;$$
$$\Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi);\ \Theta'(\theta)=\Theta'(\theta+2\pi);$$
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu^2}{r^2}\right)R=0,$$
$$R(r_0)=0,\quad |R(0)|<\infty.$$

Las soluciones periódicas no triviales para $\Theta(\theta)$ existen solamente para $\mu^2=n^2$ (n es un entero) y tienen la forma

$$\Theta_n(\theta)=D_{1n}\cos n\theta+D_{2n}\operatorname{sen} n\theta.$$

Obsérvese que al valor propio n^2 le corresponden dos funciones propias linealmente independientes: $\cos n\theta$ y $\operatorname{sen} n\theta$.

Para determinar la función $R(r)$, se tiene la ecuación

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(\lambda-\frac{n^2}{r^2}\right)R=0 \tag{23}$$

con las condiciones de frontera homogéneas

$$R(r_0)=0, \tag{24}$$
$$|R(0)|<\infty.$$

De este modo, para hallar la función $R(r)$ debemos resolver el problema sobre los valores propios.

La segunda condición que se impone a la función $R(r)$, la condición de acotación para $r=0$, está relacionada con el hecho de que $r=0$ es un punto singular de la ecuación; para dichos puntos es suficiente tomar la condición de acotación como condición de frontera (véase el Complemento II, I Parte).

Introduciendo la nueva variable

$$x=\sqrt{\lambda}\,r$$

y denotando

$$R(r)=R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)=y(x),$$

se obtiene, para determinar la función $y(x)$, la ecuación de las funciones cilíndricas de n-ésimo orden (véase el Complemento II, I Parte)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \tag{25}$$

con las condiciones de frontera complementarias

$$y(x_0)=0 \qquad (x_0=\sqrt{\lambda}\,r_0) \tag{26}$$
$$|y(0)|<\infty.$$

La solución general de la ecuación de las funciones cilíndricas tiene la forma

$$y(x)=d_1J_n(x)+d_2N_n(x), \tag{27}$$

donde $J_n(x)$ es la función de Bessel, y N_n, la de Neumann, de n-ésimo orden (véase el Complemento II, I Parte). De la segunda condición se deduce que $d_2=0$. La primera condición da:

$$J_n(\sqrt{\lambda}\,r_0)=0, \text{ o bien } J_n(\mu)=0 \tag{28}$$
$$(\mu=\sqrt{\lambda}\,r_0).$$

Si $\mu_m^{(n)}$ es la raíz m-ésima de la ecuación $J_n(\mu)=0$, entonces

$$\lambda_{n,m}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2. \tag{29}$$

A este valor propio le pertenece la función propia

$$R_{n,m}=y(\sqrt{\lambda}\,r)=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right). \tag{30}$$

Enunciemos las siguientes propiedades de las funciones propias (30) [1]:

1. Las funciones propias $R(r)$ que pertenecen a distintos valores propios λ son ortogonales, con densidad r:

$$\int_0^{r_0} rR_{nm_1}(r)\,R_{nm_2}(r)\,dr=0 \qquad (m_1\neq m_2),$$

o bien

$$\int_0^{r_0} rJ_n\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n)}}{r_0}r\right)J_n\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0}r\right)dr=0. \tag{31}$$

[1]) Véase el Complemento II, I parte, § 1.

2. La norma de estas funciones es igual a

$$\int_0^{r_0} rJ_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)dr=\frac{r_0^2}{2}[J'_n(\mu_m^{(n)})]^2. \qquad (31')$$

En particular, la norma de la función $J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right)$ es igual a

$$\int_0^{r_0} r\left[J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right)\right]^2 dr=\frac{r_0^2}{2}[J_1(\mu_m^{(0)})]^2. \qquad (32)$$

3. Cualquier función $f(r)$, continua en el intervalo $(0, r_0)$, que tenga derivadas primera y segunda continuas a trozos y que satisfaga a las condiciones de frontera del problema, se puede desarrollar en la serie que converge en forma absoluta y uniforme

$$f(r)=\sum_{m=1}^{\infty} f_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right), \qquad (33)$$

donde los coeficientes del desarrollo se determinan por la fórmula

$$f_m=\frac{\int_0^{r_0} rf(r)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)dr}{\frac{r_0^2}{2}[J'_n(\mu_m^{(n)})]^2}. \qquad (34)$$

Volviendo al problema sobre los valores propios para la membrana circular, se obtienen, para el valor propio,

$$\lambda_{n,m}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2,$$

las dos funciones propias

$$\bar{v}_{n,m}=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\cos n\theta, \quad \bar{\bar{v}}_{n,m}=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\operatorname{sen} n\theta. \qquad (35)$$

Formando su combinación lineal, se obtiene:

$$v_{n,m}(r,\theta)=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)(A_{n,m}\cos n\theta+B_{n,m}\operatorname{sen} n\theta). \qquad (36)$$

Calculemos la norma de la función propia $v_{n,m}$; a la vez, se obtendrá la demostración de la ortogonalidad de las funciones propias, que también se deduce de la teoría general. Para simpli-

ficar los cálculos, nos limitaremos a las funciones propias $\bar{v}_{n,m}$:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} \bar{v}_{n_1,m_1}\bar{v}_{n_2,m_2} r\,dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{r_0} J_{n_1}\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n_1)}}{r_0} r\right) J_{n_2}\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n_2)}}{r_0} r\right) r\,dr \int_0^{2\pi} \cos n_1\theta \cos n_2\theta\, d\theta =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{para } n_1 \neq n_2, \\ 0 & \text{para } n_1 = n_2,\ m_1 \neq m_2, \\ \dfrac{r_0^2}{2}[J'_n(\mu_m^{(n)})]^2\pi & \text{para } n_1 = n_2 = n \neq 0 \text{ y } m_1 = m_2 = m, \\ \dfrac{r_0^2}{2}[J'_0(\mu_m^{(n)})]^2 2\pi & \text{para } n_1 = n_2 = 0 \quad \text{y } m_1 = m_2 = m. \end{cases} \qquad (37)$$

Para las funciones

$$\bar{\bar{v}}_{n,m} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) \operatorname{sen} n\theta$$

tienen lugar condiciones análogas. La expresión para la norma se puede escribir como sigue

$$\iint_\Sigma v_{n,m}^2\, d\sigma = \frac{r_0^2}{2}\pi\varepsilon_n [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2 \quad (d\sigma = r\,dr\,d\theta). \qquad (38)$$

donde

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2 \text{ para } n = 0, \\ 1 \text{ para } n \neq 0. \end{cases}$$

De la teoría general se deduce que **cualquier función continua $F(r, \theta)$ con derivadas primera y segunda continuas, que satisfaga a las condiciones de frontera de problema, se puede desarrollar en la serie que converge en forma absoluta y uniforme**

$$F(r, \theta) = \sum_{n,m} (A_{n,m}\bar{v}_{n,m}(r, \theta) + B_{n,m}\bar{\bar{v}}_{n,m}(r, \theta)), \qquad (39)$$

tomada por las funciones propias del problema sobre los valores propios para el círculo.

Los coeficientes del desarrollo se calculan por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} A_{n,m} &= \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_0} F(r,\theta) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\cos n\theta r\,dr\,d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2}, \\ B_{n,m} &= \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_0} F(r,\theta) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\operatorname{sen} n\theta r\,dr\,d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2}. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Obsérvese que la función

$$v_{0\,m}(r,\theta) = J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right)$$

no depende de θ.

Si la función dada F depende sólo de r, $F = F(r)$, entonces la serie que expresa el desarrollo de F por las funciones propias contendrá sólo las funciones $v_{0,m}$:

$$F(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{0,m} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right), \tag{41}$$

donde

$$A_{0,m} = \frac{\int\limits_0^{r_0} F(r) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right) r\,dr}{\frac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)})} \tag{42}$$

Los demás coeficientes $A_{n,m}$ y $B_{n,m}$ son iguales a cero.

Volviendo al problema inicial de las oscilaciones de una membrana con desviación y velocidad iniciales dadas, se puede escribir su solución en la forma

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{v}_{n,m}(r,\theta)\left(A_{n,m}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t + B_{n,m}\operatorname{sen}\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t\right) +$$
$$+ \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{\bar{v}}_{n,m}(r,\theta)\left(C_{n,m}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t + D_{n,m}\operatorname{sen}\frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0}t\right).$$

Los coeficientes $A_{n,m}$, $B_{n,m}$, $C_{n,m}$, $D_{n,m}$ se determinan de las condiciones iniciales

$$u(r, \theta, 0) = \sum_{n,\,m=0}^{\infty} (A_{n,\,m}\bar{v}_{n,\,m} + C_{n,\,m}\bar{\bar{v}}_{n,\,m}) = f_1(r, \theta)$$

$$u_t(r, \theta, 0) = \sum_{n,\,m=0}^{\infty} (B_{n,\,m}\bar{v}_{n,\,m} + D_{n,\,m}\bar{\bar{v}}_{n,\,m}) \frac{a\mu_m^{(n)}}{r_0} = f_2(r, \theta)$$

según las fórmulas

$$A_{n,\,m} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} f_1(r, \theta) J_n(\sqrt{\lambda_{n,\,m}}\, r) \cos n\theta\, r\, dr\, d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n [J_n'(\sqrt{\lambda_{n,\,m}}\, r_0)]^2};$$

$$C_{n,\,m} = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} f_1(r, \theta) J_n(\sqrt{\lambda_{n,\,m}}\, r) \operatorname{sen} n\theta\, r\, dr\, d\theta}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n [J_n'(\sqrt{\lambda_{n,\,m}}\, r_0)]^2}.$$

Para $a\sqrt{\lambda_{n,\,m}}\, B_{n,\,m}$ y $a\sqrt{\lambda_{n,\,m}}\, D_{n,\,m}$ respectivamente, tienen lugar fórmulas análogas.

EJERCICIOS DEL CAPITULO V

1. Resolver el problema con condiciones iniciales para la ecuación de las oscilaciones $u_{tt} = a^2\Delta u$ en el espacio, suponiendo que la velocidad inicial es igual a cero, y las desviaciones iniciales $u\,|_{t=0} = \varphi$ tienen la forma

a) $\varphi = \begin{cases} 1 & \text{dentro de la esfera unitaria,} \\ 0 & \text{fuera de la esfera unitaria,} \end{cases}$

o bien

b) $\varphi = \begin{cases} A\cos\dfrac{\pi}{2r_0}r & \text{dentro de una esfera de radio } r_0, \\ 0 & \text{fuera de la esfera de radio } r_0. \end{cases}$

2. Resolver el problema de las oscilaciones del semiespacio $z > 0$ con la condición homogénea de frontera de primera o de segunda especie, si están dadas

a) una perturbación local, es decir, la velocidad inicial y la desviación inicial en cierta región T_0;

b) una fuerza concentrada, que actúa de acuerdo con una ley arbitraria.

3. Resolver el mismo problema para la capa $-l \leqslant z \leqslant l$.

4. Resolver la ecuación de las oscilaciones en una región que representa una cuña de ángulo al vértice $\frac{\pi}{2}$ y, en general, $\frac{\pi}{n}$ (n es un entero), si se dan condiciones de frontera homogéneas de primera o de segunda especie, así como también la velocidad y desviación iniciales.

5. Deducir el análogo de la fórmula integral (3) del § 2 para la ecuación

$$u_{tt} = a^2\Delta u + cu, \text{ donde } c = \text{const}.$$

Considerar el caso $c < 0$ y hallar la solución del problema con condiciones iniciales para la ecuación no homogénea. Dar una interpretación física de los resultados obtenidos.

6. Hallar la función $u(\rho, \varphi, t)$ que caracteriza las oscilaciones de una membrana bajo la acción de un impulso K, concentrado

a) en el centro de una membrana circular,
b) en un punto arbitrario de una membrana circular,
c) en un punto arbitrario de una membrana rectangular.

7. Hallar las frecuencias propias y las funciones propias de las membranas que tiene la forma de

a) un semicírculo,
b) un anillo,
c) un sector circular,
d) un sector anular.

Analizar los problemas de contorno primero y segundo.

8. Hallar las oscilaciones permanentes de una membrana circular (membrana de un micrófono) bajo la acción de una fuerza periódica, distribuida sobre la membrana con densidad constante $f = A \operatorname{sen} \omega t$. Resolver el mismo problema, si $f = A\left(1 - \frac{r^2}{c^2}\right) \operatorname{sen} \omega t$, donde c es el radio de la membrana.

9. Deducir la ecuación de la propagación del sonido en un medio que se mueve con velocidad constante. Transformar la ecuación obtenida, pasando a un sistema de coordenadas que se mueva conjuntamente con el medio.

APENDICES DEL CAPITULO V

I. REDUCCION DE LAS ECUACIONES DE LA TEORIA DE LA ELASTICIDAD A LAS ECUACIONES DE LAS OSCILACIONES

La teoría de la elasticidad tiene por fin estudiar las deformaciones y movimientos que surgen en los cuerpos elásticos, mediante métodos matemáticos. Las deformaciones y movimientos que surgen bajo la acción de fuerzas exteriores, se pueden caracterizar mediante el *vector de desplazamientos* $\mathbf{u}$, cuyas proyecciones

sobre los ejes coordenados x, y, z denotaremos mediante $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$. Estos desplazamientos surgen en un cuerpo elástico bajo la acción de las fuerzas internas (*tensiones*), que forman el tensor simétrico de tensiones

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

donde σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} son las componentes de la fuerza (tensión) que actúa en la unidad de superficie del elemento de superficie perpendicular al eje x; análogamente τ_{yx}, σ_y, τ_{yz} y τ_{zx}, τ_{zy}, σ_z son las componentes de las tensiones que actúan sobre la unidad de superficie de los elementos de superficie perpendiculares a los ejes y y z. Las componentes σ_x, σ_y, σ_z se llaman *tensiones normales*, y τ_{xy}, τ_{xz}, etc. son llamadas *tensiones de sujeción*. Considerando el elemento de volumen y escribiendo para éste la ecuación del movimiento, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X, \\ \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y, \\ \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

donde ρ es la densidad volumétrica en el punto (x, y, z); X, Y, Z son las componentes de las fuerzas volumétricas exteriores. El nexo entre las tensiones que surgen en una deformación y sus características se da por la ley de Hooke, que se escribe en la forma siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left\{\varepsilon_x+\frac{\theta}{m-2}\right\}, & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= 2G\left\{\varepsilon_y+\frac{\theta}{m-2}\right\}, & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= 2G\left\{\varepsilon_z+\frac{\theta}{m-2}\right\}, & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Aquí las magnitudes

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

forman el tensor simétrico de las deformaciones

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

En las fórmulas (2) se utilizan las siguientes notaciones: G es el *módulo de desplazamiento*, m, el coeficiente que caracteriza la *compresión* del cuerpo en dirección transversal, cuando se le alarga en dirección longitudinal. $\theta = \operatorname{div} u = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$.

A las ecuaciones (1) y (2) deben agregarse, además, las condiciones de frontera (en la frontera se han dado, por ejemplo, los desplazamientos u, v, w, o las fuerzas superficiales, etc.), en las cuales no nos detendremos aquí.

Las ecuaciones (1) y (2) forman un sistema completo de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para las tensiones y las deformaciones. Sustituyendo las expresiones para las tensiones de (2) en la ecuación del movimiento (1) y teniendo en cuenta las relaciones (3), se obtiene el sistema de ecuaciones para los desplazamientos:

$$\left.\begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=G\left\{\Delta u+\frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial x}\right\}+X, \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=G\left\{\Delta v+\frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial y}\right\}+Y, \\ \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=G\left\{\Delta w+\frac{m}{m-2} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right\}+Z. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Con frecuencia se introducen, en lugar de las constantes G y m, las llamadas *constantes de Lamé* λ y μ, relacionadas con éstas por las fórmulas

$$\mu = G, \qquad \lambda = \frac{2}{m-2} G$$

Esto permite escribir el sistema anterior de ecuaciones en forma de una sola ecuación vectorial:

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}, \tag{5}$$

donde $\boldsymbol{u}$ es vector de desplazamiento, de componentes u, v, w y $\boldsymbol{F}$, el vector de las fuerzas volumétricas, de componentes X, Y, Z. La ecuación (5) se llama comúnmente ecuación de Lamé.

Mostremos que las ecuaciones (5) se pueden reducir a ecuaciones ondulatorias para funciones elegidas de modo adecuado[1]).

Un vector arbitrario $\boldsymbol{F}$ siempre se puede representar en forma de la suma

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U + \operatorname{rot} \boldsymbol{L},$$

donde U es el potencial escalar, y $\boldsymbol{L}$, el vectorial.

Hagamos

$$\boldsymbol{u} = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \boldsymbol{A},$$

donde

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta\Phi + U,$$

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \mu \Delta \boldsymbol{A} + \boldsymbol{L}.$$

No es difícil comprobar, mediante sustitución directa, que el vector $\boldsymbol{u}$, determinado de esta forma, satisface efectivamente a las ecuaciones de elasticidad (4).

Si no hay fuerzas volumétricas, para los potenciales Φ y $\boldsymbol{A}$ se obtienen las ecuaciones homogéneas de las oscilaciones

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \Delta\Phi,$$

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \mu \Delta \boldsymbol{A}.$$

La ecuación de las oscilaciones para el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ en ciertos casos (por ejemplo, en el sistema de coordenadas cartesianas) se divide en tres ecuaciones escalares. Sin embargo, el problema de la reducción de las ecuaciones de la elasticidad a ecuaciones escalares aisladas de las oscilaciones no puede ser

---

[1]) Véase S. L. Sóbolev, *Ciertos Problemas de la Teoría de la Propagación de las Oscilaciones*; F. Frank y R. Mises, *Ecuaciones Diferenciales e Integrales de la Física matemática*, t. XII, ed. Gostejizdat, 1937.

analizado hasta el fin sin tomar en cuenta las condiciones de frontera, las cuales pueden enlazar distintas componentes y, con esto, representar grandes dificultades para la separación total de las ecuaciones.

II. ECUACIONES DEL CAMPO ELECTROMAGNETICO

1. Ecuaciones del campo electromagnético y condiciones de frontera. El campo electromagnético se caracteriza por los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ de intensidad de los campos eléctrico y magnético y los vectores $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{B}$ de inducción eléctrica y magnética. El sistema completo de ecuaciones de Maxwell, que relacionan estas magnitudes, tiene la forma

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{(e)}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \tag{4}$$

donde $\boldsymbol{j}$ es la densidad volumétrica de las corrientes de conducción, $\boldsymbol{j}^{(e)}$, la densidad de las corrientes que surgen por la acción de f.e.m. exteriores, ρ, la densidad volumétrica de las cargas, y c, la velocidad de la luz en el vacío. En lo sucesivo, consideraremos con frecuencia que $\boldsymbol{j}^{(e)} = 0$.

A estas ecuaciones hay que agregar las llamadas ecuaciones materiales del campo:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{7}$$

donde ε es la constante dieléctrica, μ, la permeabilidad magnética, y σ, la conductibilidad del medio. En lo sucesivo, supondremos que el medio es homogéneo e isótropo. En este caso, es $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$. Con frecuencia, estudiaremos los procesos electromagnéticos en el vacío, donde $\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$, con la condición de ausencia de cargas y de corrientes. En este caso, las ecuaciones de Maxwell se simplifican:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0.$$

Las ecuaciones (1) y (4) son compatibles, puesto que entre ρ y j existe la relación

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0,$$

que expresa la ley de la conservación de la carga eléctrica.

Las leyes del campo electromagnético, expresadas en la forma diferencial por las ecuaciones (1) — (4), se pueden expresar en la forma integral

$$\oint_C H_s \, ds = \frac{4\pi}{c} \iint_\Sigma i_n \, d\sigma, \tag{1'}$$

$$\oint_C E_s \, ds = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_\Sigma B_n \, d\sigma = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \tag{2'}$$

donde

$$i = j_d + j = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} + j \tag{8}$$

es la corriente total, $j_d = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t}$, la corriente de desplazamiento. La integración se efectúa en el contorno C y sobre la superficie Σ, delimitada por este contorno; $\Phi = \iint_\Sigma B_n \, d\sigma$ es el flujo de inducción que atraviesa el contorno C. Denotando por T cierto volumen cerrado, y por Σ la superficie que lo delimita, tendremos, en lugar de (3) y (4):

$$\iint_\Sigma B_n \, d\sigma = 0, \tag{3'}$$

$$\iint_\Sigma D_n \, d\sigma = 4\pi \iiint_T \rho \, d\tau = 4\pi e, \tag{4'}$$

donde e es la carga total dentro del volumen T.

Las ecuaciones (1') — (4') tienen un significado físico sencillo y son la expresión matemática de los datos empíricos fundamentales, que fueron la base de la deducción de las ecuaciones de Maxwell. Así, la ecuación (1') es la generalización de la conocida ley de Biot y Savart, la ecuación (2') expresa la ley de Faraday de la inducción electromagnética, la (4') se puede deducir directamente de la ley de Coulomb. La ecuación (3') es consecuencia de que las líneas de fuerza del campo magnético son cerradas.

Si el medio no es homogéneo, a la ecuación de Maxwell hay que agregar las condiciones de conjunción. En la frontera de

separación de dos medios distintos (1) y (2), deben cumplirse las siguientes condiciones:

$$E_s^{(1)} = E_s^{(2)} \tag{9}$$

(continuidad de las componentes tangenciales del vector $\boldsymbol{E}$),

$$H_s^{(1)} = H_s^{(2)} \tag{10}$$

(continuidad de las componentes tangenciales del vector $\boldsymbol{H}$), así como también

$$B_{n_1}^{(1)} = B_{n_2}^{(2)} \tag{11}$$

(continuidad de las componentes normales del vector $\boldsymbol{B}$)

$$D_{n_1}^{(1)} - D_{n_2}^{(2)} = 4\pi\nu, \text{ o bien } \varepsilon_1 E_{n_1}^{(1)} - \varepsilon_2 E_{n_2}^{(2)} = 4\pi\nu, \tag{12}$$

donde n_1 y n_2 son las normales a las superficies de separación de los dos medios, estando n_1 dirigida hacia el interior del primer medio, y n_2, hacia el interior del segundo; ν es la densidad superficial de las cargas. Estas condiciones se obtienen con facilidad de las ecuaciones (1′) — (4′).

Las ecuaciones de Maxwell, conjuntamente con las condiciones de frontera, permiten hallar unívocamente el campo electromagnético en el espacio, partiendo de un estado inicial dado de éste. Para determinar unívocamente el campo, es suficiente utilizar las condiciones (9) y (10) de continuidad de las componentes tangenciales del campo.

Si el proceso electromagnético es estático, es decir, no varía con el transcurso del tiempo, las ecuaciones de Maxwell toman la forma

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{(e)},$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} = 0.$$

Si, además, el medio no tiene conductibilidad, es decir, si $\sigma = 0$, obtenemos dos sistemas independientes de ecuaciones para los campos eléctrico y magnético:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \varepsilon \boldsymbol{E} &= 4\pi\rho \end{aligned}\right\} \text{ (ecuaciones de la electrostática),}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{(e)}, \\ \operatorname{div} \mu \boldsymbol{H} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ (ecuaciones de la magnetostática).}$$

Las ecuaciones de la electrostática fueron estudiadas en el capítulo IV y en sus apéndices.

En el caso de un medio homogéneo, no es difícil obtener las ecuaciones para cada vector $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ por separado. Supongamos que $\rho = 0$, $\boldsymbol{j}^{(e)} = 0$.

Aplicando a la ecuación (1) la operación rot, se tiene:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{c}\sigma\operatorname{rot}\boldsymbol{E},$$

de donde se obtiene, en virtud de la ecuación (2) y de la relación $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{H} - \Delta\boldsymbol{H}$:

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{H} - \Delta\boldsymbol{H} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},$$

o bien

$$\Delta\boldsymbol{H} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t} \qquad \left(a^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu}\right), \tag{13}$$

puesto que

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0.$$

Análogamente se deduce la ecuación para $\boldsymbol{E}$:

$$\Delta\boldsymbol{E} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{14}$$

En particular, la ecuación (13) ó (14) será satisfecha por las componentes E_x, E_y, E_z y H_x, H_y, H_z:

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{15}$$

donde u es una de las componentes E_x, E_y, E_z, o bien H_x, H_y, H_z.

El carácter del proceso se determina por las propiedades del medio. Si éste no es conductor ($\sigma = 0$), se obtiene la ecuación habitual de las oscilaciones:

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{16}$$

es decir, los procesos electromagnéticos se propagan en un medio dieléctrico sin amortiguación, con velocidad $a = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ y, en particular, en el vacío, con la velocidad de la luz c.

Si el medio posee gran conductibilidad y se pueden despreciar las corrientes de desplazamiento en comparación con las de conductibilidad, tendremos una ecuación de tipo parabólico:

$$\Delta u = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}. \qquad (17)$$

En el caso general, cuando las corrientes de conductibilidad y las de desplazamiento son del mismo orden, la ecuación (15) es de tipo hiperbólico y describe los procesos de propagación con amortiguación, causada por la disipación de la energía, a consecuencia de la conductibilidad.

Para los procesos permanentes, por ejemplo, en los problemas de la difracción de

$$u = v(x, y, z)\, e^{i\omega t},$$

se obtiene la ecuación de tipo elíptico

$$\Delta v + (k^2 + iq^2)\, v = 0, \qquad (18)$$

donde

$$k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}; \qquad q^2 = \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}. \qquad (19)$$

Los campos estáticos, como ya se indicó en el capítulo IV, se describen mediante la ecuación de Laplace.

2. Potenciales del campo electromagnético. Para la determinación del campo electromagnético, debemos hallar seis magnitudes, que constituyen las componentes de los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$. En varios casos se puede, sin embargo, reducir este problema a la determinación de cuatro, y a veces de menor cantidad de magnitudes. Con este fin, se introducen los potenciales del campo: el vectorial $\boldsymbol{A}$ y el escalar φ, del siguiente modo. Tomemos la ecuación de Maxwell en un medio homogéneo, por ejemplo, en el vacío. De la ecuación (3),

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$$

se deduce que el vector $\boldsymbol{H}$ es solenoidal, por lo cual puede ser representado mediante otro vector $\boldsymbol{A}$, en la forma

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}. \qquad (20)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (2),

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t},$$

se obtiene:

$$\operatorname{rot}\left[\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right]=0,$$

es decir el vector $\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$ es potencial, por lo que se lo puede representar en forma del gradiente de cierta función escalar φ:

$$\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}=-\operatorname{grad}\varphi, \tag{21}$$

de donde se deduce que

$$\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}.$$

El potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ y el escalar φ, introducidos de este modo, no se determinan unívocamente. En efecto, de las fórmulas (20) y (21) se observa que se obtienen los mismos campos, si se sustituye $\boldsymbol{A}$ y φ por los potenciales

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\operatorname{grad}F, \qquad \varphi'=\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t},$$

siendo F una función arbitraria. Para eliminar esta indeterminación, se impone a los potenciales $\boldsymbol{A}$ y φ la condición complementaria

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}=0, \tag{22}$$

llamada con frecuencia condición de Lorentz. Demostremos que, si se cumple esta condición, los potenciales $\boldsymbol{A}$ y φ satisfacen a las ecuaciones

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\rho, \tag{23}$$

$$\Delta\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{24}$$

donde ρ y $\boldsymbol{j}$ son las densidades de las cargas y las corrientes dadas.

Sustituyendo las expresiones (20) y (21) en la ecuación (1),

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} \tag{1}$$

y aplicando la identidad vectorial

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A},$$

tendremos:

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - \Delta \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j},$$

de donde, en virtud de la condición (22) se deduce, precisamente, la ecuación (24). Sustituyendo ahora la expresión (21) en la cuarta ecuación de Maxwell,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho, \tag{4}$$

y teniendo en cuenta la condición (22), se obtiene la ecuación (23) para φ.

En el caso de un medio homogéneo conductor ($\sigma \neq 0$), los potenciales se introducen mediante las relaciones

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{25}$$

$\boldsymbol{A}$ y φ están ligados entre sí por la relación

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \varphi = 0 \tag{26}$$

y satisfacen a las ecuaciones

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{4\pi\mu}{c} \boldsymbol{j}^{(e)}, \tag{27}$$

$$\Delta \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}, \tag{28}$$

a las cuales se aplica todo lo dicho más arriba con respecto a las ecuaciones (23) y (24).

Si no hay cargas libres ($\rho = 0$), el potencial φ será $\varphi = 0$, y los vectores del campo se expresarán mediante un solo vector-

potencial A, que satisface a la condición complementaria

$$\operatorname{div} A = 0.$$

En varios casos, los campos magnéticos se pueden describir mediante un potencial vectorial que tiene sólo una componente diferente de cero.

Algunos ejemplos se considerarán en lo sucesivo (véase también el apéndice I del cap. VII).

3. Campo electromagnético de un oscilador.

1. En la teoría de la irradiación de las ondas electromagnéticas se utiliza frecuentemente el concepto de oscilador o vibrador. Este concepto está estrechamente ligado con el concepto de las corrientes lineales. Un oscilador es una corriente lineal de longitud infinitamente pequeña.

Consideremos una corriente rectilínea L, cuya intensidad varía con el transcurso del tiempo. En el modelo más sencillo, se supone que la intensidad de la corriente es invariante a lo largo del conductor.

Una corriente constante a lo largo del conductor está ligada con la presencia de cargas en sus extremos, que varían con el transcurso del tiempo. En analogía con el dipolo electrostático, que es el conjunto de dos cargas, $+e$ y $-e$, el oscilador se puede caracterizar por el momento

$$p(t) = e(t)\, l. \tag{1}$$

La intensidad de la corriente en el oscilador, evidentemente, es igual a

$$J(t) = \dot{e}(t),$$

de forma que

$$\frac{dp}{dt} = J(t)\, l. \tag{2}$$

El producto $J(t)\, l = j_0(t)$, se llama momento de la corriente.

2. Hallemos el campo eléctrico que se genera por un oscilador de momento

$$p = p_0 f(t) \tag{3}$$

en el espacio infinito, suponiendo que $\sigma = 0$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ (vacío).

Consideremos el problema sobre la generación de un campo electromagnético por una corriente rectilínea L, cuyo caso límite es el oscilador.

Fuera de la corriente L, el campo electromagnético se determina por las ecuaciones de Maxwell

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad & \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad & \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

En la línea de corriente L, los vectores del campo $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{E}$ deben tener una particularidad, que se caracteriza por que la circulación en una circunferencia K_ε infinitamente pequeña, que abarque la línea de corriente L, tiene el siguiente valor:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{K_\varepsilon} H_s\, ds = \frac{4\pi}{c} J, \tag{5}$$

donde $J = J(t)$ es la intensidad de la corriente.

De esta condición se deduce que la componente H_s, en la corriente, tiene una singularidad del tipo

$$H_s \approx \frac{2J}{c\rho}, \tag{6}$$

donde $\rho = |\overrightarrow{M_0P}|$, M_0 es un punto en la línea L, P, un punto en K_ε (para $\rho = \varepsilon$).

Para determinar unívocamente el campo, hay que agregar las condiciones iniciales, que supondremos nulas.

Para resolver este problema, es conveniente introducir los potenciales $\boldsymbol{A}$ y φ, mediante los cuales, como ya vimos (pág. 497), los campos se expresan de la siguiente manera:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

siendo

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \tag{8}$$

El potencial vectorial, fuera de la corriente L, satisface a la ecuación de las oscilaciones

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{9}$$

Introduzcamos un sistema de coordenadas cartesianas, dirigiendo el eje z a lo largo de la corriente L. Hagamos

$$A = A(x, y, z)\, z^0,$$

donde z^0 es el vector unitario del eje z.

La función $A(x, y, z)$ satisface, evidentemente, a la ecuación homogénea de las oscilaciones

$$\Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0, \tag{10}$$

fuera de la línea de la corriente L. Para obtener la singularidad del vector A en la corriente, utilicemos la condición (6). De la ecuación (7) se deduce que

$$H_s = \frac{\partial A}{\partial \rho}.$$

Utilizando ahora la condición (6), se halla que la función $A(x, y, z)$ debe tener, en los puntos de la línea L, una singularidad del tipo

$$A \approx \frac{2J}{c} \ln \rho. \tag{11}$$

Buscaremos el potencial A en la forma

$$A(P, t) = \int_L A_1(P, M, t)\, dl_M \qquad (P = P(x, y, z)), \tag{12}$$

donde $A_0(P, M, t) = A_1(P, M, t)\, dl_M$ es el potencial vectorial de la corriente elemental del oscilador, cuyo momento es igual a $J_0 = J\, dl$.

Para que el potencial A tenga la singularidad necesaria, la función $A_0(P, M, t)$ debe tener una singularidad del tipo

$$A_0(P, M, t) \approx \frac{J_0(t)}{cR_{PM}}. \tag{13}$$

En efecto, suponiendo que A_0 tiene la singularidad indicada y calculando, por la fórmula (12), el valor de A en las proximidades de la corriente L $(0 < z < l)$, se obtiene:

$$A \approx J \int_0^l \frac{1}{cR_{MP}}\, d\zeta = \frac{J}{c} \int_0^l \frac{d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2}} =$$

$$= \frac{J}{c} \ln \left[z - \zeta + \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2} \right]_0^l = \frac{J}{c} \ln \frac{z - l + \sqrt{\rho^2 + (z-l)^2}}{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}} =$$

$$= \frac{J}{c} \ln \frac{(l-z)\left[-1 + 1 + \dfrac{\rho^2}{2(l-z)^2} + \dots\right]}{z + \sqrt{\rho^2 + z^2}} = \frac{2J}{c} \ln \rho + \dots,$$

donde los puntos suspensivos denotan los términos que no se hacen infinitos cuando $\rho = 0$.

3. De este modo, la función $A_0(P, M, t)$ debe satisfacer, con respecto a las variables $P(x, y, z)$, t, a la ecuación de las oscilaciones

$$\Delta A_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_0}{\partial t^2} = 0 \tag{14}$$

en todas partes, a excepción del punto M; en dicho punto, ésta debe tener una singularidad del tipo

$$A_0 \approx \frac{J_0(t)}{cR_{MP}}. \tag{15}$$

Las condiciones iniciales, en virtud de lo expuesto más arriba, son nulas.

La solución de este problema, como vimos en el capítulo V, de representa en forma del potencial con retardo

$$A_0(M, P, t) = \frac{J_0\left(t - \dfrac{R_{MP}}{c}\right)}{cR_{MP}}. \tag{16}$$

Como fue indicado más arriba, el momento de corriente es igual a

$$J_0(t) = J(t)\, dl = \frac{dp}{dt} = p_0 \mathring{f}(t). \tag{17}$$

De esta manera, el potencial vectorial del oscilador se puede representar también en la forma

$$A_1 = \frac{p_0 \mathring{f}\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{cr}. \tag{18}$$

Con frecuencia se utiliza, en lugar del potencial vectorial, el potencial de polarización, o vector de Hertz $\mathbf{\Pi}$, haciendo

$$A = \frac{1}{c}\frac{\partial \Pi}{\partial t}. \tag{19}$$

El vector $\mathbf{\Pi}$ satisface también a la ecuación

$$\Delta \Pi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = 0 \tag{20}$$

y está ligado con el potencial escalar por la fórmula

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{\Pi}. \tag{21}$$

Los vectores del campo $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$ se expresan mediante el potencial de polarización por las fórmulas

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{\Pi} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{\Pi}, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial \Pi}{\partial t}. \tag{23}$$

Teniendo en cuenta la fórmula (18), se obtiene la siguiente expresión del potencial de polarización para el oscilador:

$$\mathbf{\Pi}_0 = \frac{\boldsymbol{p}_0 f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r},$$

o bien

$$\mathbf{\Pi}_0 = \frac{\boldsymbol{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}. \tag{24}$$

4. Para el cálculo de los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{H}$, pasemos al sistema de coordenadas esféricas (r, ϑ, φ) con centro en el oscilador y cuyo eje z $(\vartheta = 0)$ está dirigido a lo largo del vector $\boldsymbol{p}_0$ (fig. 77). Designemos por $\boldsymbol{i}_r$, $\boldsymbol{i}_\vartheta$, $\boldsymbol{i}_\varphi$ los vectores unitarios del sistema de coordenadas esféricas.

El vector $\mathbf{\Pi}_0$, paralelo al $\boldsymbol{p}$, puede ser representado en la forma

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_0 &= \Pi_0 \cos\vartheta\, \boldsymbol{i}_r - \Pi_0 \operatorname{sen}\theta\, \boldsymbol{i}_\vartheta, \\ \Pi_0 &= |\mathbf{\Pi}_0|. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

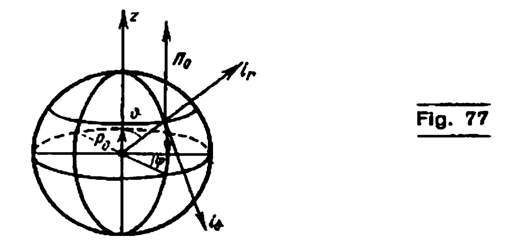


Fig. 77

Sustituyendo la expresión (25) en las fórmulas (22) y (23), aplicando la expresión del operador diferencial rot F en el sistema de coordenadas esféricas:

$$\operatorname{rot} F = \frac{1}{r \operatorname{sen} \vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\operatorname{sen} \vartheta F_\varphi) - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi}\right] i_r + \\ + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right] i_\vartheta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\vartheta) - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta}\right] i_\varphi$$

y teniendo en cuenta que $\Pi_0 = \Pi_0(r, t)$, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= -\frac{2\cos\vartheta}{r}\frac{\partial \Pi_0}{\partial r}, \\ E_\vartheta &= \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Pi_0}{\partial r}\right), \quad E_\varphi = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

$$\left.\begin{aligned} H_r &= 0, \quad H_\vartheta = 0, \\ H_\varphi &= -\operatorname{sen}\vartheta\frac{1}{c}\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial r\,\partial t}. \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

De las ecuaciones (26) y (27) se deduce que los campos eléctrico y magnético del oscilador son perpendiculares.

5. Analicemos un caso particular, cuando el momento del dipolo depende en forma periódica del tiempo:

$$p(t) = p_0 e^{-i\omega t}.$$

En esto caso, las fórmulas (26) y (27) nos dan:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= 2\cos\vartheta\left(\frac{1}{r^2}-\frac{ik}{r}\right)\Pi_0, \\ E_\vartheta &= \operatorname{sen}\vartheta\left(\frac{1}{r^2}-\frac{ik}{r}-k^2\right)\Pi_0 \quad \left(k=\frac{\omega}{c}\right), \\ H_\varphi &= ik\operatorname{sen}\vartheta\left(ik-\frac{1}{r}\right)\Pi_0, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

donde

$$\Pi_0 = p_0\frac{e^{ikr}}{r}i^{-i\omega t}. \tag{29}$$

Partiendo de las fórmulas (28), es fácil establecer las particularidades de la estructura del campo del oscilador. A distancias pequeñas en comparación con la longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ $(kr \ll 1)$, en las fórmulas (28) podemos tomar sólo un término Las fórmulas que se obtienen entonces para la intensidad del campo eléctrico corresponden al campo de un dipolo estático, cuyo momento eléctrico p es igual al valor instantáneo del momento del oscilador $p(t)$. Para la intensidad del campo magnético, se obtiene una expresión que corresponde a la ley de Biot y Savart. A grandes distancias del dipolo, $R \gg \lambda$ $(kr \gg 1)$, en la fórmula (28) se pueden despreciar todos los términos de orden mayor que $\frac{1}{r}$. Entonces, se obtiene:

$$E_r = 0, \quad E_\vartheta = H_\varphi = -k^2\operatorname{sen}\vartheta\Pi_0, \tag{30}$$

es decir, el campo se vuelve transversal con respecto a la dirección de propagación. Estas regiones alejadas del campo, en donde el campo de irradiación se hace transversal, se llama *zona ondulatoria del oscilador*. Para calcular el *flujo de energía* a través de la superficie de una esfera de radio R con centro en el oscilador, hay que calcular el vector de Umov-Poynting

$$S = \frac{c}{4\pi}|[EH]| = \frac{c}{4\pi}EH$$

e integrar esta expresión sobre la esfera.

De las fórmulas (29) y (30) se sigue que, en la zona ondulatoria, la parte real de los vectores H_φ y E_ϑ se determina por la

expresión

$$H_\varphi = E_\vartheta = -\frac{\omega^2 \operatorname{sen}\vartheta}{c^2 r} p_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

de donde

$$S = \frac{p_0^2\omega^4}{4\pi}\frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{R^2c^3}\cos^2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

El flujo de energía a través de la esfera de radio R, en el transcurso de un período completo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, se determinará por la expresión

$$\sum = \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_0^\pi \int_0^{2\pi} SR^2 \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{2p_0^2\omega^4}{3c^3}\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) dt,$$

o bien

$$\sum = \frac{p_0^2\omega^4}{3c^3}.$$

La energía que irradia un oscilador armónico es proporcional a la cuarta potencia de la frecuencia:

$$\Sigma \sim \omega^4,$$

o bien

$$\sum \sim \frac{1}{\lambda^4},$$

donde λ es la longitud de onda.

CAPITULO VI

PROPAGACION DEL CALOR EN EL ESPACIO

§ 1. PROPAGACION DEL CALOR EN EL ESPACIO NO ACOTADO

1. Función de la influencia de temperatura. En el capítulo III fue demostrado que el proceso de propagación del calor en un espacio homogéneo e isótropo se determina por la ecuación de la conducción del calor

$$u_t = a^2 \Delta u \qquad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right), \tag{1}$$

donde $u(M, t)$ es la temperatura del punto $M(x, y, z)$ en el momento t, ρ, la densidad, c, el coeficiente de capacidad calorífica, $k = \text{const}$ y $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ son los coeficientes de conductividad térmica y de conductividad de temperatura. La ecuación (1) admite también una interpretación de difusión. En este caso, u es la concentración de la sustancia que se difunde, $a^2 = D$, el coeficiente de difusión.

Consideremos el siguiente problema en el espacio infinito: **hallar la solución de la ecuación no homogénea de la conducción del calor**

$$u_t = a^2 \Delta u + \frac{f}{c\rho} \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right), \quad -\infty < x, y, z < \infty, \ t > 0 \tag{2}$$

(f es la densidad de las fuentes térmicas), con la condición inicial

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \tag{3}$$

La solución de este problema se puede representar en forma de la suma

$$u = u_1 + u_2,$$

donde u_1 es la solución de la ecuación homogénea (1) con condiciones iniciales no homogéneas y u_2, la solución de la ecuación

no homogénea (2) con condiciones iniciales nulas. Al estudiar los problemas unidimensionales respectivos, hemos visto que para resolverlos es suficiente determinar la función de la fuente.

Construyamos la función de la fuente para la ecuación de la conducción del calor en un espacio no acotado.

Ante todo, demostremos el siguiente lema, que será utilizado en lo sucesivo.

Si la solución de la ecuación $\Delta u - \frac{1}{a^2} u_t = 0$ depende sólo de r y t, la función $v = ru$ satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial v}{\partial t}. \qquad (4)$$

Efectivamente, escribiendo el operador de Laplace en el sistema de coordenadas esféricas, se aprecia que la función $u = u(r, t)$ satisface a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \text{o bien} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0;$$

haciendo luego $ru = v$, se obtiene para v la ecuación (4) [1]).

Supongamos que en el origen de coordenadas se ha ubicado una fuente térmica de acción continua y potencia q constante, y en el resto del espacio la temperatura inicial era igual a cero:

$$u(r, 0) = 0 \quad \text{para} \quad r \neq 0.$$

Es evidente que, en este caso, la temperatura u es función sólo de r y t.

La presencia de una fuente térmica para $r = 0$ significa que el flujo térmico en la unidad de tiempo a través de la esfera S_ε (con centro en $r = 0$ y de radio ε) cuando $\varepsilon \to 0$ es igual a q, es decir,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[- \iint_{S_\varepsilon} k \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \right] = q.$$

Como la derivada normal $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$ es constante en la superficie S_ε, en virtud de la simetría, entonces

$$-k \frac{\partial u}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 |_{r=\varepsilon} \to q \quad \text{cuando} \quad \varepsilon \to 0,$$

---

[1]) Compárese con el p. 1, § 1, del capítulo V.

lo cual indica que la derivada $\frac{\partial u}{\partial r}$ tiene en $r = 0$ una singularidad del tipo $-\frac{q}{4\pi k r^2}$. En consecuencia, la propia función cuando $r = 0$ debe tener una particularidad del tipo

$$u \sim \frac{q}{4\pi k r},$$

de modo que el producto $ru = v$ permanece acotado para $r = 0$.

La función v, determinada por las condiciones

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial t},$$

$$v(0, t) = \frac{q}{4\pi k} = v_0, \tag{5}$$

$$v(r, 0) = 0,$$

se expresa por la fórmula

$$v(r, t) = v_0\left[1 - \Phi\left(\frac{r}{2\sqrt{a^2 t}}\right)\right] = q\frac{1}{4\pi k}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{r}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$

(véase la fórmula (33) del cap. III, § 3). Por lo tanto, la solución del problema de propagación de la temperatura para una fuente de acción continua y potencia q, situada en el origen de coordenadas ($r = 0$), tiene la forma

$$u(r, t) = qU(r, t) = q\frac{1}{4\pi k}\frac{1}{r}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{r}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha, \tag{6}$$

donde $U(r, t)$ es la temperatura que corresponde a la fuente unitaria ($q = 1$).

Para pasar al caso de una fuente instantánea, consideremos una fuente de potencia q, situada en el punto (ξ, η, ζ) y que actúa en forma continua durante el intervalo de tiempo τ.

Tal fuente es equivalente a dos fuentes de potencia $+q$ y $-q$; la primera se conecta para $t = 0$, y la segunda, para $t = \tau$. La distribución de temperaturas se expresa aquí por la fórmula

$$u_\tau(r, t) = q\,[U(r, t) - U(r, t - \tau)].$$

Durante el intervalo de tiempo τ se genera una cantidad de calor $Q = q\tau$, por lo cual

$$u_\tau(r, t) = \frac{Q}{\tau}[U(r, t) - U(r, t-\tau)].$$

Pasando al límite cuando $\tau \to 0$ y considerando a Q constante, se halla:

$$u_0(r, t) = \lim_{\tau \to 0} u_\tau(r, t) = Q\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi kr}\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\frac{r}{4a^2\sqrt{a^2t^3}}a^2,$$

o bien

$$u_0(r, t) = \frac{Q}{c\rho}G(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta),$$

donde

$$G(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}. \quad (7)$$

La función $G(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta)$ es la *función de influencia térmica* de la fuente instantánea de calor. Esta representa la temperatura en el punto x, y, z, en el momento de tiempo t, causada por una fuente puntual de potencia $Q = c\rho$, situada en el momento $t = 0$ en el punto (ξ, η, ζ).

No es difícil comprobar que

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = 1. \quad (8)$$

En efecto, la integral triple (8) se puede representar en forma del producto de tres integrales, cada una de las cuales es igual a la unidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha = 1$$

$$\left(\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2t}}\right).$$

De la fórmula (7) se aprecia que la función de influencia G posee la *propiedad de simetría*:

$$G(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta) = G(\xi, \eta, \zeta, t;\ x, y, z),$$

que es la expresión del principio de reciprocidad: la acción en el punto (x, y, z) de una fuente que se halla en el punto (ξ, η, ζ),

es igual a la acción en el punto (ξ, η, ζ) de la misma fuente, ubicada en el punto (x, y, z). Sin embargo, con respecto a la variable t esta simetría no tiene lugar, lo cual es la expresión de la irreversibilidad de los procesos térmicos en el tiempo.

Determinemos la forma de la función de influencia G en el caso de dos dimensiones. Supongamos que en una recta paralela al eje z, que pasa por el punto (ξ, η), se halla una fuente lineal infinita; denotemos por $\bar{Q} = \text{const}$ la potencia de la fuente por unidad de longitud. La función de influencia G_2 de esta fuente no dependerá de z, y se caracterizará totalmente por sus valores en el plano (x, y). Calculemos la función G_2. Supongamos que en el elemento $d\zeta$ se genera una cantidad de calor

$$dQ = \bar{Q}\, d\zeta;$$

entonces, la distribución de la temperatura en el espacio se da por la integral

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{Q}\, d\zeta}{c\rho} G(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta).$$

Calculando la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}} d\zeta = 2\sqrt{a^2t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 2\sqrt{\pi a^2 t} \quad \left(\alpha = \frac{\zeta - z}{2\sqrt{a^2t}}\right),$$

se obtiene:

$$\bar{u} = \frac{\bar{Q}}{c\rho} G_2,$$

donde

$$G_2(x, y, t;\ \xi, \eta) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^2 e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2t}}. \qquad (8')$$

Comparando esta función con la fórmula (7), se aprecia su similitud de estructura.

Análogamente se puede obtener la expresión para la función de la fuente en el caso unidimensional. Considerando una fuente plana infinita de densidad $\bar{\bar{Q}}$ constante, se obtiene:

$$\bar{\bar{u}} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\bar{Q}}\, d\eta\, d\zeta}{c\rho} G(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta) =$$

$$= \frac{\bar{\bar{Q}}}{c\rho} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} = \frac{\bar{\bar{Q}}}{c\rho} G_1(x, t;\ \xi),$$

donde

$$G_1(x, t;\ \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

es la función de la fuente para una dimensión.

En el capítulo III se expusieron las gráficas que caracterizan el comportamiento de la función de influencia $G(x, t;\ \xi)$. La característica cualitativa de la función de la fuente, dada en el cap. III, tiene lugar también para el caso espacial.

2. Propagación del calor en el espacio no acotado. Apliquemos ahora la función de la fuente, obtenida en el punto anterior, a la resolución del problema sobre la propagación de una temperatura inicial en el espacio infinito.

Supongamos que hay que encontrar la solución de la ecuación

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y, \quad z < \infty, \quad t > 0, \tag{1}$$

que satisfaga a la condición inicial

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z). \tag{3}$$

El estado térmico inicial, evidentemente, se puede representar como el resultado de la superposición de la acción de fuentes instantáneas, que crean la temperatura inicial. Consideremos el elemento de volumen $d\xi\, d\eta\, d\zeta$, que contiene al punto (ξ, η, ζ). Para crear una temperatura inicial $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, es necesario ubicar en el volumen $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ una cantidad de calor $dQ = c\rho\varphi(\xi, \eta, \zeta) \times$ $\times\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$.

Esta cantidad concentrada de calor creará en el punto (x, y, z), en el momento t, una temperatura

$$\frac{dQ}{c\rho} G(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta) = \\ = G(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta)\, \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{9}$$

En virtud del principio de superposición, la solución de nuestro problema se puede obtener integrando (9) por todo el espacio:

$$u(x, y, z, t) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, t;\ \xi, \eta, \zeta)\, \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{10}$$

La fórmula (10) fue obtenida como resultado de razonamientos eurísticos, que no determinan los límites de su aplicación ni pueden servir de demostración.

Demostremos que
si la función φ es continua a trozos y acotada $|\varphi|<A$, la función u, determinada por la expresión

$$u(x, y, z, t)=$$
$$=\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad (10')$$

1) está acotada en todo el espacio: $|u|<A$;
2) es solución de la ecuación de la conducción del calor para $t>0$;
3) es continua, para $t=0$, en los puntos de continuidad de la función φ y satisface a la condición $u(x, y, z, 0)=\varphi(x, y, z)$.

Para demostrar que (10′) satisface a la ecuación (1), utilizaremos el lema conocido (véase el § 3 del capítulo III).

Si $U(x, y, z, t; \xi)$, para todo valor del parámetro ξ, es solución de la ecuación $\mathcal{L}(u)=0$, donde $\mathcal{L}(u)$ es un operador diferencial lineal, la función

$$u(x, y, z, t)=\int U(x, y, z, t;\ \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

será también solución de la ecuación $\mathcal{L}(u)=0$, si las derivadas de la función u, que figuran en el operador $\mathcal{L}(u)$, se pueden calcular derivando bajo el signo integral.

En nuestro caso, $U=G$ satisface a la ecuación de la conducción del calor para cualesquiera ξ, η, ζ y $t>0$. Como es sabido, se puede derivar con respecto al parámetro bajo el signo de integral impropia, si: 1) la derivada del integrando con respecto al parámetro es continua y 2) la integral obtenida luego de la derivación formal converge uniformemente.

Efectuando la derivación formal de la integral (10′) con respecto a x, se obtiene:

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{x-\xi}{2a^2t}\right) e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \qquad (11)$$

El integrando es continuo para $\bar{t}>t>0$, y el factor $e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}$ asegura la convergencia uniforme, si φ está acotada: $|\varphi|<A$. Resultados análogos se obtienen al derivar nuevamente con respecto a x y al derivar con respecto a t; lo mismo tiene lugar cuando se deriva con respecto a y y a z. De este modo, la función G satisface a todas las condiciones del lema, para $t>0$. Por consiguiente, la función u, para $t>0$, satisface a la ecuación de la conducción del calor.

La acotación de la función u, determinada por la fórmula (10'), que escribiremos como sigue:

$$u(M, t) = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G(M, M', t)\, \varphi(M')\, d\tau_{M'}$$

$$(M = M(x, y, z), \quad M' = M'(\xi, \eta, \zeta)),$$

se establece directamente, si se toma en cuenta la igualdad (8):

$$|u| < A \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} G\, d\tau = A. \tag{12}$$

Pasemos a demostrar la continuidad de $u(x, y, z, t)$ para $t = 0$.

Consideremos un punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de continuidad de la función φ, y demostremos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|u(M, t) - \varphi(M_0)| < \varepsilon \text{ para } |\overline{MM_0}| < \delta(\varepsilon) \text{ y } t < \delta(\varepsilon). \tag{13}$$

Tomemos una región auxiliar T_1, que contenga al punto M_0; sus dimensiones serán determinadas más abajo; el resto del espacio lo denotaremos por T_2. Tomando en cuenta las igualdades

$$u(M, t) = \iiint\limits_{T_1} G(M, M', t)\, \varphi(M')\, d\tau_{M'} + \iiint\limits_{T_2} G(M, M', t)\, \varphi(M')\, d\tau_{M'},$$

$$\varphi(M_0) = \iiint\limits_{T_1} G(M, M', t)\, \varphi(M_0)\, d\tau_{M'} + \varphi(M_0) \iiint\limits_{T_2} G(M, M', t)\, d\tau_{M'},$$

así como también el hecho de ser $G(M, M', t)$ positiva, tendremos:

$$|u(M, t) - \varphi(M_0)| \leqslant J_1 + J_2, \tag{14}$$

donde

$$J_1 = \iiint\limits_{T_1} G(M, M', t)\, |\varphi(M') - \varphi(M_0)|\, d\tau_{M'}, \tag{15}$$

$$J_2 = 2A \iiint\limits_{T_2} G(M, M', t)\, d\tau_{M'}. \tag{16}$$

De la continuidad de la función φ en el punto fijo M_0, se sigue: para todo $\eta > 0$ existe un $\delta'(\eta) > 0$ tal que

$$|\varphi(M') - \varphi(M_0)| < \eta, \quad \text{si} \quad |\overline{M'M_0}| < \delta'(\eta).$$

Por lo tanto, si el diámetro de la región T_1 no supera a $\delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$, entonces

$$J_1 < \frac{\varepsilon}{3}\iiint_{T_1} G\,d\tau_{M'} < \frac{\varepsilon}{3}\iiint_{-\infty}^{\infty} G\,d\tau = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{17}$$

Detengámonos ahora con detalle en la elección de la región T_1. Como T_1 se puede tomar una esfera con centro en el punto $M(x, y, z)$, lo cual resulta cómodo para la acotación de la integral J_2. La apreciación (17) de la integral J_1 conserva su validez, si el radio de esta esfera se toma igual a

$$\rho_0 = \frac{1}{2}\delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \text{ y si } |\overline{MM_0}| < \rho_0.$$

Pasando a un sistema de coordenadas esféricas con centro en el punto M, se obtiene:

$$\iiint_{T_1} G\,d\tau = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 \int_0^{\rho_0} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} r^2\,dr =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\rho_0}{2\sqrt{a^2 t}}} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\,d\alpha \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\,d\alpha = 1 \quad \left(\alpha = \frac{r}{2\sqrt{a^2 t}}\right),$$

puesto que

$$\int_0^{\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\,d\alpha = -\frac{1}{2}\alpha e^{-\alpha^2}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

De esta manera,

$$\iiint_{T_2} G\,d\tau = 1 - \iiint_{T_1} G\,d\tau \to 0 \quad \text{cuando} \quad t \to 0,$$

es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta''(\varepsilon)$ tal que

$$\iiint_{T_2} G\,d\tau < \frac{\varepsilon}{3A}.$$

y, en consecuencia,

$$J_2 < \frac{2\varepsilon}{3}, \tag{18}$$

siempre que $t < \delta''(\varepsilon)$.

Tomando el mínimo de los números $\frac{1}{2}\delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ y $\delta''(\varepsilon)$ y designándolo por $\delta(\varepsilon)$, tendremos la desigualdad

$$|u(M, t) - \varphi(M_0)| < \varepsilon \text{ para } |\overline{MM_0}| < \delta(\varepsilon) \text{ y } t < \delta(\varepsilon), \tag{13}$$

la cual demuestra, precisamente, la continuidad de $u(M, t)$ para $t = 0$ en todo punto M_0 de continuidad de la función $\varphi(M)$.

Pasemos ahora a resolver la ecuación no homogénea

$$u_t = a^2\Delta u + \frac{f}{c\rho}, \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad t > 0,$$

con la condición inicial nula $u(x, y, z, 0) = 0$. Consideremos el punto (ξ, η, ζ) en el momento de tiempo $\tau < t$. La cantidad de calor que se desprende en el elemento $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ durante el tiempo $d\tau$, igual a

$$dQ = f\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau,$$

causa en el punto (x, y, z), en el momento t, una temperatura

$$\frac{1}{c\rho} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau) f(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau.$$

Aplicando el principio de superposición, se puede escribir la solución del problema planteado en la forma

$$u(x, y, z, t) =$$
$$= \int_0^t \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c\rho} G(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau) f(\xi, \eta, \zeta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\tau. \tag{19}$$

No nos detendremos en demostrar la validez de esta fórmula y la determinación de las condiciones de su aplicación.

Los problemas para el semiespacio con condiciones homogéneas de frontera de primera y segunda especie se resuelven por el método de las imágenes.

§ 2. PROPAGACION DEL CALOR EN CUERPOS ACOTADOS

1. Esquema del método de separación de las variables. Hemos estudiado la propagación del calor en el espacio infinito. Al estudiar este fenómeno en un cuerpo acotado, es necesario agregar a la ecuación y a la condición inicial, condiciones en la frontera

del cuerpo, que en los casos más simples son condiciones de frontera de primera, segunda o tercera especie.

Consideremos el problema más sencillo con condición de frontera homogénea de primera especie:

hallar la solución de la ecuación de la conducción del calor

$$u_t = a^2 \Delta u \quad \text{dentro de } T \text{ para } t > 0 \tag{1}$$

con la condición inicial

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$$

y la condición de frontera

$$u|_\Sigma = 0,$$

dode Σ es la frontera de la región T.

La solución de este problema se puede obtener por el método habitual de separación de las variables, que fue expuesto, en su aplicación a la ecuación $u_{tt} = a^2 \Delta u$, en el capítulo V, § 2; la aplicación de este método a nuestro problema se efectúa de forma totalmente análoga.

Consideremos el problema auxiliar:

hallar la solución no trivial de la ecuación

$$u_t - a^2 \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad T \quad \text{para} \quad t > 0, \tag{2}$$

que satisfaga a la condición de frontera homogénea

$$u|_\Sigma = 0$$

y que se represente en forma del producto

$$u(M, t) = v(M)\, T(t) \not\equiv 0.$$

Separando las variables en forma habitual, se obtienen las siguientes condiciones, que determinan las funciones $v(M)$ y $T(t)$:

$$\left.\begin{aligned} \Delta v + \lambda v = 0 \quad &\text{en} \quad T, \quad v(M) \not\equiv 0, \\ v = 0 \quad &\text{en} \quad \Sigma \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

y

$$T' + a^2 \lambda T = 0. \tag{4}$$

Para la función v se obtiene el problema de determinación de los valores propios, que ya estudiamos al analizar las oscilaciones de volúmenes acotados (véase el cap. V, § 3, p. 1).

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ los valores propios, y $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$, las funciones propias del problema (3). Las funciones $\{v_n\}$ forman un sistema ortogonal.

Las funciones correspondientes $T_n(t)$ tienen la forma

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t},$$

y el problema auxiliar tiene la solución no trivial

$$u_n(M, t) = C_n v_n(M) e^{-a^2\lambda_n t}. \qquad (5)$$

La solución general del problema incial se puede representar en la forma

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t} v_n(M). \qquad (6)$$

Al satisfacer a la condición inicial:

$$u(M, 0) = \varphi(M) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(M), \qquad (7)$$

se hallan los coeficientes

$$C_n = \frac{\int_T \varphi(M') v_n(M') d\tau_{M'}}{\|v_n\|^2},$$

donde

$\|v_n\| = [\int_T v_n^2(M') d\tau_{M'}]^{1/2}$ es la norma de la función v_n.

La función (6) representa la solución del problema.

La ecuación

$$u_t - a^2 \Delta u = f(M, t) \qquad \left(f = \frac{F}{c\rho}\right) \qquad (8)$$

con condiciones de frontera e inicial homogéneas, también se puede resolver por el método de separación de las variables.

Haciendo, como de costumbre

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) v_n(M) \qquad (9)$$

y desarrollando la función $f(M, t)$ por las funciones propias $v_n(M)$:

$$f(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) v_n(M),$$

$$f_n(t) = \frac{1}{\|v_n\|^2} \int_T f(M', t) v_n(M') d\tau_{M'}, \qquad (10)$$

se obtiene, para determinar $T_n(t)$, la ecuación

$$T'_n + a^2\lambda_n T_n = f_n(t) \qquad (11)$$

con la condición inicial $T'_n(0) = 0$, si $u(M, 0) = 0$, cuya solución tiene la forma

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)} f_n(\tau)\, d\tau. \qquad (12)$$

De aquí se obtiene:

$$u(M, t) = \int_0^t \int_T \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)} \frac{v_n(M)\, v_n(M')}{\| v_n \|^2} \right\} f(M', \tau)\, d\tau_{M'} \cdot d\tau. \quad (13)$$

La expresión entre llaves corresponde, evidentemente, a la función de influencia de una fuente instantánea de potencia $Q = c\rho$, situada en el punto M' en el momento τ,

$$G(M, t, M', \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M)\, v_n(M')}{\| v_n \|^2} e^{-a^2\lambda_n(t-\tau)}. \qquad (14)$$

La solución del primer problema de contorno $\bar{u}$ para la ecuación de la conducción del calor con condiciones de frontera no homogéneas, $\bar{u}\,|_\Sigma = \mu$, se reduce fácilmente a la solución u de una ecuación no homogénea con las condiciones de frontera homogéneas $u\,|_\Sigma = 0$, si se hace

$$\bar{u} = u + \Phi, \qquad (15)$$

donde Φ es una función arbitraria (suficientemente suave), que tome los valores μ en Σ (véase el capítulo III, § 2). Con gran frecuencia se encuentra el caso de valores de frontera constantes, $\mu_0 = \text{const}$, el cual se reduce al problema con condiciones de frontera homogéneas si se introduce la función

$$\bar{u} = u + \mu_0 \qquad (\Phi = \text{const} = \mu_0),$$

que representa la desviación de la solución estacionaria.

De esta manera, la dificultad principal en la resolución de problemas sobre la propagación del calor en una región acotada, consiste en hallar las funciones propias y los valores propios para la región dada.

La forma de la solución (6), que se obtuvo por el método de separación de las variables, es cómoda para estudiar una etapa suficientemente desarrollada del proceso, para grandes t. En efecto, los valores propios λ_n, para cualquier región, crecen rápidamente al aumentar n. Por esto, para $t > 0$ la serie converge con rapidez y, a partir de cierto momento, el primer término distinto de cero predomina sobre la suma de los demás:

$$u(M, t) \approx C_1 v_1(M)\, e^{-a^2\lambda_1 t}. \qquad (16)$$

Esto corresponde al hecho físico de que, independientemente de la distribución inicial, a partir de cierto momento en el cuerpo se establece un régimen térmico «regular», en el cual el «perfil» de la temperatura no varía con el tiempo, y la amplitud disminuye exponencialmente al aumentar el tiempo. Este hecho se halla en la base de los métodos no estacionarios de determinación del coeficiente de conductividad de temperatura. En efecto, midiendo la temperatura del cuerpo en un punto arbitrario M_0, se halla que

$$\ln |u(M_0, t)| \approx -a^2\lambda_1 t + \ln |C_1 v_1(M)|. \tag{17}$$

La gráfica de esta función se representa, a partir de cierto momento de tiempo, por una línea recta, de coeficiente angular $-a^2\lambda_1$. Conociendo la magnitud λ_1, que depende de la forma de la región, se puede hallar el coeficiente de conductividad de temperatura.

2. Enfriamiento de un cilindro circular. Estudiemos el problema sobre el enfriamiento de un cilindro infinitamente largo de radio r_0, con cierta temperatura inicial, si en su superficie se mantiene la temperatura nula. Supongamos que la temperatura inicial no depende de z (el eje z está dirigido a lo largo del eje del cilindro). Entonces, evidentemente, en lo sucesivo la temperatura tampoco dependerá de z y variará sólo en un corte transversal S del cilindro. Escogiendo en este corte un sistema de coordenadas polares con polo en el centro del círculo S, se obtiene el problema de determinación de la función $u(r, \varphi, t)$ que satisfaga a la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{18}$$

a la condición inicial

$$u(r, \varphi, 0) = \Phi(r, \varphi) \tag{19}$$

y a la de frontera

$$u(r_0, \varphi, t) = 0. \tag{20}$$

Como hemos visto, la solución de un problema de este tipo se puede escribir en la forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t} v_n(M), \tag{21}$$

donde se suma por todas las funciones propias del problema

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0, \quad v \not\equiv 0, \\ &v(r_0, \varphi) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Este problema de valores propios fue estudiado al analizar las oscilaciones de una membrana circular (véase el capítulo V, § 3). A cada valor propio

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 \tag{23}$$

le corresponden dos funciones propias.

$$\bar{v}_{nm} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\cos n\varphi$$

y

$$\bar{\bar{v}}_{nm} = J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\operatorname{sen} n\varphi, \tag{24}$$

los cuadrados de cuyas normas son iguales a

$$\|\bar{v}_{nm}\|^2 = \|\bar{\bar{v}}_{nm}\|^2 = \frac{\varepsilon_n r_0^2}{2}[J'_n(\mu_m^{(n)})]^2, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1; & n \neq 0; \\ 2; & n = 0, \end{cases} \tag{25}$$

siendo $\mu_m^{(n)}$ la raíz m-ésima de la ecuación

$$J_n(\mu) \quad 0. \tag{26}$$

Utilizando las expresiones para v y λ, se obtiene:

$$u(r, \varphi, t) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(\bar{C}_{nm}\cos n\varphi + \bar{\bar{C}}_{nm}\operatorname{sen} n\varphi)\, J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) e^{-a^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 t}, \tag{27}$$

donde los coeficientes $\bar{C}_{nm}$ y $\bar{\bar{C}}_{nm}$ se determinan por la función inicial:

$$\left.\begin{aligned} \bar{C}_{nm} &= \frac{\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\Phi(r, \varphi)\, J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\cos n\varphi\, r\, d\varphi\, dr}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n[J'_n(\mu_m^{(n)})]^2}, \\ \bar{\bar{C}}_{nm} &= \frac{\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi}\Phi(r, \varphi)\, J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right)\operatorname{sen} n\varphi\, r\, d\varphi\, dr}{\frac{\pi r_0^2}{2}\varepsilon_n[J'_n(\mu_m^{(n)})]^2}, \\ \varepsilon_n &= \begin{cases} 1; & n \neq 0; \\ 2; & n = 0. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Si la temperatura inicial Φ depende sólo de r, la serie doble (27) se sustituye por la serie simple

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) e^{-a^2\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}\right)^2 t}, \tag{29}$$

donde

$$C_m = \frac{2\int_0^{r_0} \Phi(r) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r\,dr}{r_0^2 [J_1(\mu_m^{(0)})]^2} \qquad (J_1 = -J_0'), \tag{30}$$

y $\mu_m^{(0)}$ es la raíz m-ésima de la ecuación $J_0(\mu) = 0$.

Detengámosnos con más detalle en el problema sobre el enfriamiento de un cilindro calentado uniformemente, con temperatura nula en la superficie. Si la temperatura inicial es

$$u(r, 0) = \Phi = u_0, \quad \text{entonces}$$

$$C_m = \frac{2u_0 \int_0^{r_0} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r\,dr}{r_0^2 [J_1(\mu_m^{(0)})]^2} = \frac{2u_0}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})}, \tag{30'}$$

puesto que $\alpha J_0(\alpha) = [\alpha J_1(\alpha)]'$. De este modo, se obtiene:

$$\frac{u(r, t)}{u_0} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2J_0(\mu_m^{(0)}\rho)}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})} e^{-(\mu_m^{(0)})^2\theta} \quad \left(\rho = \frac{r}{r_0}, \ \theta = \frac{a^2 t}{r_0^2}\right). \tag{31}$$

En las tablas de las funciones cilíndricas (véase la pág. 814, tabla 3) se dan los valores numéricos tanto de las raíces $\mu_m^{(0)}$, como de $J_1(\mu_m^{(0)})$.

En particular,

$$\mu_1^{(0)} = 2{,}40, \quad J_1(\mu_1^{(0)}) = 0{,}52,$$
$$\mu_2^{(0)} = 5{,}52, \quad J_1(\mu_2^{(0)}) = -0{,}34.$$

La serie (31) converge rápidamente, y para t grandes nos podemos limitar al primer término de ésta. En particular, en el eje del cilindro será

$$\left.\frac{u(r, t)}{u_0}\right|_{r=0} = \frac{2}{2{,}40 \cdot 0{,}52} e^{-(2{,}40)^2\theta} = 1{,}60 e^{-5{,}760} \tag{32}$$
$$\left(\theta = \frac{a^2 t}{r_0}\right).$$

3 Determinación de las dimensiones críticas. En el capítulo III se demostró que el proceso de difusión de un gas inestable, cuya velocidad de desintegración es proporcional a la concentración, conduce a la ecuación

$$u_t = a^2 \Delta u + \beta u \qquad (\beta < 0). \tag{33'}$$

Los procesos de difusión en presencia de *reacciones en cadena* tienen un gran interés. Las reacciones en cadena se caracterizan por que las partículas de la sustancia que se difunde, al entrar en reacción con el medio ambiente, se «multiplican». Así, por ejemplo, al chocar los neutrones con los núcleos «activos» del uranio, tiene lugar la reacción de división de los núcleos, que va acompañada por la aparición de nuevos neutrones, cuyo número es mayor que 1. Estos neutrones, a su vez, entran en reacción con otros núcleos activos, causando su división y la generación de nuevos neutrones, etc. De este modo tiene lugar el proceso de multiplicación de neutrones, que tiene el carácter de reacción en cadena.

Considerando el proceso descrito en «aproximación de difusión», se obtiene la siguiente ecuación:

$$u_t = a^2 \Delta u + \beta u \qquad (\beta > 0), \tag{33''}$$

puesto que la reacción en cadena es equivalente a la presencia de fuentes de sustancia que se difunde (neutrones), proporcionales a la concentración (a la densidad de los neutrones).

Consideremos el problema siguiente:

hallar la solución de la ecuación

$$u_t = a^2 \Delta u + \beta u \quad \text{dentro de } T \tag{33}$$

que satisfaga a la condición inicial

$$u(M, 0) = \varphi(M) \tag{34}$$

y a la de frontera

$$u|_{\Sigma} = 0. \tag{35}$$

Mediante la sustitución

$$u(M, t) = \bar{u}(M, t)\, e^{\beta t}, \tag{36}$$

la ecuación (33) se transforma en la (1); las condiciones iniciales y de frontera quedan invariantes. De este modo, la función u buscada tiene la forma

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{(\beta - a^2\lambda_n)t} v_n(M), \tag{37}$$

donde C_n se determina de la función inicial, según la fórmula (10). En el caso $\beta < 0$ (difusión con desintegración), los expo-

nentes de la serie (37) son menores que los exponentes respectivos de la (6). Esto significa que, si hay desintegración, la disminución de la concentración tiene lugar más rápidamente que en el caso de difusión pura ($\beta = 0$). En el caso $\beta > 0$ (difusión con multiplicación), si por lo menos uno de los coeficientes es $\beta - a^2\lambda > 0$, es decir, $\beta > a^2\lambda_1$, con el transcurso del tiempo tendrá lugar, en general ($C_1 \neq 0$), un aumento de la concentración en forma exponencial (reacción en cadena). La magnitud β es una característica de la sustancia (coeficiente de desintegración), y λ_1 depende esencialmente de la forma y las dimensiones de la región. Diremos que cierta región T_{cr} tiene, para un β dado, *dimensiones críticas*, si $\lambda_1 = \frac{\beta}{a^2}$. Hallemos las dimensiones críticas para una capa infinita, un cilindro y una esfera.

1. Capa infinita $0 \leqslant x \leqslant l$. Considerando que el problema es unidimensional, se tiene (véase el cap. II, § 2):

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad \text{y} \quad \lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}.$$

El espesor crítico l_{cr} de la capa, a partir del cual tendrá lugar el proceso de crecimiento en avalancha de la concentración u, se determina de la condición

$$l_{cr} = \frac{a\pi}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{3,14a}{\sqrt{\beta}} \qquad (\beta > 0). \tag{38}$$

2. Cilindro infinito. Considerando que el problema es plano, se aprecia que el mínimo valor de λ corresponde a la función propia que posee simetría radial, y es igual a

$$\lambda_1^{(0)} = \left(\frac{\mu_1^{(0)}}{r_0}\right)^2 \qquad (\mu_2^{(0)} = 2,4048).$$

De aquí se obtiene, para el diámetro crítico, la fórmula

$$d_{cr} = \frac{2\mu_1^{(0)}a}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{4,80a}{\sqrt{\beta}}. \tag{39}$$

3. Esfera. El valor mínimo de λ corresponde a la función propia que posee simetría esférica, y es igual a

$$\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{R}\right)^2,$$

de donde se obtiene, para el diámetro crítico D_{cr}, la fórmula

$$D_{cr} = \frac{2\pi a}{\sqrt{\beta}} \approx \frac{6,28a}{\sqrt{\beta}}. \tag{40}$$

§ 3. PROBLEMAS DE CONTORNO PARA LAS REGIONES CON FRONTERAS MOVILES

1. Fórmula de Green para la ecuación de la conducción del calor y función de la fuente. Para la ecuación de la conducción del calor, se pueden plantear problemas de contorno para regiones con fronteras que se desplazan con el transcurso del tiempo.

Para mayor sencillez, consideraremos este problema para la ecuación con una variable geométrica

$$\mathscr{L}(u) = a^2 u_{xx} - u_t = 0, \tag{1}$$

aunque toda la exposición se puede generalizar al caso de varias variables.

Consideremos la región $BAEF$ (fig. 78), delimitada por las características AB y EF ($t = \text{const}$) y por las curvas determinadas por las ecuaciones

$$x = \chi_1(t) \quad (\text{para } AE)$$

y

$$x = \chi_2(t) \quad (\text{para } BF).$$

El primer problema de contorno para esta región consiste en determinar la solución de la ecuación de la conducción del calor (1) que satisfaga a las condiciones inicial y de frontera

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi(x) \text{ en } AB, \\ u|_{x=\chi_1(t)} &= \mu_1(t), \quad u|_{x=\chi_2(t)} = \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Del principio del valor máximo se deduce directamente que este problema no puede tener más de una solución continua. Análogamente se pueden plantear los otros problemas de contorno.

Establezcamos la fórmula de Green para la ecuación (1) y la representación integral de las soluciones de este problema.

Consideremos el operador

$$\mathscr{M}(v) = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial t}; \tag{3}$$

integrando la expresión

$$\psi \mathscr{L}(\varphi) - \varphi \mathscr{M}(\psi) = a^2 (\psi \varphi_x - \varphi \psi_x)_x - (\varphi\psi)_t$$

en cierta región $PABQ$ (fig. 78), donde $\varphi(x, t)$ y $\psi(x, t)$ son funciones arbitrarias, derivables un número suficiente de veces, y aplicando la función de Green, se obtiene:

$$\iint [\psi \mathscr{L}(\varphi) - \varphi \mathscr{M}(\psi)]\, dx\, dt = \oint \left[\varphi\psi\, dx + a^2 \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right],$$

donde la segunda integral se toma por el contorno cerrado $PABQ$. Si $\mathscr{L}(\varphi) = 0$ y $\mathscr{M}(\psi) = 0$ entonces, escribiendo con más detalle el segundo miembro, se obtiene:

$$\int\limits_{PQ} \varphi\psi\, dx = \int\limits_{AB} \varphi\psi\, dx + \int\limits_{BQ} \left[\varphi\psi\, dx + a^2 \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right] - \\ - \int\limits_{AP} \left[\varphi\psi\, dx + a^2 \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dt\right]. \tag{4}$$

Sea $\varphi(x, t) = u(x, t)$ alguna solución de la ecuación de la conducción del calor $\mathscr{L}(u) = 0$, y $\psi = G_0(x, t, \xi, \tau)$, la función de la fuente para esta

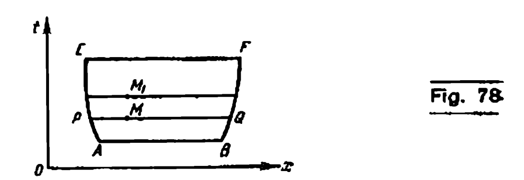


Fig. 78

ecuación en la recta infinita:

$$G_0(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}, \qquad (5)$$

que se llama con frecuencia *solución fundamental de la ecuación de la conducción del calor*. La función $G_0(x, t, \xi, \tau)$ satisface a la ecuación $\mathscr{L}(G_0) = 0$ con respecto a las variables x, t, y a la ecuación conjugada $\mathscr{M}(G_0) = 0$ con respecto a las variables ξ, τ.

Sea $M(x, t)$ cierto punto fijo dentro de la región $BAEF$, en la cual se quiere hallar el valor de la función $u(x, t)$, y M_1, el punto de coordenadas x, $t+h$, donde $h > 0$. Trazando por el punto M la característica PQ, sustituyendo en la fórmula (4) x por ξ, t por τ y aplicándola después a la región $ABQP$ (fig. 78) y a las funciones

$$\varphi = u(\xi, \tau) \text{ y } \psi(\xi, \tau) = G_0(x, t+h, \xi, \tau), \qquad (6)$$

tendremos:

$$\int_{PQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2h}}}{2\sqrt{\pi a^2 h}} u(\xi, t)\, d\xi =$$

$$= \int_{PABQ} u(\xi, \tau) G_0(x, t+h, \xi, \tau)\, d\xi + a^2 \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G_0}{\partial \xi}\right) d\tau. \qquad (7)$$

Pasando al límite cuando $h \to 0$ y teniendo en cuenta la continuidad, con respecto a h, de las funciones $G_0(x, t+h, \xi, \tau)$ y $\frac{\partial G_0}{\partial \xi}$ en $PABQ$, así como también la igualdad

$$\lim_{h \to 0} \int_{PQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2h}}}{2\sqrt{\pi a^2 h}} u(\xi, t)\, d\xi = u(x, t)\,^{1)}, \qquad (8)$$

si (x, t) se halla en el segmento PQ, se obtiene la fórmula integral fundamental

$$u(x, t) = \int_{PABQ} u(\xi, \tau) G_0(x, t, \xi, \tau)\, d\xi + \int_{BQ+PA} a^2 \left(G_0 \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G_0}{\partial \xi}\right) d\tau, \qquad (9)$$

---

[1]) Véase el capítulo III, § 3.

que da la representación de soluciones arbitrarias de la ecuación de la conducción del calor. Escribámosla una vez más detalladamente:

$$u(x, t) = \int\limits_{PABQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}} u(\xi, \tau)\, d\xi + a^2 \int\limits_{BQ+PA} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}} \frac{\partial u}{\partial \xi}\, d\tau -$$

$$- a^2 \int\limits_{BQ+PA} u(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}} \right) d\tau. \qquad (9')$$

Esta fórmula no da las soluciones de los problemas de contorno, puesto que para calcular el segundo miembro hay que conocer los valores no sólo de u, sino también de $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ a lo largo de los arcos AE y BF.

Mediante una transformación, en forma semejante a como se hizo para la ecuación de Laplace al introducir la función de la fuente, se puede excluir a $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ de esta fórmula.

Sea v alguna solución de la ecuación conjugada $\mathscr{M}(v) = 0$, que se anule en PQ, y u, la solución de la ecuación de la conducción del calor $\mathscr{L}(u) = 0$. Aplicando la fórmula (4) a las funciones v y u para la región $PABQ$, se obtiene:

$$0 = \int\limits_{PABQ} \left[u(\xi, \tau)\, v(\xi, \tau)\, d\xi + a^2 \left(v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) d\tau \right]. \qquad (10)$$

Restando de (9) la igualdad (10), tendremos:

$$u(x, t) = \int\limits_{PABQ} [u(\xi, \tau)\, G(x, t, \xi, \tau)\, d\xi + a^2 \left(G \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right) d\tau], \qquad (11)$$

donde

$$G(x, t, \xi, \tau) = G_0(x, t, \xi, \tau) - v. \qquad (12)$$

Si se escoge la función v de modo que sea

$$G = 0 \text{ en } PA \text{ y } BQ,$$

se obtiene la representación integral para $u(x, t)$ en la forma

$$u(x, t) = \int\limits_{AB} u(\xi, \tau)\, G(x, t, \xi, \tau)\, d\xi + a^2 \int\limits_{AP} u \frac{\partial G}{\partial \xi}\, d\tau - a^2 \int\limits_{BQ} u \frac{\partial G}{\partial \xi}\, d\tau. \qquad (13)$$

La fórmula (13) da la solución del problema de contorno (1) — (2), en cuyas condiciones se dan los valores de la función u en AP y BQ, así como también en la recta AB.

Detengámosnos con más detalle en el análisis de la función G. Esta se determina mediante la representación (12), donde la función $v(\xi, \tau)$ se caracteriza por las siguientes condiciones:

1° $v(\xi, \tau)$ está definida en la región $PABQ$ y para $\tau < t$ satisface a la ecuación conjugada $\mathscr{M}(v) = 0$.

2° $v = 0$ en PQ, es decir, para $\tau = t$,

3° $v(\xi, \tau) = -G_0(x, t, \xi, \tau)$ en PA y QB.

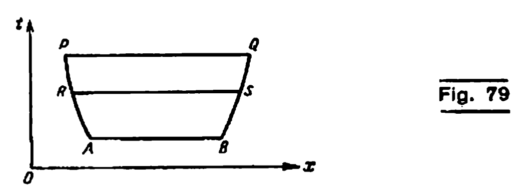


Fig. 79

En virtud de estas condiciones, la función v depende de los parámetros x, t, de manera que $v = v(x, t, \xi, \tau)$ y para hallarla hay que resolver un problema de contorno para la ecuación $\mathcal{M}(v) = 0$, el cual es equivalente a la resolución de un problema de contorno del tipo (2) para la ecuación $\mathcal{L}(u) = 0$, cosa que se comprueba fácilmente cambiando el signo de τ. De este modo, al representar a la función $u(x, t)$ mediante la fórmula (11), que da la solución del problema de contorno (2), la dificultad principal consiste en hallar la función $v(x, t, \xi, \tau)$.

Consideremos la función $\overline{v}(x, t, \xi, \tau)$, definida por las condiciones:

1° $\overline{v}(x, t, \xi, \tau)$ está definida en la región $PABQ$ para $t > \tau$ y satisface a la ecuación de la conducción del calor $\mathcal{L}(v) = 0$, como función de las variables x, t.

2° $\overline{v} = 0$ en AB, es decir, para $t = \tau$.

3° $\overline{v} = -G_0$ en AP y BQ.

Demostremos que $v(x, t, \xi, \tau) \equiv \overline{v}(x, t, \xi, \tau)$.

Consideremos la función $\overline{G}(x, t, \xi, \tau) = G_0 + \overline{v}$. Evidentemente, para cualquier solución $\overline{u}$ de la ecuación $\mathcal{M}(u) = 0$, tiene lugar una fórmula análoga a la (9):

$$\overline{u}(\xi, \tau) = \int\limits_{BQPA} \overline{u} G_0 \, dx + a^2 \left(\overline{u} \frac{\partial G_0}{\partial x} - G_0 \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} \right) dt, \tag{9'}$$

así como también una fórmula análoga a la (13):

$$\overline{u}(\xi, \tau) = \int\limits_{PQ} \overline{u}\overline{G} \, dx + a^2 \int\limits_{BQ} \overline{u} \frac{\partial \overline{G}}{\partial x} dt - a^2 \int\limits_{AP} \overline{u} \frac{\partial \overline{G}_0}{\partial x} dt. \tag{13'}$$

Estas fórmulas se pueden obtener de las (9) y (13), cambiando el signo de τ, puesto que entonces la ecuación $\mathcal{M} = 0$ se transforma en la $\mathcal{L} = 0$.

Aplicando la fórmula (13) a la región $PQRS$ (fig. 79), donde RS es el segmento de recta que corresponde a la ordenada θ, siendo $t > \theta > \tau$ y a la solución $u(x, t) = \overline{G}(x, t, \xi, \theta)$, continua en esta región, de la ecuación $\mathcal{L}(u) = 0$, se obtiene:

$$\overline{G}(x, t, \xi, \tau) = \int\limits_{RS} \overline{G}(x', \theta, \xi, \tau) \, G(x, t, x', \theta) \, dx',$$

puesto que las integrales por RP y SQ son iguales a cero, en virtud de 3°.

Aplicando análogamente la fórmula (13') a la región $ARSB$ y a la solución $u(\xi, \eta) = G(x, t, \xi, \eta)$, continua en esta región, de la ecuación $\mathcal{M}(u) = 0$, se obtiene:

$$G(x, t, \xi, \eta) = \int\limits_{RS} G(x, t, x', \theta) \, \overline{G}(x', \theta, \xi, \tau) \, dx',$$

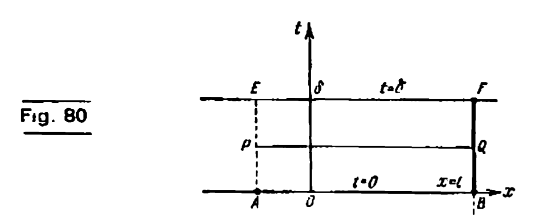


Fig. 80

puesto que las integrales por BS y AR son nulas. La comparación de estas fórmulas nos da que

$$G(x, t, \xi, \tau) \equiv \overline{G}(x, t, \xi, \tau).$$

Esta igualdad demuestra que la función G, considerada como función de x, t, tiene para $t = \tau$ y $x = \xi$ una singularidad que la caracteriza como función de la fuente, es igual a cero para $t = \tau$ y $x \neq \xi$, satisface a la ecuación $\mathscr{L}_{x,t}(G) = 0$ dentro de $APQB$ y se anula en AP y BQ. Es natural llamar a tal función *función de influencia de la fuente puntual* para la ecuación de la conducción del calor en la región $APQB$.

De esta forma, **cualquier solución de la ecuación de la conducción del calor se puede representar mediante la fórmula (13) por la función de la fuente.**

Si se da la ecuación no homogénea $\mathscr{L}(u) = f(x, t)$, en la fórmula (13) hay que agregar al segundo miembro el sumando

$$\iint_S G(x, t, \xi, \tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau.$$

2. Resolución del problema de contorno. La fórmula (13), obtenida más arriba, da la solución del problema de contorno para un segmento acotado de extremos móviles. Si los extremos AB están fijos, los arcos AE y BF se sustituyen por segmentos de recta, paralelos al eje t. La región S tiene, en este caso, la forma de un rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados. De la fórmula general (11) se puede obtener, mediante el paso al límite, la fórmula de Poisson, que da la solución de la ecuación de la conducción del calor con condición inicial dada en la recta infinita.

Supongamos que en la parte de la banda, limitada por las dos características $t = 0$ y $t = \delta$, que pasan por los puntos A y E (fig. 80), las funciones u y u_x satisfacen a las desigualdades

$$|u(x, t)|\, e^{-Kx^2} < N \quad \text{y} \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| e^{-Kx^2} < N, \tag{A}$$

donde $K > 0$ y $N > 0$ son ciertos números. Sustituyamos el arco BQ por el segmento de recta $x = l$, donde l es un número positivo, que en lo sucesivo aumentaremos indefinidamente. Partiremos de la fórmula (9), la cual escribiremos como sigue

$$u(x, t) = \int\limits_{PABQ} \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \left[u(\xi, \tau)\, d\xi + a^2 \frac{\partial u}{\partial \xi}\, d\tau - u(\xi, \tau)\, \frac{x-\xi}{2(t-\tau)}\, d\tau\right].$$

Consideremos la integral por el segmento BQ:

$$\int_{BQ} \frac{e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}\left[a^2\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=l} - u(l,\tau)\frac{x-l}{2(t-\tau)}\right]d\tau =$$

$$= \int_0^t a^2\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=l}\frac{e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}\,d\tau -$$

$$- \int_0^t u(l,\tau)\frac{e^{-\frac{(x-l)^2}{4a^2(t-\tau)}}(x-l)\,d\tau}{4\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}\,(t-\tau)} = I_1 + I_2$$

y demostremos que tiende a cero cuando $l \to \infty$.

Apreciemos la integral I_1 para grandes valores de l:

$$|I_1| \leqslant \frac{Na^2}{2\sqrt{\pi a^2}}\, e^{Kl^2 - \frac{l^2}{16a^2\delta}} \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{t-\tau}}$$

$$\left(\text{si } x < \frac{l}{2} \text{ y } (t-\tau) < \delta\right).$$

Es evidente que $|I_1| \to 0$ cuando $l \to \infty$, puesto que M es un punto fijo y δ se puede escoger en forma arbitrariamente pequeña, por ejemplo, de forma que

$$K < \frac{1}{16a^2\delta}.$$

Análogamente se demuestra que $|I_2| \to 0$ para $l \to \infty$.

Si las desigualdades (A) para la función $u(x, t)$ y su derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$ se cumplen también para x negativas, se puede tomar como curva AE el segmento de recta $x = -l$ y, repitiendo los razonamientos expuestos, comprobar que al pasar al límite, la integral sobre PA en la fórmula (9) tiende a cero. Como resultado, se obtiene la fórmula de Poisson, que ya hemos encontrado en el capítulo III, § 3[1]):

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{\sqrt{t}}\,u(\xi,0)\,d\xi.$$

Considerando la región semiinfinita y suponiendo que para la función de la fuente $G(x, t, \xi, \tau)$ se cumplen las desigualdades (A), se halla, mediante razonamientos análogos, que

$$u(x,t) = -\int_{PA} a^2\mu(\tau)\left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi=x_A} d\tau + \int_{x_A}^{\infty}\varphi(\xi)\,G(x,t,\xi,0)\,d\xi, \qquad (14)$$

[1]) Los razonamientos expuestos no se pueden considerar como una deducción de esta fórmula, puesto que nos basamos en ésta al obtener la fórmula (9).

donde

$$\mu(t) = u(x_A, t) \text{ y } \varphi(x) = u(x, 0).$$

La función de la fuente para la recta semiinfinita $x \geqslant 0$, como es fácil comprobar, se puede obtener por el método de la reflexión, y es igual a

$$G(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right],$$

puesto que se la puede representar en la forma (12), satisface a la ecuación de la conducción del calor con respecto a las variables x, t y se anula para $x=0$.

$$G(0, t, \xi, \tau) = 0.$$

Calculando la derivada

$$\left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \frac{x}{2\sqrt{\pi}\,[a^2(t-\tau)]^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

y sustituyendo su valor en (14), se obtiene la fórmula

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] \varphi(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{a^2 x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)\, d\tau, \qquad (15)$$

la cual determina a la función $u(x, t)$, que satisface a la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (0 < x < \infty,\ t > 0)$$

y a las condiciones complementarias

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u(0, t) &= \mu(t) \end{aligned} \qquad (0 < x < \infty).$$

3. **Función de la fuente para el segmento.** La solución de la ecuación de la conducción del calor en el segmento acotado $0 < x < l$ se da por la fórmula (11), la cual, despues de sustituir los arcos PA y BQ por segmentos de recta y de trasladar el origen de coordenadas al punto A, toma la forma

$$u(x, t) = a^2 \int_0^t \left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} \mu_1(\tau)\, d\tau - a^2 \int_0^t \left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi=l} \mu_2(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_0^l G(x, t, \xi, 0)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

donde

$$\mu_1(t) = u(0, t), \quad \mu_2(t) = u(l, t), \quad \varphi(x) = u(x, 0).$$

La función de la fuente $G(x, t, \xi, \tau)$ para el segmento se puede hallar por el método de las imágenes. Ubicando fuentes positivas en los puntos $2nl + \xi$ y negativas en los puntos $2nl - \xi$, representemos la función de la fuente mediante la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [G_0(x, t, 2nl+\xi, \tau) - G_0(x, t, 2nl-\xi, \tau)], \qquad (16)$$

donde

$$G_0(x,\ t,\ \xi,\ \tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}}\ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

es la función de la fuente para la recta infinita.

La convergencia de la serie, así como también el cumplimiento de las condiciones de frontera

$$G|_{x=0}\quad \text{y}\quad G|_{x=l}=0$$

se establecen sin dificultad.

En el § 2 del capítulo III fue obtenida otra forma de representación de la función de la fuente:

$$G(x,\ t,\ \xi,\ \tau)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}a^2(t-\tau)}\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}x\ \operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi. \tag{17}$$

Demostremos la equivalencia de ambas representaciones.

La fórmula (17) se puede considerar como el desarrollo de la función $G(x,\ t,\ \xi,\ \tau)$ en serie de Fourier en senos en el segmento $(0,\ l)$:

$$G(x,\ t,\ \xi,\ \tau)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(x,\ t,\ \tau)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi. \tag{18}$$

Calculemos los coeficientes de Fourier G_n de la función G, determinada por la serie (16):

$$G_n=\frac{2}{l}\int_0^l G(x,\ t,\ \xi,\ \tau)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi=$$

$$=\frac{2}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^l G_0(x,\ t,\ 2nl+\xi_1,\ \tau)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi_1\,d\xi_1-\right.$$

$$\left.-\int_0^l G_0(x,\ t,\ 2nl-\xi_2,\ \tau)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi_2\,d\xi_2\right\}.$$

Introduciendo las nuevas variables de integración

$$\xi'=2nl+\xi_1\quad \text{y}\quad \xi''=2nl-\xi_2,$$

se obtiene:

$$G_n=\frac{2}{l}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\int_{2nl}^{(2n+1)l} G_0(x,\ t,\ \xi',\ \tau)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi'\,d\xi'+\right.$$

$$\left.+\int_{(2n-1)l}^{2nl} G_0(x,\ t,\ \xi'',\ \tau)\operatorname{sen}\frac{\pi n}{l}\xi''\,d\xi'',\right.$$

de donde se deduce que

$$C_n = \frac{2}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(x, t, \xi, \tau) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi =$$

$$= \frac{2}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi.$$

Introduzcamos la variable

$$\lambda = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 (t-\tau)}}.$$

Entonces

$$d\lambda = \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 (t-\tau)}}; \quad \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \xi = \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} (x + 2\sqrt{a^2 (t-\tau)}\, \lambda) =$$

$$= \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x \cos \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t-\tau)}\, \lambda + \cos \frac{\pi n}{l} x \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t-\tau)}\, \lambda;$$

$$C_n = \frac{2}{l} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \cos \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t-\tau)}\, \lambda \, d\lambda +$$

$$+ \frac{2}{l} \cos \frac{\pi n}{l} x \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t-\tau)}\, \lambda \, d\lambda.$$

La segunda integral es igual a cero, puesto que el integrando es una función impar con respecto al origen de coordenadas.

La primera integral es un caso particular de la

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\lambda^2} \cos \beta\lambda \, d\lambda,$$

que es igual a

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}.$$

En nuestro caso, es

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{2\pi n}{l} \sqrt{a^2 (t-\tau)},$$

de forma que

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 (t-\tau)}$$

y

$$C_n = \frac{2}{l} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 (t-\tau)} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{l} x.$$

Sustituyendo la expresión hallada de los coeficientes de Fourier G_n en la fórmula (18), se obtiene de inmediato la segunda representación (17) para la función de la fuente G. Con esto queda demostrada la equivalencia de las dos representaciones diferentes (16) y (17).

§ 4. POTENCIALES TERMICOS

1. Propiedades de los potenciales térmicos de capas simple y doble. Como hemos visto, toda solución de la ecuación de la conducción del calor se puede representar en la forma (fig. 79):

$$u(x,t)=\int\limits_{AB}G_0u\,d\xi-\int\limits_{AP}G_0u\,d\xi+\int\limits_{BQ}G_0u\,d\xi+a^2\int\limits_{BQ+PA}\left(G_0\frac{\partial u}{\partial\xi}-u\frac{\partial G_0}{\partial\xi}\right)d\tau.$$

Estudiemos cada sumando por separado de esta suma, y demostremos, ante todo, que cada uno de ellos satisface, por separado, a la ecuación de la conducción del calor. En efecto, el primer sumando es la integral de Poisson, para la cual esto ya fue establecido.

Demostremos que, para los puntos interiores de la región $PABQ$, las integrales

$$V=a^2\int\limits_{AP}G_0\nu\,d\tau=\frac{a^2}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}}e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\nu(\tau)\,d\tau$$

$$(\xi=\chi_1(\tau)),$$

$$W=2a^2\int\limits_{AP}\frac{\partial G_0}{\partial\xi}\mu\,d\tau=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{x-\chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\mu(\tau)\,d\tau$$

satisfacen a la ecuación de la conducción del calor.

Las funciones V y W se llaman potenciales térmicos (de capa simple y de doble capa respectivamente).

Las derivadas de las funciones V y W se calculan derivando bajo el signo integral, puesto que el sumando que aparece al derivar con respecto a t es igual a cero. Por ejemplo,

$$G_0(x,t,\chi_1(\tau),\tau)\,\mu(\tau)\Big|_{\tau=t}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}}e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\mu(\tau)\Big|_{\tau=t}=0$$

en virtud de que $x\neq\chi_1(t)$. De esta manera, la derivación con respecto a los parámetros x, t se referirá a la función G_0, la cual es solución de la ecuación de la conducción del calor. El estudio de los demás sumandos se efectúa análogamente.

Estudiemos ahora el comportamiento de las funciones V, W en la curva AP $(x=\chi_1(t))$. Es evidente que la integral V es continua cuando el punto (x, t) pasa por la curva AP, puesto que esta integral converge uniformemente (véase el capítulo IV, § 5). Demostremos que W tiene una discontinuidad al pasar por la curva AP, siendo, además,

$$W\big|_{x=\chi_1(t)+0}=W\big|_{x=\chi_1(t)}+\mu(t),$$

$$W\big|_{x=\chi_1(t)-0}=W\big|_{x=\chi_1(t)}-\mu(t).$$

Esta demostración se efectuará bajo la hipótesis de que las funciones $\chi_1(t)$ y $\mu(t)$ son derivables.

Consideremos, primeramente, W con densidad constante $\mu(t)=\mu_0$:

$$W^0(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{x-\chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\mu_0\,d\tau$$

y la integral auxiliar

$$\tilde{V}^0(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{2\chi_1'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\mu_0\,d\tau,$$

que es una función continua en los puntos del arco AP, en virtud de la observación hecha.

La diferencia $W^0-\tilde{V}^0$ se calcula directamente:

$$W^0(x, t)-\tilde{V}^0(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t}e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\times$$

$$\times\left[\frac{x-\chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}-\frac{2\chi_1'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\right]\mu_0\,d\tau=\mu_0\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-\chi_1(t_0)}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\alpha_0}e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$

$$\left(\alpha=\frac{x-\chi_1(\tau)}{2\sqrt{a^2(t-\tau)}}\right),$$

donde

$$\alpha_0=+\infty,\ \text{si } x>\chi_1(t),$$
$$\alpha_0=0,\quad \text{si } x=\chi_1(t)=x_0,$$
$$\alpha_0=-\infty,\ \text{si } x<\chi_1(t).$$

Cuando $x\to x_0\pm 0$, se obtiene:

$$[W^0(x_0\pm 0, t)-W^0(x_0, t)]-[\tilde{V}(x_0\pm 0, t)-\tilde{V}(x_0, t)]=$$
$$=\mu_0\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pm\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\pm\mu_0.$$

En virtud de la continuidad de $\tilde{V}$, se tiene:

$$\tilde{V}(x_0\pm 0, t)-\tilde{V}(x_0, t)=0.$$

De esta forma,

$$W^0(x_0\pm 0, t)=W^0(x_0, t)\pm\mu_0.$$

Si $\mu(t)$ no es constante, entonces

$$W(x, t)=W^0(x, t)-\psi(x, t),$$

donde

$$\psi(x, t)=\frac{a^2}{2\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{x-\chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}[\mu(t)-\mu(\tau)]\,d\tau.$$

En virtud de las hipótesis hechas sobre la derivabilidad de la función $\mu(t)$, esta integral tiene la misma particularidad para $\tau = t$ que V, converge uniformemente y es una función continua en la curva AP. De este modo, el límite de $W(x, t)$ cuando $x = x_0 \pm 0$ es igual a

$$W(x_0 \pm 0, t) = W^\circ(x_0, t) \pm \mu,$$

que es lo que se quería demostrar.

No es difícil comprobar que la derivada $\frac{\partial V}{\partial x}(x, t)$ es discontinua para $x = x_0$, en forma semejante a $W(x, t)$. Esta derivada es igual a

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{x-\chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau)\, d\tau$$

y es igual a $-W(x, t)$, con densidad

$$\mu(t) = \frac{\nu(t)}{2}.$$

De aquí se deduce que

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0 \pm 0, t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x_0, t) \pm \frac{\nu(t)}{2},$$

donde la integral

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, t) = -\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_0^t \frac{x_0-\chi_1(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x_0-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \nu(\tau)\, d\tau$$

es igual a la semisuma de las derivadas de V en el punto x_0 por la izquierda y por la derecha:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial V}{\partial x}(x_0+0, t) + \frac{\partial V}{\partial x}(x_0-0, t)\right].$$

Obsérvese que la función $V(x, t)$ no tiene derivada en el punto x_0.

Con esto concluiremos el estudio de los potenciales a lo largo de AP. Las propiedades de éstos a lo largo de la curva BQ son completamente análogas.

2. Resolución de los problemas de contorno. Los potenciales térmicos constituyen un aparato analítico cómodo para la resolución de los problemas de contorno.

Consideremos, primeramente, el primer problema de contorno para la región semiacotada $x \geqslant \chi(t)$:

hallar la solución de la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx} \text{ para } x \geqslant \chi_1(t), \ t \geqslant t_0,$$

que satisfaga a las condiciones

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad x \geqslant \chi_1(t_0);$$

$$u[\chi_1(t); t] = \mu(t), \ t \geqslant t_0.$$

Sin detrimento de la generalidad, se puede considerar que $\varphi(x) = 0$, puesto que tomando la diferencia entre $u(x, t)$ y una solución arbitraria de la ecuación de la conducción del calor $v(x, t)$, que satisfaga a la misma condición

inicial, se obtiene una nueva función, para la cual será $\varphi(x) = 0$, y su valor de frontera seguirá siendo conocido.

Suponiendo que ya se efectuó la reducción a la condición inicial nula, escribamos la solución en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2a^2} W(x, t) = \int_0^t \frac{\partial G_0}{\partial \xi}(x, t, \chi_1(\tau), \tau)\, \bar{\mu}(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[x-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}(\tau)\, d\tau,$$

esta función satisface a la ecuación para $x > \chi_1(t)$, está acotada en el infinito y toma el valor inicial nulo para cualquier elección de $\bar{\mu}(t)$. Para $x = \chi_1(t)$, ésta es discontinua, y su valor límite para $x = \chi_1(t) + 0$ debe ser igual a $\mu(t)$:

$$\frac{\bar{\mu}(t)}{2a^2} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\chi_1(t) - \chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_1(t)-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}(\tau)\, d\tau = \mu(t).$$

Esta igualdad es una ecuación integral de Volterra de segunda especie, para la determinación de la función $\bar{\mu}(\tau)$, que determina la solución buscada $u(x, t)$. La existencia de la solución siempre tiene lugar, en virtud de la teoría general, si la curva $x = \chi_1(t)$ se determina por una función derivable.

Esta ecuación es particularmente sencilla, si la frontera de la región es inmóvil: $\chi_1(t) = x_0$. En este caso, la integral se anula y

$$\bar{\mu}(t) = 2a^2 \mu(t),$$

de manera que la solución buscada es

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x - x_0}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)\, d\tau.$$

Esta fórmula ya la encontramos dos veces (véase el capítulo III, § 3 y el capítulo VI, § 3, p. 2); sin embargo, sólo ahora se dio la demostración de que esta función satisface a la ecuación y a las condiciones complementarias.

Los problemas de contorno segundo y tercero se resuelven análogamente, mediante el potencial. Consideremos el problema de contorno para una región acotada, tomando las condiciones complementarias en la forma

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \chi_1(0) < x < \chi_2(0),$$
$$u[\chi_1(t); t] = \mu_1(t), \quad u[\chi_2(t); t] = \mu_2(t) \quad (t > 0).$$

Considerando que el valor inicial se redujo a cero: $\varphi(x) = 0$, representemos la solución como sigue:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a^2}(W_1 + W_2) =$$

$$= \int_0^t \frac{\partial G_0}{\partial \xi}(x, t, \chi_1(\tau), \tau)\, \bar{\mu}_1(\tau)\, d\tau + \int_0^t \frac{\partial G_0}{\partial \xi}(x, t, \chi_2(\tau), \tau)\, \bar{\mu}_2(\tau)\, d\tau.$$

Esta función satisface a la condición inicial nula, para funciones $\bar{\mu}_1(t)$ y $\bar{\mu}_2(t)$ cualesquiera. Esta es discontinua para $x = \chi_1(t)$ y $x = \chi_2(t)$

y sus valores límite para $x=\chi_1(t)+0$ y $x=\chi_2(t)-0$ deben ser iguales a $\mu_1(t)$ y $\mu_2(t)$, lo cual nos da el sistema de ecuaciones

$$\frac{\bar{\mu}_1(t)}{2a^2}+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\chi_1(t)-\chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_1(t)-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}_1(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\chi_1(t)-\chi_2(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_1(t)-\chi_2(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}_2(\tau)\,d\tau=\mu_1(t);$$

$$-\frac{\bar{\mu}_2(t)}{2a^2}+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\chi_2(t)-\chi_1(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_2(t)-\chi_1(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}_1(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\chi_2(t)-\chi_2(\tau)}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{[\chi_2(t)-\chi_2(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} \bar{\mu}_2(\tau)\,d\tau=\mu_2(t).$$

Este sistema es un sistema de ecuaciones integrales de Volterra, el cual tiene siempre solución.

EJERCICIOS DEL CAPITULO VI

1. Una esfera de radio R_0 se halla llena de gas de concentración u_0, en el momento inicial; fuera de la esfera, la concentración es igual a cero. Hallar la función u que caracteriza el proceso de difusión del gas en el espacio infinito. Resolver el mismo problema para el semiespacio, cuando hay una frontera impermeable al gas $z = 0$.

2. Resolver el problema del calentamiento de una esfera de radio R_0, si la temperatura inicial es igual a cero, y en la frontera se mantiene una temperatura constante.

3. Hallar la temperatura de una esfera, en cuya superficie tiene lugar un intercambio térmico con el medio, de temperatura nula, si la temperatura inicial es constante e igual a u_0.

4. Un cuerpo rígido homogéneo está limitado por dos esferas concéntricas, de radios a y $2a$. La superficie interior del cuerpo está aislada térmicamente, y en la exterior tiene lugar un intercambio térmico con el medio, de temperatura nula. Hallar la distribución de la temperatura en el cuerpo en el momento t, si la temperatura inicial de éste es igual a u_0.

5. Deducir la ecuación de la difusión en un medio que se mueve con velocidad constante. Escribir la expresión de la función de la fuente puntual en el espacio infinito.

6. Estudiar el problema estacionario de la difusión en un medio móvil, considerando que la velocidad del movimiento es constante, y despreciando la difusión a lo largo de la dirección del movimiento del medio (problema sobre el ataque de gas). Escribir la función de la fuente para el semiespacio, considerando que el plano $z = 0$ es impermeable con respecto al gas.

7. Escribir la función de la fuente térmica para la capa limitada por los planos $z = 0$ y $z = l$, así como también para una cuña de ángulo $\frac{\pi}{n}$ (n es un entero) con condiciones de frontera nulas. Analizar la solución.

8. Hallar la función de influencia de una fuente instantánea de calor de potencia Q, que se halla distribuida uniformemente en la superficie de una esfera de radio a.

9. Resolver el problema sobre el calentamiento de un cilindro infinito, cuya temperatura inicial es igual a cero, y en la superficie se mantiene una temperatura constante. Utilizando las tablas de las funciones de Bessel, hallar el perfil de la temperatura (tomando en el radio diez puntos) y la temperatura media en una sección para momentos grandes de tiempo. Construir las gráficas respectivas

10. Analizar el problema sobre la magnetización de un cilindro infinito por un campo magnético constante, paralelo al eje del cilindro. Utilizando las tablas de las funciones de Bessel, calcular la magnitud del flujo de la inducción a través del corte transversal del cilindro.

11. Escribir la función de una fuente puntual instantánea de calor para una región cilíndrica infinita de sección arbitraria, con condiciones de frontera de primera especie. Estudiar el caso particular de un corte transversal de forma circular.

Indicación. Representar la solución en la forma

$$u(M, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z, t)\, \psi_n(M),$$

donde $\psi_n(M)$ es la función propia de la sección transversal del cilindro.

APENDICES DEL CAPITULO VI

I. DIFUSION DE UNA NUBE

Estudiemos el proceso de difusión de la nube gaseosa que se forma al explotar un proyectil.

Con la explosión de un proyectil se genera cierta cantidad de humo Q, el cual se propaga en todas direcciones, formando una nube. Esta crece al principio, luego se transparenta en los bordes, su parte opaca oscura disminuye, toda la nube se transparenta, comienza a desvanecerse y, al fin, desaparece. Este cuadro se ve con particular claridad en un día despejado en el fondo del cielo celeste.

El proceso de propagación de una nube de humo se puede interpretar como el proceso de difusión del humo de una fuente puntual instantánea de potencia Q en el espacio infinito. Este proceso de difusión tiene un carácter no molecular, sino turbulento; a él le corresponde cierto coeficiente efectivo de difusión turbu-

lenta D. Aquí no se tiene en cuenta la dispersión inicial del humo, así como tampoco la influencia de la tierra, que es prácticamente insignificante. Bajo estas hipótesis, la concentración del humo se expresa por la fórmula

$$u(x, y, z, t) = Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\right)^3 e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}} \qquad (D = a^2),$$

si se ubica el origen de coordenadas en el punto de explosión del proyectil.

Detengámosnos en el problema de la visibilidad de la nube. El tiempo durante el que la nube se desvanece totalmente depende de la absorción de la luz en la atmósfera y del umbral de la sensibilidad del instrumento de medición (ojo, película fotográfica, etc).

Como es sabido, la intensidad de la luz, que pasa por capas homogéneas de un gas, es aproximadamente igual a

$$I = I_0 e^{-\alpha l},$$

donde I_0 es la intensidad original de la luz, $\alpha = \alpha_0 u$, el coeficiente de absorción, proporcional a la concentración del gas absorbente ($\alpha_0 = \text{const}$), u, la concentración del gas en la capa y l, el espesor de la capa.

Si se tienen dos capas de espesores l_1 y l_2 con diferentes concentraciones del gas, u_1 y u_2, entonces

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 u_1 l_1} e^{-\alpha_0 u_2 l_2} = I_0 e^{-\alpha_0 (u_1 l_1 + u_2 l_2)}.$$

De aquí queda claro que la intensidad de la luz que pasa por una nube, cuya concentración del humo cambia en forma continua, se determinará por la fórmula

$$I = I_0 e^{-\alpha_0 \int u\, dl}.$$

La visibilidad de la nube se determina por el cociente $\frac{I}{I_0}$, que depende de la magnitud $\int u\, dl$.

Sea δ el umbral de sensibilidad del instrumento de observación; entonces, para

$$\frac{I_0 - I}{I_0} < \delta, \text{ o bien } \frac{I}{I_0} > 1 - \delta,$$

la nube se vuelve invisible; para

$$\frac{I_0 - I}{I_0} > 1 - \delta, \text{ o bien } \frac{I}{I_0} < \delta,$$

la nube parece completamente opaca. Si

$$\delta < \frac{I}{I_0} < 1 - \delta,$$

la nube parece al observador parcialmente transparente. El grado de transparencia depende de la magnitud del cociente

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\alpha_0 \int u\, dl},$$

es decir, de la magnitud de la integral $\int u\, dl$.

Dirijamos ahora el eje z por el rayo visual y consideremos que el observador se halla en el infinito. Entonces la nube se proyecta en el plano (x, y). Para apreciar la visibilidad de distintas partes de la nube, que corresponden a los puntos (x, y), calculemos la integral

$$\int u\, dl = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, z)\, dz = Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4Dt}}\, dz =$$

$$= Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\right)^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{4Dt}}$$

Si la cantidad de humo en el rayo visual es pequeña,

$$\int u\, dl < \frac{\delta}{\alpha_0}, \quad \text{entonces} \quad \frac{I}{I_0} > 1 - \delta,$$

y la parte correspondiente es totalmente transparente. Si la cantidad indicada es grande,

$$\int u\, dl > \frac{\Delta}{\alpha_0}, \quad \text{entonces} \quad \frac{I}{I_0} < e^{-\Delta} = \delta,$$

es decir, si se elige $\Delta = \ln \frac{1}{\delta}$ de forma adecuada, la parte correspondiente de la nube es totalmente opaca. Para

$$\frac{\delta}{\alpha_0} \leqslant \int u\, dl < \frac{\Delta}{\alpha_0},$$

la condición

$$\alpha_0 \int u\, dl = \delta, \quad \text{o bien} \quad \alpha_0 Q\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\right)^2 e^{-\frac{\rho^2}{4Dt}} = \delta$$

$$(\rho^2 = x^2 + y^2),$$

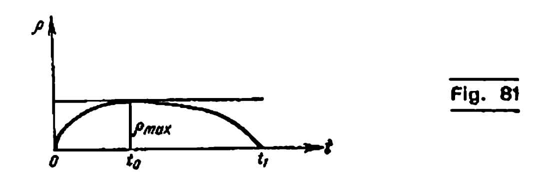


Fig. 81

determina la frontera de la nube, fuera de la cual ésta se vuelve invisible. El radio de la nube es, evidentemente, igual a

$$\rho = 2\sqrt{-Dt\ln\frac{\delta 4\pi Dt}{Q\alpha_0}} \quad \text{(fig. 81).}$$

Para valores pequeños de t, el radio de la nube (ρ) es pequeño, y crece conjuntamente con t; para

$$t = t_0 = \frac{\alpha_0 Q}{4\pi e\delta D}$$

ρ alcanza su máximo

$$\rho_{\text{máx}} = 2\sqrt{Dt_0} = \sqrt{\frac{\alpha_0 Q}{\pi e\delta}};$$

para $t > t_0$ el radio ρ de la nube disminuye y para

$$t_1 = \frac{Q\alpha_0}{\delta 4\pi D}$$

se anula (la nube desaparece).

Observando el proceso de desvanecimiento de la nube, se puede determinar el coeficiente de difusión turbulenta D en la atmósfera libre (por ejemplo, a partir de la fórmula para t_1 o para t_0).

II. SOBRE LA DESMAGNETIZACION DE UN CILINDRO CON UNA BOBINA

Consideremos el problema de la desmagnetización de un cilindro con una bobina. Este problema surge en relación con la teoría del galvanómetro balístico[1]).

Al conectar o desconectar un campo magnético, en la bobina surge una corriente de inducción. Si se plantea el problema con

[1]) Véase B. A. Vvedenski, *Revista de la Sociedad Rusa Físico-Química*, t. 55, 1, 1923.

exactitud, hay que tener en cuenta la acción inversa de esta corriente en el campo dentro del cilindro. Sin embargo, esta acción inhibidora de la bobina comúnmente no se tiene en cuenta y se resuelve el problema con condiciones de frontera simplificadas.

Estudiemos, ante todo, este planteamiento simplificado del problema. Tomemos un cilindro infinito de radio R, en cuya superficie se ha enrollado una bobina conductora. El cilindro se halla en un campo magnético homogéneo H_0, paralelo al eje del cilindro Oz. En el momento $t = 0$, el campo se desconecta.

Dentro del cilindro se satisfará, evidentemente, la ecuación

$$\Delta H = \frac{1}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t} \qquad (H = H_z), \tag{1}$$

donde

$$a^2 = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}.$$

En virtud de la simetría axial del campo, será

$$H_z = H(r, t),$$

y la ecuación (1) se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t}. \tag{1'}$$

Si se desprecia la influencia de la corriente de inducción en la bobina en el proceso de desmagnetización del cilindro, la condición de frontera en su superficie tendrá la forma

$$H(R, t) = 0 \qquad (t > 0). \tag{2}$$

Para $t = 0$, será

$$H(r, 0) = H_0. \tag{2'}$$

La solución de la ecuación (1') con la condición de frontera (2) se obtiene sin dificultad por el método de separación de las variables (véase la pág. 522):

$$H(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2H_0}{\mu_k^{(0)} J_1(\mu_k^{(0)})} e^{-\left(\frac{\mu_k^{(0)}}{R}\right)^2 a^2 t} J_0\left(\mu_k^{(0)} \frac{r}{R}\right). \tag{3}$$

Aquí J_0 y J_1 son las funciones de Bessel de orden nulo y primero, y $\mu_k^{(0)}$, la raíz k-ésima de la ecuación

$$J_0(\mu) = 0. \tag{4}$$

Como a^2 es muy grande, para t suficientemente grandes podemos limitarnos a tomar el primer término en la fórmula (3) (régimen regular):

$$H(r, t) \cong 1{,}60 \cdot H_0 e^{-5{,}77 \frac{a^2}{R^2} t} J_0\left(2{,}4 \frac{r}{R}\right). \qquad (5)$$

De aquí se obtiene, para el flujo de inducción:

$$\Phi(t) = 2\pi \int_0^R \mu H(r, t)\, r\, dr \cong \frac{4}{\mu_1^2} \Phi_0 e^{-\mu_1^2 \frac{a^2}{R^2} t}, \qquad (6)$$

donde Φ_0 es el flujo inicial (para $t = 0$).

La fórmula (6) se utiliza para los cálculos prácticos en las mediciones con el galvanómetro balístico.

Para determinar los límites de aplicación de esta fórmula, hay que resolver el problema indicado más arriba, teniendo en cuenta la acción inhibidora de la bobina[1]).

La fuerza electromotriz de la inducción en el contorno (espira) L, como es sabido, es igual a

$$\mathscr{E}_1^{\text{ind}} = \oint_L E_l\, dl.$$

Transformemos la integral de contorno, utilizando, para este fin, el teorema de Stokes, la segunda ecuación de Maxwell y la (1):

$$\mathscr{E}^{\text{ind}} = \iint_S \operatorname{rot}_z E\, dS = -\frac{\mu}{c} \iint_S \frac{\partial H}{\partial t} dS =$$

$$= -\frac{c}{4\pi\sigma} \iint_S \Delta H\, dS = -\frac{c}{4\pi\sigma} \oint_l \frac{\partial H}{\partial \nu} dl,$$

o bien

$$\mathscr{E}^{\text{ind}} = -\frac{cR}{2\sigma} \frac{dH}{d\nu}(R, t). \qquad (7)$$

Aquí S es el corte transversal del cilindro, L, el contorno que delimita S, ν, la normal al contorno L.

Las condiciones de frontera en la superficie del cilindro se escribirán en la forma de la condición del salto del campo:

$$H(R-0, t) - H(R+0, t) = \frac{4\pi}{c} nJ,$$

[1]) Este problema fue resuelto por V. N. Nikítina.

donde J es la corriente de inducción en la bobina, y n, el número de vueltas por unidad de longitud del cilindro. De aquí, teniendo en cuenta que $H(R+0, t) = 0$ y que

$$J = \frac{\mathcal{E}^{\text{ind}}}{\rho l},$$

donde ρ es la resistencia lineal de la bobina, y l, la longitud de una vuelta, se obtiene:

$$H(R, t) = H(R-0, t) = \frac{4\pi}{c} n \frac{\mathcal{E}^{\text{ind}}}{\rho l}. \qquad (8)$$

Comparando las relaciones (7) y (8), se obtiene definitivamente la condición de frontera

$$H(R, t) + \frac{n}{\rho\sigma} H_r(R, t) = 0.$$

De este modo, debemos resolver la ecuación

$$H_{rr} + \frac{1}{r} H_r = \frac{1}{a^2} H_t \qquad (9)$$

con las condiciones complementarias

$$H(r, 0) = H_0,$$

$$H(R, t) + \alpha H_r(R, t) = 0 \qquad \left(\alpha = \frac{n}{\rho\sigma}\right).$$

Buscaremos la solución por el método de separación de las variables, haciendo

$$H(r, t) = X(r)\, T(t).$$

Para las funciones $X(r)$ y $T(t)$ se obtienen las condiciones

$$X'' + \frac{1}{r} X' + \lambda^2 X = 0;$$

$$X(R) + \alpha X'(R) = 0 \qquad (X(0) < \infty), \qquad (10)$$

$$T' + \lambda^2 a^2 T = 0, \qquad (11)$$

donde λ^2 es el parámetro de la separación.

De la segunda ecuación se halla de inmediato:

$$T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Las soluciones particulares de la ecuación (10) son las funciones $J_0(\lambda r)$ y $N_0(\lambda r)$ (véase el Complemento II, I Parte). Sin

embargo, sólo $J_0(\lambda r)$ satisface a la condición de acotación para $r = 0$. Por esto,

$$X(r) = AJ_0(\lambda r).$$

La condición de frontera para $r = R$ da la ecuación para la determinación de los valores propios:

$$J_0(\lambda R) + \alpha \frac{dJ_0(\lambda R)}{dR} = 0,$$

o bien

$$J_0(y) - \beta y J_1(y) = 0,$$

donde

$$\beta = \frac{\alpha}{R}, \quad y = \lambda R. \tag{12}$$

Las raíces de esta ecuación se pueden hallar gráficamente, o bien desarrollando las funciones de Bessel en serie de potencias de $y = \lambda R$.

Designemos mediante y_k las raíces de la ecuación (12), de modo que

$$\lambda_k = \frac{y_k}{R}.$$

La solución general de nuestro problema tendrá la forma

$$H(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(y_k \frac{r}{R}\right) e^{-\left(\frac{y_k}{R}\right)^2 a^2 t}. \tag{13}$$

Los coeficientes A_k se determinan de la condición inicial:

$$A_k = \frac{\int_0^R H_0 J_0\left(r \frac{y_k}{R}\right) r\,dr}{\int_0^R J_0^2\left(r \frac{y_k}{R}\right) r\,dr} = \frac{2H_0 J_1(y_k)}{y_k\left[J_0^2(y_k) + J_1^2(y_k)\right]}. \tag{14}$$

Los términos de la serie (13) decrecen rápidamente, puesto que $a^2 = \frac{c^2}{4\pi\mu\sigma}$ es grande ($\sim 10^{13}-10^{14}$). Por esto, podemos limitarnos, con una exactitud suficiente, a tomar el primer término:

$$H(r, t) \cong \frac{2H_0 J_1(y_1) J_0\left(y_1 \frac{r}{R}\right)}{y_1\left[J_0^2(y_1) + J_1^2(y_1)\right]} e^{-y_1^2 \frac{a^2}{R^2} t}, \tag{15}$$

lo cual nos conduce a la siguiente expresión para el flujo:

$$\Phi(t) \cong \Phi_0 \frac{4J_1^2(y_1)}{y_1^2[J_0^2(y_1)+J_1^2(y_1)]} e^{-y_1^2 \frac{a^2}{R^2} t}, \qquad (16)$$

donde

$\Phi_0 = NH_0\pi R^2$ (N es el número total de vueltas en la bobina).

Los cálculos nos conducen a las siguientes fórmulas del flujo para distintos valores del parámetro β:

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0{,}804\Phi_0 e^{-4{,}75\theta} & \text{para} \quad \beta = 0{,}1, \\ 0{,}872\Phi_0 e^{-3{,}96\theta} & \text{para} \quad \beta = 0{,}2, \quad \theta = \dfrac{a^2}{R^2} t, \\ 0{,}912\Phi_0 e^{-3{,}35\theta} & \text{para} \quad \beta = 0{,}3, \end{cases}$$

que permiten estudiar la acción inhibidora de la corriente sobre la caída del campo en el cilindro. Al aumentar β, es decir, al aumentar la corriente en la bobina, la velocidad de disminución del flujo decrece. Para $\beta = 0$, se llega en forma natural a la ecuación (6) para el flujo, que es, de este modo, la aproximación nula.

En la teoría del galvanómetro balístico, es importante conocer el tiempo τ de caída del flujo desde Φ_0 hasta valores que se determinan por la sensibilidad del galvanómetro, el cual caracteriza la inercia del aparato. Sea γ la sensibilidad relativa del galvanómetro, es decir, éste puede registrar sólo valores $\Phi \geqslant \gamma\Phi_0$. La magnitud τ se puede hallar, evidentemente, haciendo en la fórmula

$$\Phi(t) = a\Phi_0 e^{-bt},$$

$$\Phi = \gamma\Phi_0 \text{ en el momento } t = \tau.$$

De la comparación de la solución exacta (16) con la solución aproximada (6), se aprecia que el coeficiente en la fórmula (6) es mayor. Esto significa un valor más elevado de la sensibilidad del aparato para un mismo valor de τ.

La tabla que exponemos más abajo contiene los valores de τ para distintos β, entre ellos, para $\beta = 0$, cuando $\gamma = 10^{-3}$.

	R	$\frac{a^2}{R^2}$	$\tau\,(\beta=0)$	$\tau\,(\beta=0,1)$	$\tau\,(\beta=0,2)$	$\tau\,(\beta=0,3)$
Hierro $\mu=500$ $\sigma=10^5\,\frac{1}{\Omega \text{cm}}$	1 cm	1,59	0,71	0,888	1,15	1,28
Alsifer $\mu=2000$ $\sigma=1,3\cdot10^4\,\frac{1}{\Omega\,\text{cm}}$	1 cm	5,12	0,217	0,272	0,330	0,405

CAPITULO VII

ECUACIONES DE TIPO ELIPTICO

(CONTINUACION)

---

§ 1. PROBLEMAS FUNDAMENTALES QUE SE REDUCEN A LA ECUACION $\Delta v + cv = 0$

1. Oscilaciones permanentes. Una clase muy amplia de problemas, relacionados con *las oscilaciones permanentes* (mecánicas, acústicas, electromagnéticas, etc.) nos conduce a la llamada *ecuación ondulatoria*

$$\Delta v + k^2 v = 0 \qquad (k^2 = c > 0). \tag{1}$$

Consideremos, en calidad de ejemplo, una membrana S, fija en la frontera C, y que oscila bajo la acción de fuerzas periódicas en el tiempo. La ecuación correspondiente tiene la forma

$$\Delta_2 \bar{u} = \frac{1}{a^2} \bar{u}_{tt} - F_0(x, y) \cos \omega t. \tag{2}$$

En el estudio de los procesos periódicos es cómodo utilizar las funciones complejas, sustituyendo (2) por la ecuación

$$\Delta_2 u = \frac{1}{a^2} u_{tt} - F_0(x, y) e^{i\omega t}. \tag{3}$$

La función $\bar{u}$ es, evidentemente, la parte real de la función u de (3).

Buscaremos las oscilaciones permanentes, que tienen la forma

$$u = ve^{i\omega t}. \tag{4}$$

Para la amplitud de las oscilaciones permanentes v, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\Delta_2 v + k^2 v = -F_0(x, y) \qquad \left(k = \frac{\omega}{c}\right), \tag{5}$$

a la cual debe agregarse la condición de frontera

$$v\,|_C = 0. \tag{6}$$

Si el contorno C de la membrana no está fijo, sino que efectúa oscilaciones periódicas con la misma frecuencia ω,

$$u|_C = f_0 e^{i\omega t}, \tag{6'}$$

entonces para la función v en el contorno C tiene lugar la condición de frontera inhomogénea

$$v|_C = f_0. \tag{6''}$$

Como ya indicamos, los problemas sobre las oscilaciones permanentes son característicos también para la acústica y la teoría del campo electromagnético. Además, a menudo se encuentran problemas sobre oscilaciones permanentes en un medio no homogéneo, en particular, en un medio homogéneo a trozos (cuando, por ejemplo, en el espacio hay regiones aisladas que violan la homogeneidad). A estos problemas se refieren los de la teoría de la difracción, que estudiaremos más abajo.

2. Difusión de un gas con desintegración y con reacciones en cadena. En la difusión de ciertos gases (por ejemplo, la emanación del radio), tiene lugar la reacción de desintegración de las moléculas del gas que se difunde. La velocidad de la reacción de desintegración se toma, por lo general, proporcional a la concentración del gas. Al escribir la ecuación de la difusión, esto es equivalente a la presencia de fuentes negativas de gas. En el caso del proceso estacionario de difusión, se obtiene la ecuación

$$D\,\Delta v + cv = 0 \qquad (c < 0), \tag{7}$$

donde D es el coeficiente de difusión. Como ya fue indicado en el capítulo VI, § 2, p. 3, tiene un gran interés el caso $c > 0$, el cual corresponde a la difusión con reacciones en cadena, que conducen a la multiplicación de las partículas que se difunden. En el caso estacionario, se obtiene la ecuación

$$\Delta v + cv = 0 \qquad (c > 0),$$

puesto que la reacción en cadena es equivalente a la presencia de fuentes de la sustancia que se difunde, proporcionales a la concentración $v(x, y, z)$.

3. Difusión en un medio móvil. En el capítulo IV se estudió el problema de la difusión de un gas en un medio inmóvil. Analicemos el problema sobre la difusión de un gas en una corriente estacionaria dada, cuya velocidad en el punto $M(x, y, z)$ tiene las componentes $\vartheta_1(x, y, z)$, $\vartheta_2(x, y, z)$, $\vartheta_3(x, y, z)$. La cantidad de gas que pasa por la superficie elemental $d\sigma$ en el punto

$M(x, y, z)$, es igual a

$$dQ = -D\, n \operatorname{grad} u\, d\sigma + u\vartheta\, n\, d\sigma,$$

donde $u(x, y, z)$ es la concentración del gas en la unidad de volumen, n, el vector unitario, normal a la superficie $d\sigma$, D, el coeficiente de difusión en el punto (x, y, z) y $\vartheta(x, y, z)$, el vector de la velocidad de la corriente.

Al escribir la ecuación de conservación de la materia para cierto volumen T de frontera Σ, se obtiene:

$$\int_{\Sigma} [-Dn \operatorname{grad} u + u\vartheta n]\, d\sigma = 0.$$

Transformemos la integral de superficie en una de volumen, aplicando la fórmula de Ostrogradski:

$$\int_{T} [\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(u\vartheta)]\, d\tau = 0.$$

De aquí se desprende, en virtud de la arbitrariedad del volumen T, la ecuación de la difusión en la corriente dada:

$$\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(u\vartheta) = 0, \qquad (8)$$

o, en forma escalar,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x}(u\vartheta_1) - \frac{\partial}{\partial y}(u\vartheta_2) - \frac{\partial}{\partial z}(u\vartheta_3) = 0. \qquad (8')$$

El problema sobre la propagación del calor en un medio en movimiento conduce a la misma ecuación.

Consideremos el ejemplo siguiente. Supongamos que en el semiespacio $z \geqslant 0$ se tiene una corriente de aire de velocidad constante u_0, dirigida por el eje x. Considerando constante al coeficiente de difusión, se obtiene de (8) la ecuación

$$D\,\Delta u - u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

que es la variante más simple de la ecuación del *ataque de los gases*. Haciendo

$$u = ve^{\mu x}$$

y tomando luego

$$\mu = \frac{u_0}{2D},$$

se obtiene, para la función $v(x, y, z)$, la ecuación

$$\Delta v + cv = 0,$$

donde

$$c = -\frac{u_0^2}{4D} < 0.$$

4. Planteamiento de los problemas interiores de contorno para la ecuación $\Delta v + cv = 0$. Como fue demostrado en el capítulo I, al estudiar las formas canónicas de las ecuaciones con coeficientes constantes, toda ecuación de tipo elíptico con coeficientes constantes, se puede reducir a la forma

$$\Delta v + cv = 0. \qquad (9)$$

Las propiedades de la solución de la ecuación (9) dependen sustancialmente del signo del coeficiente c, lo cual es físicamente evidente, si se tiene en cuenta la interpretación de difusión de esta ecuación.

Detengámonos en el problema de la unicidad de la solución del primer problema de contorno de la ecuación (9). Para la ecuación $\Delta v + cv = 0$ con $c < 0$, tiene lugar el principio del valor máximo en la forma siguiente:

la solución $v(M)$ de la ecuación $\Delta v + cv = 0$ $(c < 0)$, definida dentro de cierta región T de frontera Σ, no puede alcanzar valores máximos positivos (y mínimos negativos) en los puntos interiores de la región T.

En efecto, supongamos que en cierto punto M_0, que se halla dentro de T, la función $v(M)$ alcanza su valor máximo positivo $[v(M_0) > 0]$. Entonces, en el punto M_0 será

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \leqslant 0$$

y, por consiguiente, tendremos que $\Delta v \leqslant 0$, lo que está en contradicción con que el coeficiente c es negativo, y $v(M_0)$, positivo[1]).

Del principio del valor máximo se deduce automáticamente la unicidad de la solución del primer problema de contorno para la ecuación (9).

Puede existir sólo una solución de la ecuación $\Delta v + cv = 0$ $(c \leqslant 0)$, definida y continua en la región cerrada $T + \Sigma$, que tome en la frontera Σ los valores dados

$$v|_\Sigma = f.$$

[1]) Compárese con la demostración del principio del valor máximo para la ecuación de la conducción del calor.

Efectivamente, suponiendo que existen dos soluciones diferentes v_1 y v_2, considerando su diferencia $v_1 - v_2$ y efectuando razonamientos en la forma expuesta más arriba (véanse los capítulos III y IV), se obtiene una contradicción con el principio del valor máximo.

Si $c = 0$, se obtiene el primer problema de contorno para la ecuación de Laplace, la unicidad de cuya solución ya fue demostrada.

Si $c > 0$, la unicidad puede no tener lugar. Al estudiar en el capítulo V el problema sobre los valores propios del problema de contorno

$$\Delta v + \lambda v = 0, \qquad v|_\Sigma = 0,$$

comprobamos, en ejemplos, la existencia de soluciones no triviales (funciones propias) para $\lambda > 0$. Es evidente que el problema sobre la multiplicidad o la unicidad de la solución del primer problema de contorno es equivalente al problema de si c coincide o no con uno de los valores propios λ_n de la región T considerada.

§ 2. FUNCIONES DE INFLUENCIA DE LAS FUENTES PUNTUALES

1. Funciones de influencia de las fuentes puntuales. La teoría de los potenciales, desarrollada en el capítulo IV para la ecuación de Laplace, se puede generalizar también a la ecuación $\Delta v + cv = 0$. Para escribir las funciones de influencia de la fuente puntual, consideremos la solución v_0 que depende sólo de r. El operador de Laplace para la función $v_0(r)$ en el sistema de coordenadas esféricas tiene la forma

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dv_0}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d^2(rv_0)}{dr^2},$$

lo cual nos conduce a la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2w}{dr^2} + cw = 0 \quad (w = v_0 r).$$

Introduciendo la notación $c = k^2$ para $c > 0$ y $c = -\varkappa^2$ para $c < 0$, se obtiene:

$$\frac{d^2w}{dr^2} + k^2w = 0 \quad (c > 0), \tag{1}$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} - \varkappa^2 w = 0 \quad (c < 0). \tag{1'}$$

De la ecuación (1) se halla:

$$w = C_1 e^{ikr} + C_2 e^{-ikr} \tag{2}$$

y

$$v_0 = C_1 \frac{e^{ikr}}{r} + C_2 \frac{e^{-ikr}}{r} \tag{3}$$

respectivamente.

En el caso de ser k real, se obtienen dos soluciones linealmente independientes, $\frac{e^{ikr}}{r}$ y $\frac{e^{-ikr}}{r}$, a las cuales les corresponden las soluciones reales linealmente independientes

$$\frac{\cos kr}{r} \quad \text{y} \quad \frac{\operatorname{sen} kr}{r}.$$

Para $c < O$ $(c = -\varkappa^2)$, aplicando la ecuación (1′), se obtienen las dos soluciones reales linealmente independientes

$$\frac{e^{-\varkappa r}}{r} \quad \text{y} \quad \frac{e^{\varkappa r}}{r} \qquad (\varkappa > 0). \tag{4}$$

Las funciones

$$\frac{e^{\pm ikr}}{r} \quad (c > 0) \quad \text{y} \quad \frac{e^{\pm \varkappa r}}{r} \quad (c < 0)$$

tienen una discontinuidad para $r = 0$, tendiendo al infinito como $\frac{1}{r}$. El mismo carácter de singularidad poseía la función de la fuente para la ecuación de Laplace ($c = 0$), proporcional a $\frac{1}{r}$.

Estudiemos el comportamiento de estas funciones en el infinito. El caso $c < 0$ corresponde a un proceso acompañado de absorción (cfr. ecuación de la difusión (7), § 1). Una de las soluciones, $\frac{e^{-\varkappa r}}{r}$, tiende exponencialmente a cero en el infinito, lo cual, en términos del problema de la difusión, significa una disminución de la concentración, causada por la absorción. Esta disminución tiene una rapidez tanto mayor, cuanto mayor es el coeficiente $|c| = \varkappa^2$, que caracteriza la intensidad de la absorción. La segunda solución crece exponencialmente en el infinito, y no posee significado físico para el problema en la región no acotada (se la podría interpretar como la presencia de una fuente en el infinito).

El caso $c = k^2 > 0$ corresponde a los procesos ondulatorios permanentes (véase el § 1, p. 1). La función v representa la amplitud de la función

$$u(M, t) = v(M) e^{i\omega t},$$

que satisface a la ecuación de las oscilaciones (§ 1).

Una de las soluciones fundamentales de la ecuación (1),

$$v_0(r) = \frac{e^{-ikr}}{r},$$

corresponde al proceso oscilatorio

$$u_0(r, t) = \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r},$$

el cual tiene el carácter de una onda esférica que *se propaga* de la fuente en el punto $r = 0$. La segunda solución

$$v_0(r) = \frac{e^{ikr}}{r}$$

corresponde al proceso oscilatorio

$$u_0(r, t) = \frac{e^{i(\omega t + kr)}}{r},$$

el cual tiene el carácter de onda esférica, que llega desde el infinito hacia el punto $r = 0$ (ondas convergentes). Es evidente que esta solución no tiene significado físico directo en el estudio de los procesos generados por una fuente puntual en el espacio infinito.

Obsérvese que la función $v(M)$ se puede considerar como la amplitud de oscilaciones del tipo $e^{i\omega t}$ ó $e^{-i\omega t}$. Hemos tomado el factor del tiempo del primer tipo. En el segundo caso, la onda divergente tiene la forma

$$u_0(r, t) = \frac{e^{-i(\omega t - kr)}}{r},$$

es decir, a ésta le corresponde la segunda solución

$$v_0(r) = \frac{e^{ikr}}{r}.$$

La primera solución

$$v_0(r) = \frac{e^{-ikr}}{r},$$

en cambio, no tiene en este caso significado físico.

2. Representación integral de la solución. Para la ecuación (9) del § 1, para $c \neq 0$, se pueden escribir fórmulas análogas a las de Green, que fueron establecidas para la ecuación de Laplace. Introduciendo la notación

$$\mathscr{L}(u) = \Delta u + cu, \tag{5}$$

se obtiene de inmediato la fórmula

$$\int_T (u\mathscr{L}(v) - v\mathscr{L}(u))\, d\tau = \int_\Sigma \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) d\sigma, \tag{6}$$

que es la análoga, y la consecuencia directa de la segunda fórmula de Green (véase el capítulo IV, § 2). Sustituyendo aquí, en lugar de v, una de las «funciones de la fuente puntual», por ejemplo $\frac{e^{-\varkappa R}}{R}$, y repitiendo exactamente todos los razonamientos del capítulo IV, § 2, se obtiene la análoga de la fórmula fundamental de Green:

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \left[u \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right) - \frac{e^{-\varkappa R}}{R} \frac{\partial u}{\partial \nu}\right] d\sigma_M + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_T f(M) \frac{e^{-\varkappa R}}{R} d\tau_M \quad (R = R_{MM_0}), \tag{7}$$

donde $u(M)$ es la solución de la ecuación no homogénea $\mathscr{L}(u) = -f(M)$.

Para el caso $c = k^2$, tiene lugar la fórmula análoga

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_\Sigma \left[u \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{e^{-ikR}}{R}\right) - \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{\partial u}{\partial \nu}\right] d\sigma_M + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_T f(M) \frac{e^{-ikR}}{R} d\tau_M, \tag{7'}$$

que fue obtenida en el capítulo V como corolario de la fórmula de Kirchhoff.

Introduzcamos el concepto de función de la fuente de la ecuación $\mathscr{L}(u) = 0$ para la región T dada de frontera Σ. Sea $v(M)$

la solución de la ecuación $\mathcal{L}(v) = 0$, regular en todo punto de T. La fórmula (6) nos da:

$$0 = -\int_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma + \int_{T} f v \, d\tau. \tag{8}$$

Sumando (8) con la igualdad (7), se obtiene:

$$u(M_0) = -\int_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} + v \right) - \left(\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} + v \right) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] d\sigma_M +$$

$$+ \int_{T} \left(\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} + v \right) f(M) \, d\tau_M \quad (R = R_{MM_0}). \tag{9}$$

Esta fórmula es válida para una solución arbitraria $v(M)$ de la ecuación $\Delta v - \varkappa^2 v = 0$, regular en la región T. Utilizando la arbitrariedad de la elección de la función v, se obtiene:

$$u(M_0) = -\int_{\Sigma} u(M) \frac{\partial G(M_0, M)}{\partial \nu} d\sigma_M + \int_{T} G(M_0, M) f(M) \, d\tau_M, \tag{10}$$

donde

$$G(M_0, M) = \frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} + v \tag{11}$$

es la función de la fuente, que posee las siguientes propiedades:

1) $G(M, M_0)$ se hace infinita para $M = M_0$ como $\frac{1}{4\pi R}$, lo cual se deduce de la fórmula (11);

2) $G(M, M_0)$ satisface a la ecuación $\mathcal{L}(u) = 0$ en todos los puntos de T, a excepción del M_0;

3) $G(P, M_0) = 0$ en los puntos P que se hallan en la frontera Σ.

El problema de la existencia de la función de la fuente está ligado al problema de existencia de una función v que satisfaga a la ecuación

$$\mathcal{L}(v) = 0 \quad \text{en} \quad T$$

y a la condición de frontera

$$v = -\frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} \quad \text{en} \quad \Sigma.$$

Es evidente que la función $G(M, M_0)$ se determina unívocamente para cualquier región que admita solución única del primer problema de contorno. En particular, para $c = -\varkappa^2 < 0$, esta

función está determinada para cualquier región. En los casos más simples, la función de la fuente se puede hallar en forma explícita, utilizando un método análogo al de las imágenes electrostáticas[1]).

Así, por ejemplo, para el semiespacio $z > 0$ la función de la fuente tiene la forma

$$G(M, M_0) = \frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} - \frac{e^{-\varkappa R_1}}{4\pi R_1}, \tag{12}$$

$$R = R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2},$$

$$R_1 = R_{MM_1} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2},$$

donde $M_1(x_0, y_0, -z_0)$ es la imagen, en el plano $z = 0$, del punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

No nos detendremos aquí en el problema sobre la aplicación de las fórmulas anteriores para una región no acotada, lo cual, dicho sea de paso, se puede establecer sin dificultad en el caso $c < 0$. Los problemas para el espacio no acotado para $c > 0$ están relacionados con el «principio de la irradiación» y serán considerados en el parágrafo siguiente.

Para la función de la fuente $G(M, M_0)$, definida para una región arbitraria T, tiene lugar el *«principio de reciprocidad»*, que se expresa por la igualdad

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

La demostración de esta propiedad es una repetición literal de la demostración correspondiente para el caso de la ecuación de Laplace (capítulo IV, § 4).

En el caso de dos variables independientes, la ecuación para la función $v_0(r)$ tiene la forma

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_0}{dr}\right) + k^2 v_0 = 0, \quad \text{o bien} \quad \frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_0}{dr} + k^2 v_0 = 0,$$

es decir, es la *ecuación de Bessel de orden nulo*, cuya solución general se puede escribir del siguiente modo (véase el Complemento II):

$$v_0(r) = C_1 H_0^{(1)}(kr) + C_2 H_0^{(2)}(kr),$$

donde $H_0^{(1)}(kr)$ y $H_0^{(2)}(kr)$ son *las funciones de Hankel de orden nulo de primera y segunda especie*.

---

[1]) Para la esfera, el método de las imágenes electrostáticas no se puede aplicar, si $c \neq 0$.

Las funciones $H_0^{(1)}(kr)$ y $H_0^{(2)}(kr)$ tienen, para $r = 0$, una singularidad logarítmica:

$$H_0^{(1)}(\rho) = \frac{-2i}{\pi} \ln \frac{1}{\rho} + \ldots,$$

$$(\rho = kr),$$

$$H_0^{(2)}(\rho) = \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{\rho} + \ldots,$$

donde los puntos suspensivos denotan sumandos que se mantienen finitos para $\rho = 0$. En el infinito (cuando $\rho \to \infty$), el comportamiento de las funciones de Hankel se determina por las fórmulas asintóticas

$$H_0^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{i\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)} + \ldots,$$

$$H_0^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{-i\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)} + \ldots,$$

donde los puntos suspensivos denotan términos de orden mayor de infinidad con respecto a $\frac{1}{\rho}$.

De este modo, la ecuación $\Delta_2 v + k^2 v = 0$ tiene dos soluciones fundamentales.

$$v_0(r) = \begin{cases} H_0^{(1)}(kr), \\ H_0^{(2)}(kr), \end{cases}$$

que tienen una singularidad logarítmica y que corresponden a las funciones $\frac{e^{ikr}}{r}$ y $\frac{e^{-ikr}}{r}$ para el espacio.

La elección de una u otra función fundamental depende de la forma de las condiciones de irradiación en el infinito (véase el § 3, p. 4). Si la dependencia del tiempo se toma en la forma $e^{i\omega t}$, la función $H_0^{(2)}(kr)$ determina una onda cilíndrica divergente. Bajo la dependencia del tiempo $e^{-i\omega t}$, la onda divergente se determina por la función $H_0^{(1)}(kr)$.

Si $c = -\varkappa^2 < 0$, las soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$\frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_0}{dr} - \varkappa^2 v_0 = 0$$

son las funciones cilíndricas de argumento imaginario

$$I_0(\varkappa r) \quad \text{y} \quad K_0(\varkappa r).$$

La primera de estas funciones está acotada para $r = 0$ y crece exponencialmente cuando $r \to \infty$; la función $K_0(\varkappa r)$ tiene, en el punto $r = 0$, una particularidad logarítmica:

$$K_0(\rho) = \ln\frac{1}{\rho} + \ldots$$

y es, por esto, la solución fundamental buscada. En el infinito, ésta disminuye según la ley

$$K_0(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, e^{-\rho} + \ldots$$

No nos detendremos con detalle en las fórmulas de Green y en el concepto de función de la fuente G en el caso de dos variables independientes, puesto que esto sería una repetición de la exposición anterior.

3. Potenciales. En el capítulo IV fueron estudiados los potenciales para la ecuación $\Delta u = 0$. Potenciales del mismo tipo se pueden escribir también para la ecuación $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$.

Llamaremos *potencial de volumen* (para la ecuación $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$) a la integral

$$V(M) = \int_T \rho(P)\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\, d\tau_P, \tag{13}$$

$$R = R_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad d\tau_P = d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

donde $\rho(P)$ es la densidad del potencial.

Formulemos brevemente las propiedades fundamentales del potencial de volumen, cuya demostración se efectúa en analogía con el capítulo IV.

1. Fuera de la región T, la función $V(M)$ satisface a la ecuación

$$\Delta V - \varkappa^2 V = 0.$$

2. Dentro de T la integral (13) converge, así como también las integrales que se obtienen derivando formalmente $V(M)$ bajo el signo integral:

$$\int_T \rho(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad \text{etc.}$$

3. La función $V(x, y, z)$ es derivable y sus derivadas primeras se pueden calcular derivando bajo el signo integral:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_T \rho(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad \text{etc.}$$

Las funciones $H_0^{(1)}(kr)$ y $H_0^{(2)}(kr)$ tienen, para $r = 0$, una singularidad logarítmica:

$$H_0^{(1)}(\rho) = \frac{-2i}{\pi} \ln \frac{1}{\rho} + \ldots, \qquad (\rho = kr),$$
$$H_0^{(2)}(\rho) = \frac{2i}{\pi} \ln \frac{1}{\rho} + \ldots,$$

donde los puntos suspensivos denotan sumandos que se mantienen finitos para $\rho = 0$. En el infinito (cuando $\rho \to \infty$), el comportamiento de las funciones de Hankel se determina por las fórmulas asintóticas

$$H_0^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{i\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)} + \ldots,$$

$$H_0^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{-i\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)} + \ldots,$$

donde los puntos suspensivos denotan términos de orden mayor de infinidad con respecto a $\frac{1}{\rho}$.

De este modo, la ecuación $\Delta_2 v + k^2 v = 0$ tiene dos soluciones fundamentales:

$$v_0(r) = \begin{cases} H_0^{(1)}(kr), \\ H_0^{(2)}(kr), \end{cases}$$

que tienen una singularidad logarítmica y que corresponden a las funciones $\frac{e^{ikr}}{r}$ y $\frac{e^{-ikr}}{r}$ para el espacio.

La elección de una u otra función fundamental depende de la forma de las condiciones de irradiación en el infinito (véase el § 3, p. 4). Si la dependencia del tiempo se toma en la forma $e^{i\omega t}$, la función $H_0^{(2)}(kr)$ determina una onda cilíndrica divergente. Bajo la dependencia del tiempo $e^{-i\omega t}$, la onda divergente se determina por la función $H_0^{(1)}(kr)$.

Si $c = -\varkappa^2 < 0$, las soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$\frac{d^2 v_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_0}{dr} - \varkappa^2 v_0 = 0$$

son las funciones cilíndricas de argumento imaginario

$$I_0(\varkappa r) \quad \text{y} \quad K_0(\varkappa r).$$

La primera de estas funciones está acotada para $r = 0$ y crece exponencialmente cuando $r \to \infty$; la función $K_0(\varkappa r)$ tiene, en el punto $r = 0$, una particularidad logarítmica:

$$K_0(\rho) = \ln \frac{1}{\rho} + \ldots$$

y es, por esto, la solución fundamental buscada. En el infinito, ésta disminuye según la ley

$$K_0(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} e^{-\rho} + \ldots$$

No nos detendremos con detalle en las fórmulas de Green y en el concepto de función de la fuente G en el caso de dos variables independientes, puesto que esto sería una repetición de la exposición anterior.

3. Potenciales. En el capítulo IV fueron estudiados los potenciales para la ecuación $\Delta u = 0$. Potenciales del mismo tipo se pueden escribir también para la ecuación $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$.

Llamaremos *potencial de volumen* (para la ecuación $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$) a la integral

$$V(M) = \int_T \rho(P) \frac{e^{-\varkappa R}}{R} d\tau_P, \tag{13}$$

$$R = R_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad d\tau_P = d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

donde $\rho(P)$ es la densidad del potencial.

Formulemos brevemente las propiedades fundamentales del potencial de volumen, cuya demostración se efectúa en analogía con el capítulo IV.

1. Fuera de la región T, la función $V(M)$ satisface a la ecuación

$$\Delta V - \varkappa^2 V = 0.$$

2. Dentro de T la integral (13) converge, así como también las integrales que se obtienen derivando formalmente $V(M)$ bajo el signo integral:

$$\int_T \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad \text{etc.}$$

3. La función $V(x, y, z)$ es derivable y sus derivadas primeras se pueden calcular derivando bajo el signo integral:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_T \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad \text{etc.}$$

La derivabilidad de la función $V(x, y, z)$ se demuestra bajo la única hipótesis de acotación de la función ρ. De aquí se deduce, en particular, la derivabilidad de V también en los puntos de la superficie Σ, que delimitan la región T, donde, por regla general, tiene lugar una discontinuidad de la densidad $\rho(M)$.

4. En los puntos interiores de la región T, en cuyos entornos la densidad ρ es derivable, las derivadas segundas del potencial de volumen V existen, y V satisface a la ecuación

$$\Delta V - \varkappa^2 V = -4\pi\rho(M).$$

5. Las derivadas primeras del potencial de volumen son integrales que convergen uniformemente, si ρ está acotada uniformemente. Por esto, las derivadas primeras son funciones continuas en todo el espacio, incluyendo los puntos de la superficie Σ.

Los potenciales de volumen permiten representar la solución del problema de contorno para la ecuación no homogénea $\Delta u - \varkappa^2 u = -f$ en forma de la suma

$$u(M) = V(M) + u_1(M),$$

donde $V(M)$ es el potencial de volumen con densidad $\rho = \frac{f}{4\pi}$ y $u_1(M)$, la solución del problema de contorno para la ecuación homogénea $\Delta u_1 - \varkappa^2 u_1 = 0$.

Pasemos a resumir las propiedades de los potenciales de capas simple y doble. Se llama *potencial de doble capa* a la integral

$$W(M) = \int_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu_P} \left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R} \right] d\sigma_P \qquad (R = R_{MP}), \tag{14}$$

donde $\mu(P)$ es la densidad superficial del potencial W.

Enumeremos las propiedades fundamentales del potencial de doble capa refiriéndonos, para su demostración, al capítulo IV, § 5.

1. Fuera de la superficie Σ, el potencial de doble capa satisface en todas partes a la ecuación homogénea $\Delta W - \varkappa^2 W = 0$.

2. El potencial de doble capa converge en los puntos de la frontera, si Σ pertenece a la clase de superficies de Liapunov.

3. La función W es discontinua en los puntos de la superficie Σ y tienen lugar las relaciones

$$W_i(M_0) = W(M_0) + 2\pi\mu(M_0).$$
$$W_e(M_0) = W(M_0) - 2\pi\mu(M_0).$$

Aquí $W_i(M_0)$ es el valor límite de la función $W(M)$ cuando M tiende a M_0 desde el interior de la región T, y $W_e(M_0)$, el valor límite de $W(M)$ cuando M tiende a M_0 desde el exterior de T.

El *potencial de capa simple*, definido por la integral de superficie

$$V(M)=\int_{\Sigma}\rho(P)\frac{e^{-\varkappa R}}{R}d\sigma_P \qquad (R=R_{MP}), \tag{15}$$

posee las siguientes propiedades:

1. Fuera de la superficie Σ, el potencial de capa simple satisface a la ecuación homogénea $\Delta V-\varkappa^2V=0$.

2. La integral converge uniformemente en Σ y determina una función $V(M)$ que es continua en todo el espacio.

3. Las derivadas normales del potencial de capa simple satisfacen, en las superficies de la clase de Liapunov, a las relaciones (cfr. (48), § 5 del capítulo IV)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_i=U_0+2\pi\rho(M_0),$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_e=U_0-2\pi\rho(M_0),$$

donde

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_i \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_e$$

son los valores límite de la derivada normal desde el interior y el exterior de Σ, respectivamente, en el punto M_0 de la superficie Σ (ν es la normal exterior) y

$$U_0(M_0)=\int_{\Sigma}\rho(P)\frac{\partial}{\partial \nu}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right]d\sigma_P \qquad (R=R_{M_0P}).$$

Los potenciales de superficie permiten reducir los problemas de contorno a ecuaciones integrales, para una clase muy amplia de superficies (por ejemplo, la clase de superficies de Liapunov).

Estudiemos el primer problema interior de contorno para la ecuación $\Delta u-\varkappa^2u=0$ con la condición de frontera $u|_{\Sigma}=f$. Supongamos que la función buscada se puede representar en la forma del potencial de doble capa

$$u(M)=W(M)=\int_{\Sigma}\mu(P)\frac{\partial}{\partial \nu_P}\left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R}\right]d\sigma_P, \tag{14}$$

el cual, como fue indicado más arriba, satisface dentro de T a la ecuación homogénea $\Delta u-\varkappa^2u=0$. Exigiendo que se cumpla la condición de frontera $u|_{\Sigma}=f$, se obtiene la siguiente ecua-

ción integral para determinar la función μ:

$$2\pi\mu(M) + \int_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial \nu_P} \left[\frac{e^{-\varkappa R}}{R} \right] d\sigma_P = f(M),$$

que es una ecuación integral lineal de Fredholm de segunda especie. No nos detendremos aquí en los problemas de existencia y unicidad de la solución de esta ecuación integral.

Para la ecuación $\Delta u - \varkappa^2 u = 0$, al igual que para la ecuación pe Laplace, se puede aplicar el método de las diferencias finitas.

§ 3. PROBLEMAS PARA UNA REGION NO ACOTADA. PRINCIPIO DE LA IRRADIACION

1. Ecuación $\Delta v + cv = -f$ en el espacio no acotado. Consideremos la resolución de la ecuación no homogénea

$$\Delta v + cv = -f \tag{1}$$

en el espacio infinito. Para mayor sencillez en la exposición, supondremos que f es diferente de cero sólo dentro de cierta región acotada (función local). El carácter de la solución de esta ecuación depende sustancialmente del signo del coeficiente c.

Detengámonos, primeramente, en el caso $c = -\varkappa^2 < 0$. La solución de la ecuación $\Delta v - \varkappa^2 v = -f$ se puede representar en forma de los potenciales de volumen

$$v_1(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-\varkappa R}}{4\pi R} d\tau_P \text{ y } v_2(M) = \int_T f(P) \frac{e^{\varkappa R}}{4\pi R} d\tau_P \quad (R = R_{MP}).$$

De este modo, la solución de la ecuación (1), sin condiciones complementarias en el infinito, no se determina unívocamente. Buscaremos, en forma análoga al problema exterior para la ecuación de Laplace, la solución de la ecuación (1) que se anula en el infinito. A esta condición la satisface la función $v_1(M)$ y la $v_2(M)$ no.

Demostremos el siguiente teorema de unicidad:

la ecuación

$$\Delta v - \varkappa^2 v = -f$$

no puede tener más de una solución que se anule en el infinito [1])

---

[1]) El término «función que se anula en el infinito» expresa aquí lo siguiente. Para todo ε existe un $r(\varepsilon)$ tal que para cualquier punto $M(r, \vartheta, \varphi)$, para el cual $r > r(\varepsilon)$, es $|u(M)| < \varepsilon$, es decir, suponemos que hay una convergencia uniforme hacia cero cuando $r \to \infty$.

Supongamos que existen dos soluciones diferentes del problema planteado, $\bar{v}(M)$ y $\bar{\bar{v}}(M)$ y consideremos su diferencia: $w = \bar{v} - \bar{\bar{v}}$. Por hipótesis, existe un punto M_0 tal que $w(M_0) = A \neq 0$. Consideraremos, por ejemplo, que $A > 0$. En virtud de que $w(M) \to 0$ en el infinito, existe un R_0 tal que para $r > R_0$ la función w es $w < \frac{A}{2}$. De aquí se deduce que el punto M_0 se halla dentro de T_{R_0}, una esfera de radio R_0, y que la función $w(M)$ alcanza su valor máximo dentro de T_{R_0}. Llegamos así a una contradicción con el principio del valor máximo, que tiene lugar para nuestra ecuación (véase el § 1, p. 4). El teorema de unicidad queda demostrado.

Consideremos ahora el caso $c = k^2 > 0$.

Las funciones

$$v_1(M) = \int_T f(P) \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} d\tau_P \quad \text{y} \quad v_2(M) = \int_T f(P) \frac{e^{ikR}}{4\pi R} d\tau_P \quad (R = R_{MP})$$

son, como antes, soluciones de la ecuación (1). Sin embargo, en este caso ambas funciones decrecen en el infinito. De aquí se deduce la necesidad de introducir condiciones complementarias en el infinito, que determinen unívocamente la solución de la ecuación (1). Estas condiciones serán analizadas en los puntos 2, 3 y 4 del presente parágrafo.

2. Principio de la absorción límite. El problema sobre las oscilaciones forzadas y amortiguadas nos conduce a la ecuación

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} u_{tt} + \beta u_t - F(M, t) \qquad (\beta > 0). \tag{2}$$

Consideraremos que la función $F(M, t)$ es periódica en el tiempo, es decir, que $F(M, t) = f(M) e^{i\omega t}$. En este caso, la ecuación (2) tiene soluciones periódicas del tipo

$$u(M, t) = v(M) e^{i\omega t}. \tag{3}$$

La función $v(M)$ satisface, evidentemente, a la ecuación

$$\Delta v + q^2 v = -f(M), \tag{4}$$

donde $q^2 = k^2 - i\beta\omega$ es una magnitud compleja.

Llamaremos a la ecuación (4), con el valor complejo del coeficiente q^2, *ecuación con absorción compleja de primero* ($\operatorname{Im} q^2 < 0$) *o de segundo* ($\operatorname{Im} q^2 > 0$) *tipo*, según el signo de la parte imaginaria de q^2, lo cual corresponde a una dependencia en el tiempo $e^{i\omega t}$ (primer tipo) o $e^{-i\omega t}$ (segundo tipo).

Las soluciones fundamentales de esta ecuación, que dependen solamente de r, tienen la forma

$$\bar{v}_0(r)=\frac{e^{-iqr}}{r} \quad \text{y} \quad \bar{\bar{v}}_0(r)=\frac{e^{iqr}}{r},$$

donde

$$q=\pm\sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2-i\beta\omega}=$$

$$=\pm\left\{\sqrt{\frac{\sqrt{k^4+\beta^2\omega^2}+k^2}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{k^4+\beta^2\omega^2}-k^2}{2}}\right\}=q_0-iq_1. \tag{5}$$

Los signos de las raíces se escogen de modo que sea $q_1>0$. Por lo tanto,

$$\bar{v}_0(r)=\frac{e^{-iq_0r}}{r}e^{-q_1r}, \quad \bar{\bar{v}}_0(r)=\frac{e^{iq_0r}}{r}e^{q_1r}.$$

La condición de acotación en el infinito la satisface sólo la función $\bar{v}_0(r)$; la función $\bar{\bar{v}}_0(r)$ crece indefinidamente para $r\to\infty$, por lo cual no posee significado físico directo.

El potencial de volumen

$$\bar{v}(M)=\int_T f(P)\frac{e^{-iq_0R}}{4\pi R}e^{-q_1R}\,d\tau_P \qquad (R=R_{MP}) \tag{6}$$

representa la única solución de la ecuación (4) que se anula en el infinito. El límite de $\bar{v}(M)$ cuando $\beta\to 0$ es igual a

$$v(M)=\lim_{\beta\to 0}\bar{v}(M)=\int_T f(P)\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}\,d\tau_P \qquad (R=R_{MP}),$$

puesto que cuando $\beta\to 0$ se tiene que $q_0\to k$ y $q_1\to 0$. Bajo la dependencia con respecto al tiempo $e^{i\omega t}$ que hemos escogido, la magnitud q_0 es $q_0>0$, puesto que su signo está relacionado con el de q_1 por la relación $2q_0q_1=\beta\omega$.

Si la dependencia en el tiempo se ha tomado en la forma $e^{-i\omega t}$ ($\operatorname{Im} q^2>0$), entonces al valor positivo de q_1 le corresponderá $q_0<0$, y el límite de q_0 cuando $\beta\to 0$ será igual a $-k$.

De esta manera, la condición complementaria que permite obtener la solución de la ecuación ondulatoria

$$\Delta v+k^2v=-f$$

que corresponde a las ondas divergentes, es la condición de que la función $v(M)$ sea el límite de la solución acotada de la ecuación ondulatoria con absorción compleja de primera especie cuando el coeficiente de absorción tiende a cero[1]).

3. Principio de la amplitud límite. Con la ecuación ondulatoria

$$\Delta v + k^2 v = -f \qquad (7)$$

nos encontramos con mayor frecuencia en el estudio de las oscilaciones permanentes, generadas por fuerzas periódicas (véase el § 1, p. 1).

Consideremos la ecuación de las oscilaciones con segundo miembro periódico:

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -F \qquad (F = fe^{i\omega t}). \qquad (8)$$

Para determinar la solución hay que agregar a la solución ciertas condiciones iniciales, por ejemplo, nulas:

$$\left.\begin{aligned} u(M, 0) &= 0, \\ u_t(M, 0) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

La función $u(M, t)$ no será estrictamente periódica en la etapa inicial del proceso. Sin embargo, con el transcurso del tiempo en el sistema se establecerán oscilaciones periódicas con la frecuencia de la fuerza exterior, es decir, la solución $u(M, t)$ tomará la forma

$$u(M, t) = v(M) e^{i\omega t}; \qquad (10)$$

$v(M)$ representa la amplitud límite de las oscilaciones, es decir, $v(M) = \lim\limits_{t\to\infty} ue^{-i\omega t}$, y satisface a la ecuación

$$\Delta v + k^2 v = -f \qquad \left(k = \frac{\omega}{a}\right).$$

La exigencia de que $v(M)$ sea la amplitud límite de las oscilaciones con condiciones iniciales nulas es, precisamente, la condición complementaria que hay que agregar a la ecuación ondulatoria para obtener una solución única.

De esta forma, se obtiene el siguiente problema:

hallar la solución de la ecuación ondulatoria $\Delta v + k^2 v = -f$ que sea la amplitud límite de la solución de la ecuación de las

---

[1]) Véase A. G. Svéshnikov, *Principio de la irradiación*, DAN URSS, t. 73, № 5 (1950).

oscilaciones

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = -f(M) e^{i\omega t} \tag{8*}$$

con las condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} u(M, 0) &= 0, \\ u_t(M, 0) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Representemos la amplitud límite en forma explícita. Para esto, hallemos la solución de la ecuación de las oscilaciones (8*) con los datos iniciales nulos, aplicando la fórmula

$$u(M, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{T_{at}^M} \frac{f(P) e^{i\omega\left(t - \frac{R}{a}\right)}}{R} d\tau_P \quad (R = R_{MP}),$$

obtenida en el capítulo V (§ 2, (5)). Aquí T_{at}^M es una esfera de radio at con centro en el punto M.

Sea $f(P)$ una función local, diferente de cero sólo dentro de cierta región acotada T_0. Entonces se obtiene, para la amplitud límite $v(M)$, la expresión

$$v(M) = \lim_{t\to\infty} u(M, t) e^{-i\omega t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{T_{at}} \frac{e^{-ikR}}{R} f(P)\, d\tau_P =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{T_0} f(P) \frac{e^{-ikR}}{R} d\tau_P \qquad (R = R_{MP}).$$

De este modo, la amplitud límite se representa por el potencial de volumen que se determina por la solución fundamental $\frac{e^{-ikR}}{R}$ que corresponde a las ondas divergentes $\frac{e^{i(\omega t - kR)}}{R}$.

Matemáticamente, el principio de la amplitud límite conduce al mismo resultado que el de la absorción límite. Esto es natural, puesto que ambos principios dan la solución que corresponde a las ondas divergentes.

4. Condiciones de irradiación. En los puntos anteriores fueron estudiadas las bases físicas generales que permiten hallar la solución de la ecuación ondulatoria que corresponde a las ondas divergentes. Sin embargo, este camino exigía recurrir a la resolución de problemas auxiliares. Ahora estableceremos la condición analítica que caracteriza a la onda divergente y que se expresa

directamente en los términos de la solución estudiada de la ecuación ondulatoria.

Las ondas planas que se propagan a lo largo del eje x tienen la forma

$\bar{u}=f\left(t-\frac{x}{a}\right)$, onda directa (que va en el sentido positivo del eje x);

$\bar{\bar{u}}=f\left(t+\frac{x}{a}\right)$, onda inversa (que va en el sentido negativo del eje x).

La onda directa se caracteriza por la relación

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{1}{a}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}=0$$

y la inversa, por la relación[1])

$$\frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial x}-\frac{1}{a}\frac{\partial \bar{\bar{u}}}{\partial t}=0.$$

Para el régimen permanente

$$u=v(x)\,e^{i\omega t},$$

estas relaciones toman la forma

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+ik\bar{v}=0 \quad \left(k=\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{para la onda directa,} \qquad (11)$$

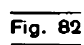
$$\frac{\partial \bar{\bar{v}}}{\partial x}-ik\bar{\bar{v}}=0 \quad \text{para la onda inversa.} \qquad (12)$$

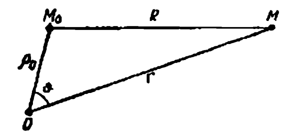
Pasemos ahora al caso de ondas esféricas. Si la onda esférica se genera por fuentes situadas en una parte acotada del espacio, a grandes distancias de las fuentes la onda es semejante a una onda plana, cuya amplitud decrece como $\frac{1}{r}$. De aquí resulta natural considerar que la onda esférica divergente debe satisfacer a la relación[2])

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}=o\left(\frac{1}{r}\right); \qquad (13)$$

[1]) Las relaciones escritas son ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, cuyas soluciones tienen la forma de ondas directa e inversa.

[2]) En lo sucesivo utilizaremos las dos notaciones: $O(\xi)$ es una magnitud que disminuye como ξ cuando $\xi\to 0$, $o(\xi)$, una magnitud de orden mayor de infinitud que ξ cuando $\xi\to 0$.





análogamente, para la onda esférica convergente tendremos:

$$\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}=o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{14}$$

Para la amplitud de las oscilaciones permanentes, estas condiciones toman la forma

$$\frac{\partial v}{\partial r}+ikv=o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ para las ondas esféricas divergentes,} \tag{15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}-ikv=o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ para las ondas esféricas convergentes.} \tag{16}$$

Las fórmulas (15) y (16) fueron obtenidas suponiendo que, a grandes distancias, toda onda divergente es semejante a una onda plana, cuya amplitud disminuye como $\frac{1}{r}$. Demostremos la justeza de esta afirmación.

1. En el caso de una fuente puntual que se halla en el origen de coordenadas, esta afirmación es totalmente evidente, puesto que la propia onda es de la forma

$$u(r,\ t)=\frac{e^{i(\omega t-kr)}}{r}=v_0(r)\,e^{i\omega t},$$

de modo que

$$\frac{\partial v_0}{\partial r}+ikv_0=o\left(\frac{1}{r}\right).$$

2. Supongamos que la onda esférica se genera por una fuente puntual que se halla en cierto punto M_0. La amplitud de la onda es igual a

$$v_0(M)=\frac{e^{-ikR}}{R},$$

siendo R la distancia entre los puntos M y M_0, igual a (fig. 82)

$$R = \sqrt{r^2 + \rho_0^2 - 2r\rho_0\cos\vartheta}.$$

Calculemos la derivada

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r - \rho_0\cos\vartheta}{R} \approx 1 + o\left(\frac{1}{r}\right).$$

En virtud del punto 1, se tiene que

$$\frac{\partial v_0}{\partial R} + ikv_0 = o\left(\frac{1}{R}\right).$$

Verifiquemos la justeza de la fórmula (15):

$$\mathcal{L}(v_0) = \frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 = o\left(\frac{1}{r}\right). \qquad (15')$$

En efecto,

$$\frac{\partial v_0}{\partial r} = \frac{\partial v_0}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial v_0}{\partial R}\left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right) = \frac{\partial v_0}{\partial R} + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

puesto que

$$\frac{\partial v_0}{\partial R}\cdot O\left(\frac{1}{r}\right) = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

De aquí y del punto 1 se deduce que

$$\mathcal{L}(v_0) = \frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 + o\left(\frac{1}{r}\right) = o\left(\frac{1}{r}\right),$$

que es lo que queríamos demostrar.

3. Demostremos que el potencial de volumen

$$v(M) = \int_T f(P)\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}\,d\tau_P \qquad (R = R_{MP}) \qquad (16')$$

satisface a la condición (15). Es evidente que

$$\mathcal{L}(v) = \int_T f(P)\,\mathcal{L}\left(\frac{e^{-ikR}}{4\pi R}\right)d\tau_P = \int_T f(P)\,o\left(\frac{1}{r}\right)d\tau_P = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

La fórmula (10) representa la amplitud de la onda divergente, generada por fuentes distribuidas en forma arbitraria dentro de la parte acotada T del espacio. Hemos visto que la función $v(M)$ satisface a la ecuación ondulatoria

$$\Delta v + k^2 v = -f(M)$$

y tiende a cero como $\frac{1}{r}$ en el infinito; además, como hemos demostrado, para ésta se cumple la relación

$$\frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

en el infinito, que es la condición complementaria necesaria.

Mostremos que

existe una solución única de la ecuación ondulatoria

$$\Delta v + k^2 v = -f(M),$$

donde $f(M)$ es una función local, que satisface, en el infinito, a las condiciones

$$\left.\begin{aligned} v &= O\left(\frac{1}{r}\right) \\ \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} + ikv &= o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned}\right\}^{1)} \qquad (\alpha)$$

Admitiendo la existencia de dos soluciones diferentes v_1 y v_2, se obtiene que su diferencia

$$w = v_1 - v_2$$

satisfaga a la ecuación homogénea y a la condición (α). Sea Σ_R una esfera de radio R, el cual haremos tender luego al infinito. Aplicando la fórmula fundamental de Green a las funciones $w(M)$ y $v_0(M) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R}$, tendremos en el punto M_0, que se halla dentro de Σ,

$$w(M_0) = \int_{\Sigma_R} \left(v_0 \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{\partial v_0}{\partial r} \right) d\sigma.$$

La condición (α) para $v_0(r)$ y $w(M)$ nos da:

$$v_0 \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{\partial v_0}{\partial r} = v_0 \left[-ikw + o\left(\frac{1}{r}\right)\right] - w\left[-ikv_0 + o\left(\frac{1}{r}\right)\right] =$$

$$= v_0 o\left(\frac{1}{r}\right) - w o\left(\frac{1}{r}\right) = o\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

[1]) I. N. Vecua demostró que la primera de las condiciones aquí expuestas es consecuencia de la segunda; véase I. N. Vecua, *Trabajos del Instituto de Matemáticas de Tbilisi*, t. XII, 1943.

Por esto,

$$w(M_0) = \int_{\Sigma_R} o\left(\frac{1}{r^2}\right) d\sigma \to 0 \quad \text{cuando} \quad R \to \infty,$$

de donde se deduce, en virtud de que el punto M_0 es arbitrario, la unicidad de la solución de nuestro problema.

Las condiciones

$$\left.\begin{aligned} v &= O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial r} + ikv &= o\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

se llaman *condiciones de irradiación*, o condiciones de Sommerfeld.

Hay que hacer notar que para regiones no acotadas, que no coinciden con todo el espacio, las condiciones en el infinito pueden tener una forma distinta de las condiciones de Sommerfeld.

De esta manera, las relaciones (α) representan la forma analítica de las condiciones de irradiación para el espacio infinito y no se basan en un principio físico que permita formular estas condiciones para regiones de forma más compleja.

Las condiciones de irradiación que se obtienen al introducir en la ecuación ondulatoria una absorción compleja infinitamente pequeña, fueron utilizadas por primera vez por V. S. Ignatovski[1]). El principio de introducción de una absorción compleja infinitamente pequeña es de fácil aplicación a las regiones no acotadas de formas diferentes, y a problemas más complejos.

Para los problemas en el plano, relacionados con la ecuación

$$\Delta_2 v + k^2 v = 0, \qquad (17)$$

las condiciones de irradiación en el infinito adquieren la forma

$$\left.\begin{aligned} v &= O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \\ \lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + ikv\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Las soluciones más simples de esta ecuación son las funciones de Hankel de orden nulo

$H_0^{(1)}(kr)$ y $H_0^{(2)}(kr)$ (véase el Complemento II, I Parte, § 3).

---

[1]) Véase V. S. Ignatovski, *Ann. d. Phys.*, t. 18, 1905.

De las fórmulas asintóticas

$$H_\nu^{(1)}(kr)=\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{i\left(kr-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right],$$

$$H_\nu^{(2)}(kr)=\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{-i\left(kr-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

y de las de recurrencia

$$\frac{dH_0^{(1)}}{dx}=-H_1^{(1)}(x),\qquad \frac{dH_0^{(2)}}{dx}=-H_1^{(2)}(x),$$

se aprecia que sólo la función $H_0^{(2)}(kr)$ satisface a la condición de irradiación.

De este modo, la función $H_0^{(2)}(kr)$ satisface a la ecuación (17), a las condiciones de irradiación (18) y tiene una singularidad logarítmica en $r=0$. Por esto, la función $H_0^{(2)}(kr)$, como ya fue indicado en el § 2, juega el papel de función de la fuente puntual para la ecuación ondulatoria (7), en el caso de dos variables independientes. La solución de la ecuación no homogénea

$$\Delta_2 v+k^2v=-f$$

se expresa mediante la fórmula

$$v(M)=-\frac{i}{4}\iint_S H_0^{(2)}(kR_{MP})\,f(P)\,d\sigma_P,$$

siendo S la región en la cual f es distinta de cero.

§ 4. PROBLEMAS DE LA TEORIA MATEMATICA DE LA DIFRACCION

1. Planteamiento del problema. La propagación de procesos ondulatorios (electromagnéticos, elásticos, acústicos, etc.) se acompaña de una serie de fenómenos típicos (difracción, refracción, reflexión, etc.). La resolución de los problemas relacionados con estos fenómenos se efectúa directamente, o tiene mucho de común con la solución de la ecuación ondulatoria en un medio no homogéneo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\rho\omega^2v=-\bar{f}\quad (p>0), \qquad (1)$$

donde p y ρ son los parámetros del medio.

El mayor interés, desde el punto de vista de las aplicaciones físicas, lo representa el caso de parámetros p y ρ constantes a trozos. El problema matemático correspondiente consiste en lo siguiente. En un espacio infinito, se tienen varias regiones acotadas T_i con parámetros constantes p_i y ρ_i; la parte T_0 del espacio, externa con respecto a las regiones T_i, es también homogénea ($p_0 = \text{const}$, $\rho_0 = \text{const}$). La ecuación ondulatoria dentro de cada región T_i toma la forma habitual

$$\Delta v_i + k_i^2 v_i = -f_i \quad \text{en} \quad T_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{2}$$

donde u_i es el valor de la función buscada u dentro de T_i,

$$k_i^2 = \frac{\rho_i \omega^2}{p_i}, \qquad f_i = \frac{\tilde{f}}{p_i}$$

en la región T_i. En las superficies Σ_i, que delimitan la región T_i[1]), las ecuaciones diferenciales se sustituyen por las condiciones de conjunción

$$\left.\begin{aligned} v_i &= v_0 && \text{en } \Sigma_i, \\ p_i \frac{\partial v_i}{\partial n} &= p_0 \frac{\partial v_0}{\partial n} && \text{en } \Sigma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

En el infinito, la función v_0, que es solución de la ecuación ondulatoria $\Delta v + k_0^2 v = -f_0$ en T_0, debe satisfacer a las condiciones de irradiación

$$\left.\begin{aligned} v_0(M) &= O\left(\frac{1}{r}\right), \\ \frac{\partial v_0}{\partial r} + ikv_0 &= o\left(\frac{1}{r}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Más abajo demostraremos que las condiciones de conjunción y las de irradiación son suficientes para la determinación unívoca de la función v en todo el espacio. El problema planteado más arriba es el más sencillo de la *teoría matemática de la difracción*.

2. Unicidad de la solución del problema de la difracción. Demostremos que el problema de la teoría matemática de la difracción, formulado en el p. 1, tiene solución única. Para simplificar la escritura, supondremos que la homogeneidad del medio se viola sólo por un cuerpo T_1, limitado por la superficie cerrada Σ_1, fuera de la cual se halla la región T_0. Aquí no haremos la hipótesis de que T_1 sea simplemente conexa.

---

[1]) Aquí consideramos, para simplificar, el caso en que las heterogeneidades T_i tienen frontera común sólo con el medio ambiente.

Demostremos el teorema siguiente:
puede existir sólo una función que satisfaga:
a) a las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}\mathscr{L}_0(v_0)=\Delta v_0+k_0^2 v_0=-f_0 \text{ en } T_0,\\ \mathscr{L}_1(v_1)=\Delta v_1+k_1^2 v_1=-f_1 \text{ en } T_1;\end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

b) a las condiciones de conjunción en la superficie Σ:

$$\left.\begin{aligned}v_1=v_0,\\ p_1\frac{\partial v_1}{\partial \nu}=p_0\frac{\partial v_0}{\partial \nu};\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

c) a las condiciones de irradiación en el infinito

$$\left.\begin{aligned}v_0=O\left(\frac{1}{r}\right),\\ \frac{\partial v_0}{\partial r}+ikv_0=o\left(\frac{1}{r}\right).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Admitiendo la existencia de dos soluciones diferentes

$$\bar{v}=\{\bar{v}_1, \bar{v}_0\} \quad \text{y} \quad \bar{\bar{v}}=\{\bar{\bar{v}}_1, \bar{\bar{v}}_0\},$$

se obtiene que su diferencia

$$w=\{w_1, w_0\},$$

donde

$$w_1=\bar{v}_1-\bar{\bar{v}}_1, \quad w_0=\bar{v}_0-\bar{\bar{v}}_0$$

satisface a las ecuaciones homogéneas y a las mismas condiciones complementarias:

$$\mathscr{L}_0(w_0)=0 \text{ en } T_0, \ \mathscr{L}_1(w_1)=0 \text{ en } T_1, \tag{2*}$$

$$w_1=w_0, \quad p_1\frac{\partial w_1}{\partial \nu}=p_0\frac{\partial w_0}{\partial \nu} \text{ en } \Sigma_1, \tag{3*}$$

$$w_0=O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial w_0}{\partial r}+ikw_0=o\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{para} \quad r\to\infty. \tag{4*}$$

Para las funciones w_0^*, w_1^*, conjugadas con las w_0 y w_1, se cumplirán, evidentemente, las ecuaciones homogéneas (2*), las condiciones (3*) y las de irradiación

$$w_0^*=O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial w_0^*}{\partial r}-ikw_0^*=o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{4**}$$

Sea Σ_R una esfera de radio R suficientemente grande, que abarque la región T_1 y T_R, delimitada por las superficies Σ_1 y Σ_R.

Aplicando la fórmula de Green a las funciones w_1, w_1^* en la región T_1 y a w_0, w_0^* en la T_R, se obtiene:

$$\int_{T_1}(w_1\mathscr{L}_1(w_1^*)-w_1^*\mathscr{L}_1(w_1))\,d\tau=\int_{\Sigma_1}\left(w_1\frac{\partial w_1^*}{\partial \nu_1}-w_1^*\frac{\partial w_1}{\partial \nu_1}\right)d\sigma=0,$$

$$\int_{T_R}[w_0\mathscr{L}_0(w_0^*)-w_0^*\mathscr{L}_0(w_0)]\,d\tau=$$

$$=\int_{\Sigma_1}\left(w_0\frac{\partial w_0^*}{\partial \nu_0}-w_0^*\frac{\partial w_0}{\partial \nu_0}\right)d\sigma+\int_{\Sigma_R}\left(w_0\frac{\partial w_0^*}{\partial \nu}-w_0^*\frac{\partial w_0}{\partial \nu}\right)d\sigma=0,$$

donde ν_0 es la normal exterior con respecto a la región T_R, y ν_1, la normal exterior a la región T_1. Es evidente que $\frac{\partial}{\partial \nu_0} = -\frac{\partial}{\partial \nu_1}$ en Σ_1.

Multiplicando la primera igualdad por p_1, la segunda por p_0, sumándoas y aplicando las condiciones de conjunción (3*), se halla:

$$\int_{\Sigma_R} \left(w_0 \frac{\partial w_0^*}{\partial r} - w_0^* \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) d\sigma = 0.$$

Expresando, de las condiciones de irradiación, las derivadas:

$$\frac{\partial w_0^*}{\partial r} = ikw_0^* + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial w_0}{\partial r} = -ikw_0 + o\left(\frac{1}{r}\right),$$

se obtiene la siguiente igualdad:

$$2ik \int_{\Sigma_R} w_0 w_0^* \, d\sigma + \int_{\Sigma_R} \left[w_0 \, o\left(\frac{1}{R}\right) - w_0^* \, o\left(\frac{1}{R}\right) \right] d\sigma = 0.$$

La segunda integral tiende a cero cuando $R \to \infty$, por lo cual

$$\int_{\Sigma_R} w_0 w_0^* \, d\sigma = \int_{\Sigma_R} |Rw_0|^2 \, d\Omega \to 0, \; R \to \infty \; (d\Omega = \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi). \tag{5}$$

En el Complemento II, II Parte, § 3, se demuestra que la función

$$V_m(r, \theta, \varphi) = \zeta_m^{(2)} Y_m(\theta, \varphi),$$

donde

$$\zeta_m^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} \, H_{m+\frac{1}{2}}^{(2)}(\rho) \quad (\rho = k_0 r),$$

e $Y_m(\theta, \varphi)$ es la función esférica de m-ésimo orden, satisface a la ecuación ondulatoria

$$\mathscr{L}_0(V_m) = \Delta V_m + k_0^2 V_m = 0$$

y a la condición de irradiación

$$\frac{\partial V_m}{\partial r} + ik_0 V_m = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Apliquemos la fórmula de Green, en la región T_R, a las funciones w_0 y V_m:

$$0 = \int_{T_R} [w_0 \mathscr{L}(V_m) - V_m \mathscr{L}(w_0)] \, d\tau =$$

$$= \int_{\Sigma_1} \left(w_0 \frac{\partial V_m}{\partial \nu} - V_m \frac{\partial w_0}{\partial \nu} \right) d\sigma + \int_{\Sigma_R} \left(w_0 \frac{\partial V_m}{\partial \nu} - V_m \frac{\partial w_0}{\partial \nu} \right) d\sigma = I_1 + I_R.$$

El segundo sumando, I_R, tiende a cero cuando $R \to \infty$, en virtud de las condiciones de irradiación (véase el teorema del § 3, p. 4). Como la primera integral, I_1, no depende de R, de aquí se deduce que $I_1 = 0$ y, por

consiguiente, $I_R=0$ para todo R, es decir,

$$\frac{d\zeta_{m}^{(2)}(k_0r)}{dr}\bigg|_{r=R}\cdot\int\limits_{\Sigma_R} w_0Y_m(\theta,\varphi)\,d\Omega-\zeta_m^{(2)}\bigg|_{r=R}\cdot\int\limits_{\Sigma_R}\frac{\partial w_0}{\partial r}Y_m(\theta,\varphi)\,d\Omega=0.$$

Si se denota

$$\int\limits_{\Sigma_R} w_0Y_m(\theta,\varphi)\,d\Omega=\alpha_m(k_0r),$$

se puede escribir:

$$\zeta_m^{(2)\prime}(k_0R)\,\alpha_m(k_0R)-\alpha_m'(k_0R)\,\zeta_m^{(2)}(k_0R)=0,$$

de donde se halla que

$$\alpha_m(k_0r)=a_m\zeta_m^{(2)}(k_0r),$$

siendo a_m un factor constante.

La condición completa de las funciones esféricas

$$\int\limits_{\Sigma_R}|Rw_0|^2\,d\Omega=\sum_{m=0}^{\infty}R^2\alpha_m^2(k_0R) \qquad (6)$$

y la fórmula (5) nos dan:

$$R\alpha_m(k_0R)\longrightarrow 0\quad\text{para}\quad R\longrightarrow\infty$$

Sin embargo, según la fórmula asintótica

$$\zeta_m^{(2)}(\rho)\approx\frac{1}{\rho}e^{-i\left(\rho-\frac{m+1}{2}\pi\right)},$$

el producto $r\zeta_m^{(2)}(k_0r)$ se mantiene mayor, en valor absoluto, que cierto número positivo para valores grandes de r; en consecuencia, $a_m=0$, es decir, $\alpha_m(k_0R)\equiv 0$; de aquí se desprende, en virtud de la ecuación (6), que $w_0=0$ en la esfera Σ_{r_0}. De esta forma, si la esfera Σ_{r_0}, de cierto radio r_0, abarca la región T_1, fuera de esta esfera será $w\equiv 0$. De aquí se concluye, en virtud de que la solución de la ecuación $\mathscr{L}=0$ es analítica [1]), que la función w_0 es $w_0\equiv 0$ en todas partes en la región T_0. Ahora bien, de las condiciones de conjunción se deduce que en la superficie Σ_1 debe ser

$$w_1=0\quad\text{y}\quad\frac{\partial w_1}{\partial\nu}=0. \qquad (7)$$

La fórmula fundamental de Green, aplicada en la región T_1 a la función w_1, demuestra que

$$w_1(M)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma_1}\left[\frac{e^{-ik_1R}}{R}\frac{\partial w_1(P)}{\partial\nu_1}-w_1(P)\frac{\partial}{\partial\nu_1}\left(\frac{e^{-ik_1R}}{R}\right)\right]d\sigma=0, \qquad (8)$$

donde $R=R_{MP}$, en todo punto M de la región T_1.

De este modo, hemos demostrado que $w(M)\equiv 0$ en todo el espacio. Esto demuestra el teorema de unicidad.

---

[1]) El hecho de ser w analítica en la región T_1 se deduce de la fórmula (7) del § 2 para el valor complejo $\varkappa=ik$ y para una superficie Σ que se halle enteramente dentro de T_1.

3. Difracción en la esfera. 1. Una clase de importancia práctica de soluciones de la ecuación de las oscilaciones

$$\Delta u - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

son las ondas planas. Se llama onda plana, que se propaga en cierta dirección dada, a la solución que depende del tiempo y de una coordenada espacial, la cual se cuenta en la dirección de la propagación. Por ejemplo, la onda plana que se propaga a lo largo del eje x satisface a la ecuación con dos variables independientes

$$u_{xx} - \frac{1}{a^2} u_{tt} = 0$$

y tiene la forma

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

En el caso del régimen permanente, cuando la dependencia del tiempo se determina por el factor $e^{i\omega t}$, la onda plana tiene la forma

$$u(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)}, \tag{9}$$

donde $k = \frac{\omega}{a}$ es el número ondulatorio, y $|A|$, la amplitud.

La onda plana que se propaga en la dirección l, donde $l(l_x, l_y, l_z)$ es el vector unitario, se puede escribir en la siguiente forma:

$$u(x, y, z, t) = Ae^{i[\omega t - k(xl_x + yl_y + zl_z)]} = Ae^{i[\omega t - klr]}. \tag{10}$$

Las funciones

$$v(x) = Ae^{-ikx}, \quad v(x, y, z) = Ae^{-iklr}, \tag{11}$$

que son soluciones de la ecuación ondulatoria

$$\Delta v + k^2 v = 0, \tag{12}$$

también se llaman generalmente *ondas planas*.

En la teoría matemática de la difracción, habitualmente se estudian las perturbaciones del campo en un medio homogéneo, creadas por las regiones T_i, que alteran la homogeneidad del medio. Sea $\bar{v}(M)$ el campo en el medio homogéneo, creado por las fuentes dadas, que consideraremos situadas fuera de la región T_i ($i = 1, 2, \ldots, n$); en particular, pueden ser fuentes suficientemente alejadas, que causan la aparición de las ondas planas

$$\bar{v}(x, y, z) = Ae^{-iklr}. \tag{13}$$

El campo real v_0, que tiene lugar en la región T_0 cuando hay heterogeneidades, se puede representar en forma de la suma

$$v_0(M) = w_0(M) + \bar{v}_0(M),$$

donde $\bar{v}_0(M)$ es la «onda incidente», y $w_0(M)$, la onda difractada, o reflejada, que representa la perturbación del campo exterior $\bar{v}$ por las heterogeneidades T_i.

Buscaremos en la región T_0 el campo difractado $w_0(M)$, y dentro de T_i, el «campo refractado» v_i. Establezcamos las condiciones que determinan las funciones buscadas w_0 y v_i ($i = 1, 2, \ldots, n$):

a) las funciones w_0 y v_i satisfacen a las ecuaciones

$$\Delta w_0 + k_0^2 w_0 = 0 \text{ en } T_0, \tag{14}$$

$$\Delta v_i + k_i^2 v_i = 0 \text{ en } T_i \ (i = 1, 2, \ldots, n);$$

b) en las fronteras de separación Σ_i de las regiones T_i y T_0 se cumplen las siguientes condiciones de conjunción:

$$v_i = w_0 + \bar{v}_0 \text{ en } \Sigma_i, \tag{15}$$

donde $\bar{v}_0$ es una función dada,

$$p_i \frac{\partial v_i}{\partial \nu} = p_0 \frac{\partial w_0}{\partial \nu} + f_i \text{ en } \Sigma_i, \tag{16}$$

donde $f_i = p_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \nu}$ es una función dada;

c) la onda reflejada $w_0(M)$ se comporta en el infinito como una onda esférica divergente, es decir, satisface a la condición de irradiación

$$w_0(M) = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial r} + ikw_0 = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

2. Analicemos con más detalle la difracción de una onda plana en la esfera [1]). Supongamos que en la dirección del eje z llega, desde el infinito, la onda plana

$$\bar{v} = Ae^{-ikz} \tag{17}$$

sobre la esfera de radio R con centro en el origen de coordenadas. Se buscan los campos reflejado y refractado en forma de desarrollo en funciones esféricas; desarrollemos a $\bar{v}_0$ y $f = p_0 \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial r}$, que figuran en los segundos miembros de las condiciones de conjunción, en funciones esféricas.

Hagamos $z = r \cos\theta$; entonces se puede aplicar el siguiente desarrollo de la onda plana en funciones esféricas:

$$e^{-ikr\cos\theta} = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(-i)^m \psi_m(kr) P_m(\cos\theta), \tag{18}$$

donde

$$\psi_m(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{m+\frac{1}{2}}(kr),$$

y $J_{m+\frac{1}{2}}(kr)$ es la función de Bessel de primera especie de $\left(m+\frac{1}{2}\right)$-ésimo orden, $P_m(\cos\theta)$, el polinomio de Legendre de m-ésimo orden. En efecto, a la izquierda se tiene la solución de la ecuación ondulatoria, que depende solamente de z. Cualquier solución de la ecuación ondulatoria se puede representar como la suma de productos de funciones esféricas por $\psi_m(kr)$. Por cuanto, en nuestro caso, el primer miembro de (18) tiene sime-

[1]) Con frecuencia se utilizan métodos análogos en la mecánica cuántica, en los problemas sobre la dispersión de partículas.

tría zonal, entonces

$$e^{-ikr\cos\theta}=\sum_{m=0}^{\infty}C_m\psi_m(kr)P_m(\cos\theta), \tag{19}$$

siendo C_m coeficientes por ahora indeterminados. Utilizando la ortogonalidad de los polinomios de Legendre y su norma (véase el Complemento II, II Parte), se obtiene:

$$C_m\psi_m(\rho)=\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{1}e^{-i\rho\xi}P_m(\xi)\,d\xi \tag{20}$$

$$(\rho=kr,\ \ \xi=\cos\theta).$$

Hallemos el primer término de la representación asintótica para la integral del segundo miembro; su comparación con el primer término del desarrollo asintótico de la función $\psi_m(\rho)$ nos permitirá hallar el coeficiente C_m. Integremos m veces por partes, integrando cada vez $e^{-i\rho\xi}$ y derivando $P_m(\xi)$. Como resultado, se obtiene el desarrollo de la integral en potencias de $\frac{1}{\rho}$.

Conservando sólo el primer término del desarrollo, tendremos:

$$\int_{-1}^{+1}e^{-i\rho\xi}P_m(\xi)\,d\xi\cong\frac{1}{-i\rho}\left[e^{-i\rho\xi}P_m(\xi)\right]_{-1}^{+1}=$$

$$=\frac{1}{-i\rho}\left(e^{-i\rho}P_m(1)-e^{i\rho}P_m(-1)\right)=\frac{1}{-i\rho}\left(e^{-i\rho}-(-1)^m e^{i\rho}\right)=$$

$$=\frac{1}{-i\rho}\left(e^{-i\rho}-e^{-im\pi}e^{i\rho}\right)=$$

$$=\frac{e^{-im\frac{\pi}{2}}}{-i\rho}\left[e^{-i\left(\rho-m\frac{\pi}{2}\right)}-e^{i\left(\rho-m\frac{\pi}{2}\right)}\right]=2(-i)^m\frac{\operatorname{sen}\left(\rho-\frac{m\pi}{2}\right)}{\rho}.$$

Por otro lado, como es sabido (véase el Complemento II, I Parte, § 3),

$$\psi_m(\rho)\cong\frac{\operatorname{sen}\left(\rho-\frac{m\pi}{2}\right)}{\rho}.$$

Comparando estas expresiones, se halla, de (20), que

$$C_m=(2m+1)(-i)^m, \tag{21}$$

lo cual demuestra la fórmula (18).

De (17) se deduce que

$$\left.\begin{aligned}\bar{v}_0|_{r=R}&=\sum_{m=0}^{\infty}a_mP_m(\cos\theta);\\ a_m&=A(2m+1)(-i)^m\psi_m(k_0R);\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned}p_0\frac{\partial\bar{v}_0}{\partial r}\bigg|_{r=R}&=\sum_{m=0}^{\infty}b_mP_m(\cos\theta);\\ b_m&=Ak_0p_0(2m+1)(-i)^m\psi_m'(k_0R).\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Los campos reflejado y refractado son soluciones de la ecuación ondulatoria y, al igual que el campo incidente, poseen simetría zonal. Por esto, las funciones v_1 y w_0 se buscan en la forma

$$v_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \psi_m (k_1 r) P_m (\cos\theta), \tag{24}$$

$$w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \zeta_m (k_0 r) P_m (\cos\theta), \tag{25}$$

$$\zeta_m (\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}} (\rho). \tag{26}$$

Pasemos ahora a determinar los coeficientes del desarrollo α_m y β_m. Utilizando la condición de conjunción y comparando los coeficientes de $P_m (\cos\theta)$, se obtiene:

$$\alpha_m \psi_m (k_1 R) - \beta_m \zeta_m (k_0 R) = a_m = A (2m+1) (-i)^m \psi_m (k_0 R),$$

$$p_1 k_1 \alpha_m \psi'_m (k_1 R) - p_0 k_0 \beta_m \zeta'_m (k_0 R) = b_m = A k_0 p_0 (2m+1) (-i)^m \psi'_m (k_0 R),$$

de donde

$$\alpha_m = A (2m+1) (-i)^m \frac{p_0 k_0 [\psi_m (k_0 R) \zeta'_m (k_0 R) - \zeta_m (k_0 R) \psi'_m (k_0 R)]}{p_0 k_0 \psi_m (k_1 R) \zeta'_m (k_0 R) - p_1 k_1 \psi'_m (k_1 R) \zeta_m (k_0 R)}, \tag{27}$$

$$\beta_m = A (2m+1) (-i)^m \frac{p_1 k_1 \psi_m (k_0 R) \psi'_m (k_1 R) - p_0 k_0 \psi'_m (k_0 R) \psi_m (k_1 R)}{p_0 k_0 \psi_m (k_1 R) \zeta'_m (k_0 R) - p_1 k_1 \psi'_m (k_1 R) \zeta_m (k_0 R)}. \tag{28}$$

3. Consideremos, en calidad de ejemplo, el problema de la dispersión del sonido por un obstáculo esférico sólido. Supongamos que sobre una esfera absolutamente rígida e inmóvil de radio R, con centro en el origen de coordenadas, incide una onda acústica plana, que se propaga en la dirección del eje z. La presión acústica $p (x, y, z, t)$, como fue establecido en el capítulo II, § 1, satisface a la ecuación de las oscilaciones

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \Delta p, \quad a^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0},$$

donde a es la velocidad del sonido, γ, el exponente de la adiabática, p_0 y ρ_0 son la presión y la densidad del medio en estado de reposo.

La presión en la onda plana incidente se da por la función

$$\bar{p}_0 = A e^{-i(\omega t - kz)} \left(k = \frac{\omega}{a}\right),$$

donde A es una constante.

Considerando el proceso permanente

$$p (x, y, z, t) = p (x, y, z) e^{-i\omega t},$$

se obtiene, para $p (x, y, z)$, la ecuación ondulatoria

$$\Delta p + k^2 p = 0.$$

En la superficie de la esfera S_R, en virtud de su total rigidez, debe ser nula la componente normal de la velocidad u. La proyección de la velocidad sobre la dirección de la normal n está relacionada con la presión por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n},$$

la cual nos da, en el caso estacionario,

$$u_n = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial p}{\partial n}.$$

De aquí se obtiene la condición de frontera

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{S_R} = 0.$$

Haciendo $p = \bar{p}_0 + w$, donde $w(x, y, z)$ es la presión de la onda dispersada, se obtienen, para la determinación de w, las siguientes condiciones:

a) la función $w(x, y, z)$ satisface a la ecuación ondulatoria

$$\Delta w + k^2 w = 0;$$

b) en la superficie de la esfera S_R se cumple la condición de frontera

$$\left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{S_R} = - \left. \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial n} \right|_{S_R};$$

c) la onda dispersada w se comporta en el infinito como una onda esférica divergente, es decir, satisface a la condición de irradiación cuando $r \to \infty$,

$$w(M) = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} + ikw = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

No es difícil apreciar que este problema es un caso particular del problema, considerado más arriba, de difracción, y corresponde al valor del parámetro $p_1 = 0$.

Haciendo en las fórmulas (25) y (28) $p_1 = 0$, se obtiene:

$$\beta_m = -A(2m+1)(-i)^m \frac{\psi'_m(k_0R)}{\zeta'_m(k_0R)} \tag{29}$$

y

$$w = -A \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)(-i)^m \frac{\psi'_m(k_0R)}{\zeta'_m(k_0R)} \zeta_m(k_0r) P_m(\cos\theta). \tag{30}$$

Si la longitud de onda es grande en comparación con las dimensiones de la esfera, es decir, si $k_0R \ll 1$, entonces en la fórmula (29) se pueden utilizar los desarrollos de las funciones $\psi_m(kR)$ y $\zeta_m(kR)$ en series, los cuales se deducen de los desarrollos de las funciones $J_{m+\frac{1}{2}}(kR)$ y $H^{(2)}_{m+\frac{1}{2}}(kR)$ en potencias del argumento pequeño kR (véase el Complemento II, I Parte, §§ 1 y 3):

$$\psi_0(kR) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2kR}} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \right),$$

$$\psi_1(kR) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\,\frac{\left(\frac{1}{2}kR\right)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)},$$

$$\zeta_0(kR) \simeq i\sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\,\frac{\left(\frac{kR}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad \zeta_1(kR) \simeq -i\sqrt{\frac{\pi}{2kR}}\,\frac{\left(\frac{kR}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}.$$

Como

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi},\quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi},$$

se obtiene:

$$\psi_0(kR) \simeq 1-\frac{(kR)^2}{6}, \quad \psi_1(kR) \simeq \frac{kR}{3},$$

$$\zeta_0(kR) \simeq \frac{i}{kR}, \quad \zeta_1(kR) \simeq \frac{i}{(kR)^2},$$

de donde se deduce que

$$\psi_0'(kR) \simeq -\frac{kR}{3}, \quad \psi_1'(kR) \simeq \frac{1}{3},$$

$$\zeta_0'(kR) \simeq -\frac{i}{(kR)^2}, \quad \zeta_1'(kR) \simeq -\frac{2i}{(kR)^3}.$$

Sustituyendo en fórmula (29) las expresiones halladas para ψ_m' y ζ_m', se halla:

$$\beta_0 = i\frac{A}{3}(kR)^3, \quad \beta_1 = -\frac{A}{2}(kR)^3.$$

No es difícil apreciar que los siguientes coeficientes son proporcionales a $(kR)^5$; por esto, en la dispersión de ondas largas ($kR \ll 1$), la perturbación w se representa aproximadamente por los dos primeros términos de la serie (30):

$$\left.\begin{aligned} &w \simeq \beta_0\zeta_0(kr)+\beta_1\zeta_1(kr)\cos\theta \\ &[P_0(\cos\theta)=1,\quad P_1(\cos\theta)=\cos\theta]. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

A grandes distancias de la esfera perturbadora ($kr \gg 1$), en la llamada zona «lejana» u «ondulatoria», se tienen, para las funciones $\zeta_0(kr)$ y $\zeta_1(kr)$, las representaciones asintóticas

$$\zeta_0(kr) \simeq \frac{i}{kr}e^{-ikr}, \quad \zeta_1(kr) \simeq -\frac{1}{kr}e^{-ikr}, \tag{32}$$

las cuales se desprenden de las representaciones asintóticas de las funciones de Hankel.

Sustituyendo en la fórmula (31) las expresiones (32) para $\zeta_0(kr)$ y $\zeta_1(kr)$ y cambiando β_0 y β_1 por sus valores aproximados, se obtiene:

$$w \simeq -\frac{Ak^2R^3}{3r}\left(1-\frac{3}{2}\cos\theta\right)e^{-ikr}. \tag{33}$$

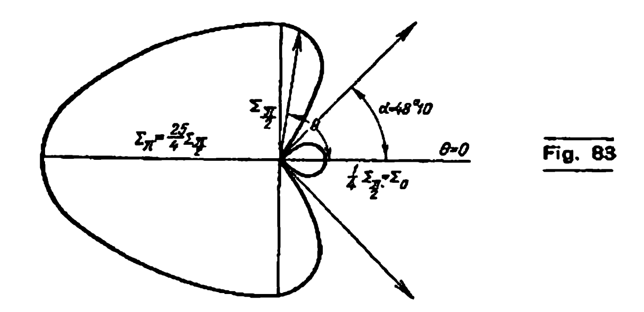


Fig. 83

Calculemos ahora la intensidad de la onda dispersada; esta magnitud se define como el valor medio del flujo de energía (vector de Umov), igual al producto de la presión acústica sobrante w por la velocidad u, entendiéndose por w y u las partes reales de las expresiones respectivas. En nuestro caso, es

$$\left.\begin{aligned} w &= w_0 \cos(\omega t - kr), \\ u &= u_0 \cos(\omega t - kr), \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

donde w_0 y u_0 son las amplitudes respectivas.

Calculemos la intensidad del sonido I en la zona ondulatoria, conservando los términos principales de los desarrollos asintóticos:

$$I = \frac{u_0 w_0}{2T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kr)\,dt = \frac{u_0 w_0}{2} \left(T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ es el período} \right).$$

De la ecuación del movimiento

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial r}$$

y de la fórmula (34), se halla:

$$u_0 = \frac{w_0}{a\rho}.$$

De esta manera,

$$I = \frac{w_0^2}{2a\rho} = \frac{A^2 k^4 R^6}{18 a\rho r^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right)^2.$$

Indicando la potencia dispersada por la esfera en el cono $d\theta$ mediante

$$2\pi r^2 \sum(\theta) \operatorname{sen}\theta\, d\theta,$$

tendremos:

$$\Sigma(\theta) = \frac{A^2 k^4 R^6}{18 a\rho}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\theta\right)^2.$$

El diagrama polar de la intensidad del sonido dispersado por la esfera se expone en la fig. 83 (las proporciones no se han conservado). Si

$$\cos\theta = +\frac{2}{3}, \quad \theta = \alpha = 48^\circ 10',$$

entonces no hay dispersión en la dirección $\theta = \alpha$.

EJERCICIOS DEL CAPITULO VII

1. Hallar la función de influencia de una fuente puntual estacionaria de gas, bajo la hipótesis de que éste se desintegra durante el proceso de difusión. Resolver el problema para la difusión en el espacio y en el plano.

2. Resolver el mismo problema en el semiplano $y > 0$, considerando que para $y = 0$ la concentración es nula.

3. a) Resolver los problemas interior y exterior para la ecuación

$$\Delta u - \varkappa^2 u = 0,$$

si en la esfera $r = r_0$ se da la condición de frontera $u|_{r=r_0} = A\cos\theta$.

En el caso del problema exterior, formular las condiciones en el infinito que aseguren la unicidad de la solución.

Estudiar problemas análogos suponiendo que

$$u|_{r=r_0} = F(\theta).$$

b) Resolver problemas análogos para la ecuación con dos variables independientes, cuando las condiciones de frontera están dadas en una circunferencia de radio r_0 y tienen la forma

$$u|_{r=r_0} = A\cos\varphi$$

y

$$u|_{r=r_0} = F(\varphi)$$

respectivamente.

4. Resolver los ejercicios 3 a), b) para la ecuación

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

En el caso del problema interior, estudiar el problema de para qué valores de r_0 existe solución única (considerar que k está dado).

Formular las condiciones que aseguran la unicidad de la solución tanto para dos como para tres variables independientes.

5. A una profundidad h bajo la superficie de la tierra se halla un medio, en el cual está distribuida sustancia radiactiva, con densidad constante. Hallar la concentración de la emanación, considerando que su concentración en la superficie es igual a cero.

6. Hallar las frecuencias propias de una membrana que tiene forma de anillo, cuyos radios son iguales a a y b ($a < b$), considerando que $v|_{r=a} = 0$ y $v|_{r=b} = 0$. Mostrar que el límite del primer valor propio, cuando $a \to 0$, es igual al primer valor propio de una membrana circular de radio b con frontera fija.

7. Hallar las oscilaciones y frecuencias propias para un endovibrador de forma cilíndrica, considerando que sus paredes son conductores ideales. Analizar el mismo problema en interpretación acústica.

Indicación. En el caso de las oscilaciones electromagnéticas, introducir el potencial de polarización (véase el apéndice I del capítulo VII).

8. Determinar el campo electromagnético de un dipolo puntual en el espacio infinito, considerando que las magnitudes del campo son proporcionales a $e^{i\omega t}$. Estudiar el comportamiento asintótico de la solución a grandes distancias (en la zona ondulatoria). Resolver el mismo problema para un dipolo que se halle sobre una superficie que sea un conductor ideal (dipolo vertical).

Indicación. Introducir el potencial de polarización.

9. Plantear el problema sobre la propagación de las ondas electromagnéticas dentro de una guía cilíndrica de ondas de radio de sección arbitraria con paredes conductoras ideales. Estudiar la onda de tipo eléctrico que se propaga a lo largo de una guía de ondas cilíndrica circular y que tiene la mayor longitud. Hallar el campo y calcular el flujo de energía a través de una sección perpendicular a la base (véase el apéndice I del capítulo VII).

10. Resolver la ecuación no homogénea

$$\Delta u + k^2 u = -f$$

en una región cilíndrica no acotada de sección circular, en cuya superficie se tienen condiciones de frontera homogéneas de primera o de segunda especie, y escribir la función de la fuente (véase el apéndice II del capítulo VII).

11. Escribir la función de la fuente en el caso del primer problema de contorno para la ecuación

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

a) en el semiespacio $z > 0$;
b) en el semiplano $y > 0$;
c) dentro de la capa $-l \leqslant z \leqslant l$.

12. Resolver el problema de la difracción de una onda electromagnética plana en un cilindro infinito conductor ideal. Resolver el mismo problema en interpretación acústica.

13. Hallar las oscilaciones propias electromagnéticas de un endovibrador esférico de paredes conductoras ideales. Analizar los casos de oscilaciones del tipo *TE* y *TM* (véase el apéndice II del capítulo VII) [1]).

14. Hallar las oscilaciones electromagnéticas propias de un endovibrador, que representa la región comprendida entre dos superficies cilíndricas coaxiales y dos planos perpendiculares al eje de los cilindros.

Indicación. Para el potencial de polarización $\Pi_{n,m}$ utilizar una fórmula análoga a la (14) del apéndice II del capítulo VII.

---

[1]) Para el significado de las notaciones *TE* y *TM*, véase el apéndice I del presente capítulo, pág. 592 (*N. del. T.*).

APENDICES DEL CAPITULO VII

1. ONDAS EN TUBOS CILINDRICOS

1. En la construcción de distintos aparatos radiotécnicos hay que resolver el importante problema de la transmisión de energía electromagnética del transmisor a la antena transmisora o, al contrario, de la antena al receptor. Los problemas de transmisión de la energía electromagnética se encuentran también en varios otros problemas prácticos de la radiotécnica moderna.

Hasta los últimos tiempos, este problema se resolvía aceptablemente mediante una línea de dos cables, que estaba constituida por dos cables metálicos entre los cuales se propagaba la onda electromagnética. Pero resulta ser que, conjuntamente con los defectos que son propios a todas las líneas transmisoras, esta línea de dos cables irradia energía electromagnética, y esta irradiación aumenta al crecer la frecuencia de las ondas de radio. Por esto, este tipo de líneas de transmisión se hace poco cómodo en la región de las ondas ultracortas.

En los últimos años, en la técnica de las ondas ultracortas (longitud de centímetros y decímetros), se aplican para la transmisión de energía instalaciones de transmisión completamente diferentes: tubos metálicos huecos (guías de ondas de radio), dentro de los cuales tiene lugar la propagación de las ondas de radio. Estas instalaciones de transmisión son líneas muy cómodas de transmisión, al tener pocas pérdidas[1]).

La teoría matemática de la propagación de ondas de radio en tubos fue fundada ya por Rayleigh, que estudió la propagación de ondas acústicas en los tubos. En los últimos años, la teoría de las guías de ondas de radio obtuvo un desarrollo intenso, especialmente en los trabajos de los científicos soviéticos. En nuestros días, las propiedades de las guías de onda circular, rectangular y otras se han estudiado suficientemente bien.

Consideremos, ante todo, las propiedades de las guías de onda de sección transversal arbitraria, y luego las ilustraremos en varios ejemplos concretos. Así, pues, consideremos un tubo cilíndrico, que se extiende ilimitadamente a lo largo del eje z. Supondremos que las paredes del tubo son conductores ideales. Denotemos mediante Σ la superficie y mediante S, el corte transversal del tubo y sea C el contorno que limita este corte. Supongamos que: 1) las características del medio que llena esta guía de ondas ε

---

[1]) Véase B. A. Vvedenski y A. G. Arenberg, *Guías de Ondas de Radio*, I parte, ed. Gostejizdat, 1946.

y μ son iguales a 1, $\sigma = 0$; 2) dentro de la guía de ondas no hay fuentes del campo; 3) los campos varían periódicamente según la ley $e^{-i\omega t}$.

Las ecuaciones de Maxwell tienen en este caso la forma

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -ik\boldsymbol{E}, \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = ik\boldsymbol{H}, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0. \end{aligned} \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right) \right\} \tag{1}$$

Como las paredes de la guía de ondas son conductores ideales, la componente tangencial de E_t en éstas es igual a cero:

$$E_t \,|_\Sigma = 0. \tag{2}$$

Demostremos que dentro de la guía de ondas se pueden propagar ondas electromagnéticas. Buscaremos la solución de las ecuaciones (1) en la forma

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{\Pi} + k^2\boldsymbol{\Pi}, \\ &\boldsymbol{H} = -ik \operatorname{rot} \boldsymbol{\Pi}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

donde $\boldsymbol{\Pi}$ es el potencial de polarización. Consideremos el caso en que el vector $\boldsymbol{\Pi}$ tiene sólo una componente, dirigida a lo largo del eje z ($H_z = 0$). En este caso, las ecuaciones (1) nos dan, luego de sustituir en ellas las expresiones (3):

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0, \quad \text{o bien} \quad \Delta_2\Pi + \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + k^2\Pi = 0 \tag{4}$$

$$(\boldsymbol{\Pi} = \Pi \boldsymbol{i}_z).$$

La condición (2) se cumplirá si se exige que

$$\Pi \,|_\Sigma = 0. \tag{5}$$

Buscaremos la solución en la forma

$$\Pi(M, z) = \psi(M) f(z), \tag{6}$$

donde M es el punto que se halla en la sección transversal S. Sustituyendo (6) en (4), se concluye que $\psi(M)$ es una función propia del problema sobre las oscilaciones de una membrana fija en el contorno, es decir,

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_2\psi + \lambda\psi = 0 \text{ dentro de } S, \\ &\psi\,|_C = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Aquí $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$ es el operador bidimensional de Laplace.

Denotemos mediante $\{\lambda_n\}$ y $\{\psi_n\}$ el sistema de valores propios y funciones propias de este problema. La solución particular del problema (4) tiene la forma

$$\Pi_n(M, z) = \psi_n(M) f_n(z).$$

donde la función $f_n(z)$ se determina de la ecuación

$$f_n'' + (k^2 - \lambda_n) f_n = 0. \tag{8}$$

La solución general de la ecuación (8) es

$$f_n(z) = A_n e^{i\gamma_n z} + B_n e^{-i\gamma_n z} \qquad (\gamma_n = \sqrt{k^2 - \lambda_n}). \tag{9}$$

No es difícil apreciar que el término $A_n e^{i\gamma_n z}$ corresponde a la onda que se propaga en el sentido positivo del eje z; en cambio, el segundo término en la fórmula (9) corresponde a la onda que se propaga en sentido opuesto.

Considerando sólo la onda que se propaga en un sentido, hagamos

$$f_n(z) = A_n e^{i\gamma_n z};$$

entonces, se obtiene la solución en la forma

$$\Pi_n(M, z) = A_n \psi_n(M) f_n(z), \tag{10}$$

donde A_n es una constante que se determina de las condiciones de generación de los campos.

Sustituyendo la expresión (10) en las fórmulas (3) y recuperando el factor $e^{-i\omega t}$, se hallan las componentes del campo en la forma

$$F_n(M) e^{i(\gamma_n z - \omega t)}, \tag{11}$$

donde F_n es una función que se expresa mediante la función propia de la membrana $\psi_n(M)$ o sus derivadas.

Si $k^2 > \lambda_n$, entonces γ_n es real, y la expresión (11) representa una onda que se propaga a lo largo del eje z con velocidad de fase

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \lambda_n}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\lambda_n}{k^2}}} > c.$$

La velocidad de grupo de la onda es igual, evidentemente, a

$$u = \frac{c^2}{v} = c\sqrt{1 - \frac{\lambda_n}{k^2}} < c,$$

es decir, en una guía de ondas vacía tiene lugar la dispersión.

Si $k^2 < \lambda_n$, entonces $\gamma_n = i\varkappa_n$ ($\varkappa_n > 0$) y en lugar de la expresión (11) se obtiene la onda amortiguada

$$F_n(M)\, e^{-i\omega t - \varkappa_n z}, \tag{12}$$

que se propaga a lo largo del eje z en el sentido positivo.

Como las frecuencias propias λ_n de la membrana crecen indefinidamente al aumentar el número n, para cualquier frecuencia ω, a partir de cierto número $n = N$, tendremos:

$$k^2 < \lambda_n.$$

En consecuencia, en la guía de ondas se puede propagar sólo un número finito de ondas. Si $k^2 < \lambda_1$, en la guía no puede haber ni una onda.

Para que en una guía de ondas de forma y dimensiones dadas pueda propagarse al menos una onda, evidentemente, debe cumplirse la condición

$$\lambda_1 < k^2, \quad \text{o bien} \quad \Lambda < \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}},$$

donde Λ es la longitud de la onda que se propaga en el tubo.

Para una guía de ondas de sección rectangular de lados a y b, se tiene:

$$\lambda_n = \lambda_{mn} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \qquad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \ldots \\ n = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}, \tag{13}$$

y, por consiguiente, la onda existirá sólo bajo las condiciones

$$k > \pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}, \quad \text{o bien} \quad \Lambda < \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}. \tag{14}$$

Las soluciones de las ecuaciones de Maxwell pueden ser también campos cuya componente «z» del campo eléctrico es nula:

$$E_z = 0. \tag{15}$$

Introduciendo el vector $\hat{\Pi} = \hat{\Pi} i_z$ y haciendo

$$\hat{E} = ik \operatorname{rot} \hat{\Pi}; \quad \hat{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \hat{\Pi} + k^2\hat{\Pi} \tag{16}$$

$$(\hat{E}_z = 0),$$

se comprueba que la función $\Pi(M, z)$ debe determinarse de la ecuación

$$\Delta\hat{\Pi} + k^2\hat{\Pi} = 0, \quad \text{o bien} \quad \Delta_2\hat{\Pi} + \frac{\partial^2\hat{\Pi}}{\partial z^2} + k^2\hat{\Pi} = 0 \tag{17}$$

y de la condición de frontera

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \nu} = 0 \text{ en } \Sigma. \tag{18}$$

Repitiendo los razonamientos expuestos más arriba, se hallan las soluciones de este problema:

$$\hat{\Pi}_n = \hat{A}_n \hat{\psi}_n (M) e^{i\hat{\gamma}_n z} \qquad (\hat{\gamma}_n = \sqrt{k^2 - \hat{\lambda}_n}), \tag{19}$$

a las cuales les corresponden las soluciones de la ecuación de Maxwell de la forma

$$\hat{F}_n (M) e^{i(\hat{\gamma}_n z - \omega t)}.$$

Aquí $\hat{\psi}_n (M)$ y $\hat{\lambda}_n$ denotan las funciones y frecuencias propias de la membrana S con frontera libre:

$$\Delta_2 \hat{\psi}_n + \hat{\lambda}_n \hat{\psi}_n = 0 \quad \text{en} \quad S,$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}_n}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad C.$$

De este modo, en la guía de ondas pueden existir campos electromagnéticos de dos tipos, $\{E, H\}$ y $\{\hat{E}, \hat{H}\}$, determinados por las fórmulas (3) y (16). Se ha convenido la siguiente terminología: se dice que hay ondas eléctricas (u ondas del tipo TM), si $H_z = 0$, o que hay ondas magnéticas (del tipo TE) si $E_z = 0$. Hemos comprobado que en la guía de ondas pueden existir ondas TE y TM. Se puede demostrar[1]) que cualquier campo en la guía de ondas se puede representar como la suma de campos TE y TM. De aquí se deduce que un campo arbitrario en la guía de ondas se puede hallar si se conocen las dos funciones escalares $\Pi (M, z)$ y $\hat{\Pi} (M, z)$.

2. Hallemos la magnitud de la energía que lleva una onda, por ejemplo, del tipo TM.

Para esto, calculemos la magnitud del flujo del vector de Umov-Poynting a través de la sección S:

$$W_z = \frac{c}{8\pi} \iint_S [EH^*]_z \, dS, \tag{20}$$

siendo H^* el vector conjugado del H, S, la sección transversal de la guía de ondas.

---

[1]) Véase A. N. Tíjonov y A. A. Samarsky, *Boletín de la Universidad Estatal de Moscú*, fasc. 7, 1948.

Introduzcamos un sistema rectangular de coordenadas x, y, z. Entonces será

$$W_z = \frac{c}{8\pi} \iint_S (E_x H_y^* - E_y H_x^*)\, dx\, dy. \tag{21}$$

Expresemos las componentes del campo mediante el potencial de polarización Π según las fórmulas

$$E_x = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x\, \partial z}, \qquad E_y = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y\, \partial z},$$

$$H_x^* = ik \frac{\partial \Pi^*}{\partial y}, \qquad H_y^* = -ik \frac{\partial \Pi^*}{\partial x}$$

y sustituyamos sus valores en la igualdad (21):

$$W_z = -\frac{c}{8\pi} ik \iint_S \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x\, \partial z} \frac{\partial \Pi^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y\, \partial z} \frac{\partial \Pi^*}{\partial y} \right) dx\, dy. \tag{22}$$

La función Π y su conjugada Π^* se pueden representar, de acuerdo con (10), en la forma

$$\Pi(M, z) = A_n \psi_n(M)\, e^{i\gamma_n z},$$

$$\Pi^*(M, z) = A_n^* \psi_n(M)\, e^{-i\gamma_n z},$$

donde ψ_n es la función propia de la membrana fija ($\psi_n|_C = 0$). De aquí se deduce que, en lugar de (22), se puede escribir

$$W_z = \frac{ck}{8\pi} \gamma_n |A_n|^2 \iint_S \left[\left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy =$$

$$= \frac{ck}{8\pi} \gamma_n |A_n|^2 \int_S (\nabla \psi_n)^2\, dS.$$

Aplicando la primera fórmula de Green:

$$\iint_S (\nabla \psi_n)^2\, dS = -\iint_S \psi_n \Delta_2 \psi_n\, dS + \int_C \psi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial \nu}\, ds =$$

$$= \lambda_n \iint_S \psi_n^2\, dS = \lambda_n,$$

se obtiene la expresión para el flujo de energía de la onda de número n:

$$W_z = \frac{ck}{8\pi} |A_n|^2 \gamma_n \lambda_n. \tag{23}$$

Si se propagan simultáneamente varias ondas, W_z será igual a la suma de términos del tipo (23).

Pasemos ahora a analizar el problema de la generación de campos electromagnéticos en una guía de ondas por corrientes dadas[1]).

3. Supongamos que en cierto volumen V_0 dentro de la guía de ondas Σ están dadas las corrientes $j(M, z)^{-i\omega t}$, que varían con el transcurso del tiempo según la ley armónica. Hallemos los campos que generan estas corrientes. En virtud del principio de superposición de los campos, es suficiente, evidentemente, resolver el problema de la excitación de una guía de ondas por un dipolo elemental de orientación arbitraria.

Para dar una idea del método de resolución del problema general planteado más arriba, consideremos el caso más simple de excitación de una guía de ondas por la corriente lineal $I = I_0(z)\, e^{-i\omega t}$, dado en el segmento L, paralelo al eje z.

Para determinar los campos electromagnéticos generados en la guía de ondas, hay que utilizar:

1) las ecuaciones de Maxwell (1);

2) las condiciones de frontera

$$E_{\text{tang}} = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma;$$

3) la condición de irradiación, en forma de la exigencia de que no haya ondas que lleguen desde el infinito;

4) la condición de perturbación, que tomaremos en la forma[2])

$$\int\limits_{K_\varepsilon} H_s\, ds = \frac{4\pi}{c} I_0, \quad \text{o bien} \quad H_s \approx \frac{2I_0}{c\rho}, \qquad (24)$$

donde K_ε es una circunferencia de radio ε ($\varepsilon \to 0$), que abarca la línea L, $\rho = |\overrightarrow{MM_0}|$, donde M_0 es un punto en la corriente, y M, un punto en la circunferencia K_ε. En otras palabras, el campo electromagnético en la corriente debe tener una singularidad de tipo determinado.

Tomemos el potencial Π, aplicando para esto las fórmulas (3). Sea (M_0, ξ) un punto arbitrario en la corriente. Introduzcamos un sistema de coordenadas cilíndricas ρ, φ, z con centro en el punto (M_0, ξ) y calculemos H_s, aplicando la ecuación (3):

$$H_s = ik\frac{\partial \Pi}{\partial \rho}.$$

---

[1]) A. A. Samarsky y A. N. Tijonov, *Revista de Física Teórica*, t. 27, fasc. 11, 12, 1947.

[2]) Véase el capítulo V, apéndice II, p. 3.

De aquí y de (24) se sigue que en el punto (M_0, ξ) la función Π debe tener una singularidad logarítmica:

$$\Pi \approx -\frac{2I_0}{ikc}\ln\frac{1}{\rho}. \qquad (25)$$

De esta manera, la función $\Pi(M, z)$ debe satisfacer a la ecuación ondulatoria (4), a la condición de frontera $\Pi = 0$ en Σ, a la de irradiación y a la de perturbación (25).

Buscaremos la solución de este problema en la forma

$$\Pi = K\int_L \Pi_0(M, M_0;\ z, \zeta)\, I_0(\zeta)\, d\zeta, \qquad (26)$$

donde $\Pi_0(M, M_0;\ z, \zeta)$ es la función de la fuente, que se determina como la solución de la ecuación

$$\Delta\Pi_0 + k^2\Pi_0 = 0$$

con respecto a las variables (M, z) y (M_0, ζ), que satisface a la condición de frontera

$$\Pi_0 = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma,$$

a la condición de irradiación y que tiene una particularidad del tipo $\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}$ cuando coinciden sus argumentos, es decir, que se representa en forma de la suma

$$\Pi_0(M, M_0;\ z, \zeta) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + v(M, M_0;\ z, \zeta)$$

$$\left(r = \sqrt{\rho^2 + (z-\zeta)^2},\ \rho = |\overrightarrow{MM_0}|\right),$$

donde v es una función regular, determinada de la ecuación ondulatoria y de la condición de frontera

$$v = -\frac{e^{+ikr}}{4\pi r} \quad \text{en} \quad \Sigma.$$

No es difícil apreciar que la función $\Pi(M, z)$, determinada por la fórmula (26), tendrá una singularidad logarítmica y que se cumplirá la condición de perturbación si se toma el factor normalizante igual a

$$K = -\frac{4\pi}{ikc}.$$

De aquí se deduce que

$$\Pi(M, z) = -\frac{4\pi}{ikc}\int_L \Pi_0(M, M_0;\ z, \zeta)\, I_0(\zeta)\, d\zeta.$$

En particular, para el elemento de corriente de longitud Δl, será

$$\Pi(M, z) = -\frac{4\pi}{ikc} I_0 \cdot \Delta l \cdot \Pi_0.$$

Por lo tanto, Π_0 posee el significado físico del *potencial de polarización* que corresponde a la perturbación creada por un elemento de corriente situado en el punto (M_0, ζ) paralelamente al eje de la guía de ondas.

De esta forma, el problema de la determinación del campo en una guía de ondas queda totalmente reducida a escribir la función de la fuente Π_0 del primer problema de contorno para la ecuación $\Delta u + k^2 u = 0$ dentro de un cilindro infinito.

Para escribir la función de la fuente, se puede aplicar el método expuesto en el capítulo VI, § 2. Consideremos la ecuación no homogénea

$$\Delta u + k^2 u = -f(M, z), \tag{27}$$

donde $f(M, z)$ es una función dada, con la condición de frontera

$$u|_\Sigma = 0.$$

Buscaremos la función $u(M, z)$ en forma de la serie

$$u(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\, \psi_n(M), \tag{28}$$

siendo $\psi_n(M)$ las funciones propias normalizadas de la membrana S:

$$\Delta_2 \psi_n + \lambda_n \psi_n = 0, \qquad \psi_n|_C = 0. \tag{7}$$

Desarrollando $f(M, z)$ en serie:

$$f(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\, \psi_n(M), \quad f_n(z) = \iint_S f(M', z)\, \psi_n(M')\, d\sigma_{M'} \tag{29}$$

y sustituyendo las expresiones (28) y (29) en la ecuación (27), se obtiene la ecuación

$$u_n''(z) - p_n^2 u_n(z) = -f_n(z), \quad p_n = \sqrt{\lambda_n - k^2}. \tag{30}$$

La solución de esta ecuación, como se comprueba fácilmente, se representa por la fórmula

$$u_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-p_n|z-\zeta|}}{2p_n} f_n(\zeta)\, d\zeta, \tag{31}$$

la cual, en virtud de la fórmula (29), se puede escribir en la forma

$$u_n(z) = \iint_S \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-p_n|z-\zeta|}}{2p_n} f(M', \zeta)\, \psi_n(M')\, d\sigma_{M'} \cdot d\zeta. \qquad (31')$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (28) y cambiando de lugar la suma y la integral, tendremos:

$$u(M, z) = \iiint_{T} \Pi_0(M, M', z-\zeta)\, f(M', \zeta)\, d\sigma_{M'} \cdot d\zeta, \qquad (32)$$

donde

$$\Pi_0(M, M', z-\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(M)\, \psi_n(M')}{2p_n} e^{-p_n|z-\zeta|}. \qquad (33)$$

La serie para $\Pi_0(M, M', z-\zeta)$, si $z \neq \zeta$, converge en forma uniforme y absoluta, en virtud de las acotaciones para las funciones propias[1]) y de la presencia del factor exponencial. La función $\Pi(M, M', z-\zeta)$ tiene, en el punto $(M = M', z = \zeta)$, una singularidad del tipo $\frac{1}{r}$, aunque no nos detendremos en demostrarlo[2]). De lo expuesto se deduce que

$$G(M, M', z-\zeta) = \Pi_0(M, M', z-\zeta).$$

---

[1]) Para las funciones propias $\psi_n(M)$, tiene lugar la acotación uniforme $|\psi_n(M)| \leqslant A\lambda_n$, donde A es una constante que no depende del punto M, ni del subíndice n. En efecto, el problema de contorno (7) es equivalente a la ecuación integral $\psi_n(M) = \lambda_n \iint_S G(M, M')\psi_n(M')\, d\sigma_{M'}$, donde $G(M, M')$ es la función de la fuente para la ecuación de Laplace $\Delta_2 u = 0$ con la condición de frontera $u|_C = 0$. De esta ecuación integral se deduce, en virtud de la desigualdad de Bunyakovsky, que

$$|\psi_n| \leqslant |\lambda_n| \sqrt{\iint_S G^2(M, M')\, d\sigma_{M'} \iint_S \psi_n^2(M')\, d\sigma_{M'}} \leqslant A|\lambda_n|,$$

puesto que

$$\iint_S \psi_n^2(M')\, d\sigma_{M'} = 1;$$

$$\iint_S G^2(M, M')\, d\sigma_{M'} \leqslant A^2.$$

Por un método análogo se obtienen las apreciaciones para las derivadas:

$$\left|\frac{\partial \psi_n}{\partial x}\right| \leqslant B\lambda_n^2, \quad \left|\frac{\partial \psi_n}{\partial y}\right| \leqslant B\lambda_n^2.$$

[2]) Véase A. A. Samarsky y A. N. Tijonov, *Revista de Física Teórica*, t. 27, fasc. 11 (1947).

es decir, que la función de la fuente Π_0 tiene la forma

$$\Pi_0(M, M', z-\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(M)\psi_n(M')}{2p_n}e^{-p_n|z-\zeta|}.$$

De la fórmula (33) se deduce que el campo se representará, en este caso, en forma de superposición de ondas del tipo (11) y (12). De la nota al pie de la pág. 591, se deduce que la serie (33) estará compuesta por un número finito de sumandos del tipo

$$B_n\psi_n(M)e^{i\gamma_n|z-\zeta|} \quad \text{(ondas que se propagan)}$$

$$(\gamma_n=\sqrt{k^2-\lambda_n},\ p_n=-i\gamma_n)$$

y por un número infinito de sumandos del tipo

$$B'_n\psi_n(M)e^{-p_n|z-\zeta|} \quad \text{(ondas amortiguadas)},$$

donde

$$B'_n=\frac{\psi_n(M')}{2p_n}, \qquad p_n=\sqrt{\lambda_n-k^2}, \quad \lambda_n>k^2.$$

Para determinar los campos, hay que aplicar las fórmulas (26) y (3).

El problema sobre la excitación de un conductor de ondas por un elemento de corriente magnética paralela al eje z (espira infinitamente pequeña de corriente eléctrica en el plano $S_{z=\zeta}$), nos conduce a la segunda función de la fuente

$$\hat{\Pi}_0(M, M'; z-\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{\psi}_n(M)\hat{\psi}_n(M')}{2\hat{p}_n}e^{-\hat{p}_n|z-\zeta|},$$

$$\hat{p}_n=\sqrt{\hat{\lambda}_n-k^2},$$

que satisface a la condición de frontera $\frac{\partial\hat{\Pi}_0}{\partial\nu}=0$ en Σ. Aquí será $H_z=0$; $\hat{\Pi}=-\frac{4\pi}{ikc}k\,\Delta l\hat{\Pi}_0$ ($k\,\Delta l$ es el momento del elemento de corriente magnética).

Por un método análogo, se puede resolver el problema sobre la perturbación causada por un dipolo orientado arbitrariamente (elemento de corriente), hallando las singularidades en este caso. Las funciones Π respectivas se determinarán por una fórmula análoga a la (33). En el caso de corrientes superficiales y de volumen, las funciones Π se expresan mediante integrales de superficie y de volumen (en analogía con (26)). El cálculo ulterior de los campos se efectúa por las fórmulas (3).

Así se resuelve completamente el problema sobre la excitación de una guía de ondas cilíndrica arbitraria. Para aplicar las fórmulas generales a las guías de onda de sección determinada, es suficiente hallar las oscilaciones propias de una membrana que tenga la forma de la sección transversal de la guía de ondas.

Escribamos las expresiones de las funciones propias ortonormales de una membrana rectangular de lados a y b:

$$\psi_n(M) = \psi_{nm}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \operatorname{sen} \frac{\pi m}{a} x \operatorname{sen} \frac{\pi n}{b} y;$$

$$\hat{\psi}_n(M) = \hat{\psi}_{nm}(x, y) = \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{ab}} \cos \frac{\pi m}{a} x \cos \frac{\pi n}{b} y$$

$$(\varepsilon_j = 2;\ j \neq 0;\ \varepsilon_0 = 1);$$

$$\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right).$$

Para la membrana circular de radio a se tiene:

$$\psi_n(M) = \psi_{mn}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}} \frac{J_n\left(\mu_{mn} \frac{r}{a}\right)}{|J'_n(\mu_{mn})|} \begin{matrix} \cos \\ \operatorname{sen} \end{matrix} n\varphi,$$

$$\hat{\psi}_n(M) = \hat{\psi}_{mn}(r, \varphi) = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{\pi a^2}} \frac{\hat{\mu}_{mn}}{\sqrt{\hat{\mu}_{mn}^2 - n^2}} \frac{J_n\left(\frac{\hat{\mu}_{mn}}{a} r\right)}{|J_n(\hat{\mu}_{mn})|} \begin{matrix} \cos \\ \operatorname{sen} \end{matrix} n\varphi,$$

donde μ_{mn} es raíz de la ecuación $J_n(\mu) = 0$; $\lambda_{mn} = \frac{\mu_{mn}^2}{a^2}$, $\hat{\mu}_{mn}$ es raíz de la ecuación $J'_n(\mu) = 0$; $\hat{\lambda}_{mn} = \frac{\hat{\mu}_{mn}^2}{a^2}$.

II. OSCILACIONES ELECTROMAGNETICAS EN RESONADORES HUECOS

En los últimos años, obtuvieron una gran difusión los *resonadores volumétricos*. o *endovibradores*, que son cavidades metálicas llenas de un dieléctrico (en particular, de aire). En los endovibradores pueden existir campos eléctricos estacionarios (ondas estacionarias), llamados oscilaciones electromagnéticas propias.

En la radiotécnica de las ondas ultracortas, se utilizan endovibradores de forma muy compleja. El problema general de determinación de las oscilaciones propias de los endovibradores de forma arbitraria es extremadamente complejo. Sin embargo, para los endovibradores de forma simple, la solución se obtiene en forma explícita. Como las paredes se fabrican de un metal buen conductor, en el cálculo de las oscilaciones propias se supone comúnmente que las paredes son conductores ideales. Las correcciones por la conductibilidad finita se pueden obtener utilizando las condiciones de frontera de Leontovich. En lo sucesivo supondremos que las paredes del endovibrador son conductores ideales y que todas las magnitudes del campo varían en el tiempo según la ley $e^{-i\omega t}$.

Sin proponernos dar una exposición exhaustiva de la teoría de los endovibradores, nos detendremos en ciertos problemas generales de la teoría de estos sistemas vibratorios.

1. Oscilaciones propias de un endovibrador cilíndrico. El problema de la determinación de las oscilaciones electromagnéticas propias, consiste en la determinación de las soluciones no triviales de las ecuaciones de Maxwell[1]), más exactamente, en la determinación de las frecuencias propias ω, bajo las cuales el sistema de ecuaciones homogéneas de Maxwell con condiciones de frontera homogéneas tiene soluciones no triviales, así como también de las propias soluciones no triviales.

Las ecuaciones de Maxwell tienen, en este caso, la forma

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -ik\boldsymbol{E}, \\ &\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = ik\boldsymbol{H}, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0, \\ &\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0 \end{aligned} \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right) \right\} \tag{1}$$

dentro de la cavidad T, en la superficie Σ de la cual se cumplen las condiciones

$$E_t = 0, \tag{2}$$

o bien

$$\frac{\partial H_\nu}{\partial \nu} = 0; \tag{3}$$

ambas condiciones, como se demuestra con facilidad, son equivalentes.

Efectuemos el cálculo de las oscilaciones propias de un endovibrador, que representa el «segmento» de una guía de ondas

[1]) El factor $e^{-i\omega t}$ se omite en todas partes.

cilíndrica de sección arbitraria, delimitado por las dos paredes laterales $z = \pm l$ (el eje z es paralelo a la generatriz del cilindro).

Al igual que en la guía de ondas cilíndrica, en el endovibrador considerado son posibles oscilaciones de tipo eléctrico ($H_z = 0$) y magnético ($E_z = 0$).

Para las ondas de tipo eléctrico, hagamos

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{\Pi} + k^2\mathbf{\Pi}, \\ \mathbf{H} &= -ik \operatorname{rot}\mathbf{\Pi}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

donde $\mathbf{\Pi} = \Pi \boldsymbol{i}_z$ ($\boldsymbol{i}_z$ es el vector unitario dirigido por el eje z) es el potencial vectorial de polarización, que tiene diferente de cero sólo la componente por el eje z. De la fórmula (4) se observa inmediatamente que en este caso es $H_z = 0$.

La función Π, como de costumbre, satisface a la ecuación ondulatoria

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0. \tag{5}$$

Tomemos en la superficie Σ un sistema rectangular local de coordenadas ($\boldsymbol{s}$, $\mathbf{v}$, $\boldsymbol{i}_z$), donde $\mathbf{v}$ es el vector unitario dirigido por la normal a la superficie, $\boldsymbol{s}$, por la tangente al contorno C, que delimita el corte transversal S del endovibrador cilíndrico. En virtud de las condiciones de frontera (2), tendremos:

$$\left.\begin{aligned} E_s|_\Sigma &= \frac{\partial^2\Pi}{\partial s\,\partial z}\bigg|_\Sigma = 0, \\ E_z|_\Sigma &= \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + k^2\Pi\right)\bigg|_\Sigma = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Ambas igualdades se satisfarán si se exige que sea

$$\Pi\,|_\Sigma = 0. \tag{7}$$

Para $z = \pm l$, de (2) se obtienen las condiciones

$$E_s|_{z=\pm l} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial s\,\partial z}\bigg|_{z=\pm l} = 0,$$

$$E_\nu|_{z=\pm l} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial\nu\,\partial z}\bigg|_{z=\pm l} = 0,$$

para el cumplimiento de las cuales es suficiente hacer

$$\frac{\partial\Pi}{\partial z}\bigg|_{z=\pm l} = 0. \tag{8}$$

De esta forma, se obtiene el siguiente problema de contorno:

hallar las soluciones no triviales de la ecuación ondulatoria

$$\Delta_2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi = 0 \qquad (6')$$

con las condiciones de frontera homogéneas

$$\Pi \,|_{\Sigma} = 0, \qquad (7)$$

$$\left.\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right|_{z=\pm l} = 0. \qquad (8)$$

Al igual que en el caso de una guía de ondas cilíndrica (véase la pág. 601), buscaremos la solución en la forma

$$\Pi (M, z) = \psi (M) f (z). \qquad (9)$$

Sustituyendo exta expresión en la ecuación (6') y utilizando la condición (7), se obtiene, para la función $\psi (M)$, el problema sobre las oscilaciones propias de la membrana fija:

$$\Delta_2 \psi + \lambda \psi = 0 \quad \text{en} \quad S, \qquad (10)$$

$$\psi = 0 \quad \text{en} \quad C. \qquad (11)$$

Para determinar la función $f (z)$ se obtiene, después de separar las variables, la ecuación

$$f'' + (k^2 - \lambda) f = 0 \qquad (12)$$

con la condición de frontera

$$f' (\pm l) = 0, \qquad (13)$$

que se desprende de la condición (8).

Debe tenerse en cuenta que aquí, a diferencia del problema para las guías de onda, k^2 no es una magnitud fija, sino que figura en la ecuación como parámetro. Debemos hallar los valores de k^2 para los cuales el problema (6) — (8) admite solución no trivial.

Resolviendo la ecuación (12) con las condiciones 13), se hallan las funciones propias

$$f_m (z) = A_m \cos \frac{\pi m}{2l} (l - z),$$

que corresponden a los valores propios

$$\mu_m = \left(\frac{\pi m}{2l}\right)^2 \qquad (m = 0, 1, \ldots),$$

donde

$$\mu_m = k_m^2 - \lambda.$$

El problema de contorno (10) — (11) nos da el espectro de los valores propios $\{\lambda_n\}$ con el sistema correspondiente de funciones propias normalizadas $\{\psi_n(M)\}$. De aquí se deduce que en el endovibrador pueden existir sólo oscilaciones cuyas frecuencias propias, o de resonancia, sean iguales a

$$\omega_{mn} = c\sqrt{\lambda_n + \mu_m}.$$

A estas frecuencias les corresponde el sistema de funciones propias

$$\Pi_{n,m}(M, z) = \bar{A}_{n,m}\psi_n(M)\cos\frac{\pi m}{2l}(l-z), \tag{14}$$

o bien

$$\Pi_{n,m}(M, z) = A_{n,m}\psi_n(M) f_m(z), \tag{14'}$$

donde

$$f_m(z) = \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{2l}}\cos\frac{\pi m}{2l}(l-z), \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2; & m \neq 0; \\ 1; & m = 0, \end{cases}$$

son las funciones normalizadas. La solución está determinada, salvo el factor de amplitud $A_{n,m}$, el cual se halla de la condición de excitación de la oscilación del tipo dado.

Si las funciones propias de la membrana, $\psi_n(M)$, son conocidas, se pueden calcular, por las fórmulas (14) y (4), las componentes del campo.

Si la sección transversal S del endovibrador es un rectángulo de lados a y b, tendremos:

$$\psi_n(M) = \psi_{p,q}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}}\operatorname{sen}\frac{\pi p}{a}x\operatorname{sen}\frac{\pi q}{b}y$$

$$(p, q = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\lambda_n = \lambda_{p,q} = \pi^2\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right),$$

$$\Pi_{n,m} = A_{m,p,q}\sqrt{\frac{2\varepsilon_m}{abl}}\operatorname{sen}\frac{\pi p}{a}x\operatorname{sen}\frac{\pi q}{b}y\cos\frac{\pi m}{2l}(l-z).$$

En este caso, a la menor frecuencia propia

$$\omega_{0,1,1} = c\sqrt{\lambda_{1,1}} = c\pi\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

le corresponde la máxima longitud de onda admisible

$$\Lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}}.$$

En particular, para $b=a$, la mayor longitud de onda

$$\Lambda_0 = a\sqrt{2}$$

es igual a la diagonal del cuadrado que se obtiene en el corte transversal. Por consiguiente, en este endovibrador son posibles sólo oscilaciones propias de frecuencia

$$\omega > \omega_{0,\,1,\,1}.$$

o de longitud de onda

$$\Lambda \leqslant \Lambda_0.$$

En forma totalmente análoga se hallan las oscilaciones propias de tipo magnético ($E_z = 0$). En este caso, hacemos

$$E = ik \operatorname{rot} \hat{\Pi},$$

$$H = \operatorname{grad} \operatorname{div} \hat{\Pi} + k^2\hat{\Pi},$$

donde

$$\hat{\Pi} = \hat{\Pi} i_z.$$

Para determinar $\hat{\Pi}(M, z)$, se obtiene la ecuación (6) con las condiciones de frontera

$$\left.\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \nu}\right|_{\Sigma} = 0, \qquad (7')$$

$$\hat{\Pi}\,|_{z=\pm l} = 0, \qquad (8')$$

resolviendo la cual se halla:

$$\hat{\Pi}_{n,\,m} = \hat{A}_{n,\,m}\hat{\psi}_m(M)\operatorname{sen}\frac{\pi m}{l}(l-z). \qquad (15)$$

En este caso, por $\hat{\psi}_n(M)$ deben entenderse las funciones propias de la membrana S con la condición de frontera $\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial\nu} = 0$ en C.

2. Energía electromagnética de las oscilaciones propias. Calculemos la energía de los campos eléctrico y magnético en la onda estacionaria de un endovibrador cilíndrico.

Para simplificar, nos limitaremos al caso de una onda de tipo eléctrico. Teniendo en cuenta, en las fórmulas (4), la dependencia

de E y H del tiempo según la ley $e^{-i\omega t}$ y tomando sólo la parte real, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z\, \partial x}\cos \omega t,\\ E_y &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z\, \partial y}\cos \omega t,\\ E_z &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi\right)\cos \omega t, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} H_x &= -k\frac{\partial \Pi}{\partial y}\,\text{sen}\, \omega t,\\ H_y &= k\frac{\partial \Pi}{\partial x}\,\text{sen}\, \omega t,\\ H_z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Para el cálculo de la energía de los campos eléctrico y magnético utilicemos las conocidas fórmulas

$$\mathscr{E}_{\text{el}}(t) = \frac{c}{8\pi}\iiint_T E^2\, d\tau, \tag{18}$$

$$\mathscr{E}_{\text{m}}(t) = \frac{c}{8\pi}\iiint_T H^2\, d\tau, \tag{19}$$

donde la integración se efectúa en el volumen T del endovibrador.

Sustituyendo en la fórmula (18) las expresiones (16) y aplicando la fórmula (14'), tendremos[1]:

$$\mathscr{E}_{\text{el}}(t) = \frac{A^2 c}{8\pi}\cos^2 \omega t \left\{ \iint_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\right] d\sigma \int_{-l}^{l} [f'(z)]^2\, dz + \right.$$

$$\left. + \iint_S \psi^2\, d\sigma \int_{-l}^{l} (f'' + k^2 f)^2\, dz \right\}.$$

Efectuando cálculos sencillos, se obtiene:

$$\int_{-l}^{l} [f'(z)]^2\, dz = ff' \big|_{-l}^{l} - \int_{-l}^{l} ff''\, dz = (k^2 - \lambda)\int_{-l}^{l} f^2\, dz = k^2 - \lambda, \tag{19'}$$

$$\int_{-l}^{l} (f'' + k^2 f)^2\, dz = \lambda^2 \int_{-l}^{l} f^2\, dz = \lambda^2, \tag{20}$$

[1] Los subíndices m, n se omiten por ahora.

puesto que, en virtud de que las funciones f están normalizadas, es

$$\int_{-l}^{l} f^2\, dz = 1. \qquad (21)$$

Para el cálculo de las integrales sobre S, apliquemos la primera fórmula de Green, la ecuación para las funciones ψ_n, las condiciones de frontera y la de normalización:

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \iint_S (\nabla_2\psi)^2\, d\sigma =$$

$$= -\iint_S \psi\,\Delta_2\psi\, d\sigma + \int_C \psi \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\, ds = \lambda \iint_S \psi^2\, d\sigma = \lambda, \qquad (22)$$

donde ∇_2 es el operador «nabla» en el plano S, y Δ_2, el operador bidimensional de Laplace. Como resultado, se obtiene la expresión para la energía del campo eléctrico:

$$\mathscr{E}_{\text{el}}(t) = \frac{A^2 c}{8\pi} k^2 \lambda \cos^2 \omega t. \qquad (23)$$

Para la energía del campo magnético se tiene, en virtud de las fórmulas (17), (19) y (14'):

$$\mathscr{E}_{\text{m}}(t) = \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \iint_S \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy \int_{-l}^{l} f^2\, dz\, \operatorname{sen}^2 \omega t,$$

de donde, teniendo en cuenta las igualdades (21) y (22), se halla:

$$\mathscr{E}_{\text{m}}(t) = \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda \operatorname{sen}^2 \omega t. \qquad (24)$$

La energía total del campo electromagnético, evidentemente, no varía con el tiempo:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\text{el}}(t) + \mathscr{E}_{\text{m}}(t) = \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda. \qquad (25)$$

De las fórmulas (23) y (24) se observa que en la onda estacionaria tiene lugar una transformación mutua de energía eléctrica en magnética y recíprocamente, y la energía media del campo eléctrico en un período

$$\overline{\mathscr{E}}_{\text{el}} = \frac{1}{2} \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda = \frac{1}{2} \mathscr{E} \qquad (26)$$

es igual a la energía media del campo magnético

$$\overline{\mathscr{E}}_m = \frac{1}{2} \frac{A^2 c k^2}{8\pi} \lambda = \frac{1}{2} \mathscr{E}. \qquad (27)$$

3. Excitación de las oscilaciones en un endovibrador. Para exitar los campos en un endovibrador por una fuente exterior, hay que introducir a través de una ranura en su capa un elemento de comunicación. Este elemento puede ser una espira, o una barra, que actúa como antena pequeña. Para que el elemento de comunicación no perturbe el campo del endovibrador, es necesario que sus dimensiones sean mucho menores que la longitud de onda. También son posibles otros medios de excitación del endovibrador, por ejemplo, por un haz de electrones que atraviesan la cavidad de éste (a través de orificios en sus paredes).

La resolución del problema sobre la excitación de un endovibrador por una antena, situada en su interior o, en el caso límite, por un dipolo elemental, exige tomar en cuenta la conductibilidad finita de las paredes. En el caso contrario, es imposible el proceso permanente. La consideración de la conductibilidad finita de las paredes se puede efectuar mediante las *condiciones de Leontovich*.

Consideraremos aquí el problema sobre la excitación de un endovibrador esférico por un dipolo, el cual admite solución analítica sencilla[1]). Supongamos que en el centro de una esfera de radio r_0 se halla un dipolo, que oscila con frecuencia ω y amplitud 1 y está dirigido a lo largo del eje z. Se pide hallar el campo dentro de la esfera, teniendo en cuenta la conductibilidad finita de las paredes.

En este caso, los campos E y H se pueden expresar mediante la función U:

$$\left.\begin{aligned} E_r &= \frac{i}{\rho \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial U}{\partial\theta}\right), \\ E_\theta &= -\frac{i}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho \frac{\partial U}{\partial\theta}\right), \\ H_\varphi &= \frac{\partial U}{\partial\theta}. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Las demás componentes, E_φ, H_r, H_θ son iguales a cero.

Como el dipolo está dirigido por el eje z ($\theta = 0$), los campos, evidentemente, no deben depender del ángulo φ.

[1]) Véase S. M. Ritov, DAN URSS, t. 51, fasc. 2 (1946).

La función U satisface a la ecuación

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+U=0, \qquad (29)$$

donde $\rho=kr$, teniendo U una particularidad del tipo

$$\frac{ie^{ikr}}{r^2}=\frac{ik^2e^{i\rho}}{\rho^2} \qquad (30)$$

cuando $\rho\to 0$. En la superficie de la esfera ($\rho=\rho_0$), debe cumplirse la condición de Leontovich

$$E_0=aH_{\varphi}, \qquad (31)$$

donde

$$a=\mu kd\sqrt{\frac{i}{2}} \qquad \left(d=\frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}\right) \qquad (32)$$

es la profundidad efectiva de la capa epidérmica.

De las relaciones (31) y (28) se obtiene la condición de frontera para la función U:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho U)-i\rho_0 aU\right]_{\rho=\rho_0}=0,$$

o bien

$$\rho_0\frac{\partial U}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0}+(1-i\rho_0 a)\,U|_{\rho=\rho_0}=0. \qquad (33)$$

La solución de la ecuación (29), con la singularidad (30), es, evidentemente, la función

$$U=-k^2\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\left[H^{(1)}_{\frac{3}{2}}(\rho)+CJ_{\frac{3}{2}}(\rho)\right]P_1(\cos\theta),$$

donde $P_1(\cos\theta)$ es el polinomio de Legendre de primer orden, $H^{(1)}_{\frac{3}{2}}$, la función de Hankel de primera especie, $J_{\frac{3}{2}}$, la función de Bessel:

$$P_1(\cos\theta)=\cos\theta,$$

$$H^{(1)}_{\frac{3}{2}}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\,e^{i\rho}\left(\frac{1}{i\rho}-1\right),$$

$$J_{\frac{3}{2}}(\rho)=\sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\left(\frac{\operatorname{sen}\rho}{\rho}-\cos\rho\right).$$

La constante C se determina a partir de la condición de frontera (33):

$$C = -e^{i\rho_0} \frac{1 - \frac{1}{\rho_0^2} - \frac{i}{\rho_0} + a\left(\frac{1}{i\rho_0} - 1\right)}{i\left[\frac{\cos\rho_0}{\rho_0} + \left(\quad - \frac{1}{\rho_0^2}\right)\operatorname{sen}\rho_0 - ia\left(\frac{\operatorname{sen}\rho_0}{\rho_0} - \cos\rho_0\right)\right]}.$$

La solución obtenida se puede utilizar para la determinación de las magnitudes de las pérdidas en las paredes. La potencia que absorben las paredes,

$$Q = \frac{\mu\omega d}{16\pi} \int_0^\pi |H_\varphi|^2 \, 2\pi\rho_0^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta,$$

se calcula directamente, y es igual a

$$Q = \frac{\mu\omega k^4 d}{6} \frac{1}{|B - iaA|^2},$$

donde

$$A = \frac{\operatorname{sen}\rho_0}{\rho_0} - \cos\rho_0, \quad B = \frac{\cos\rho_0}{\rho_0} + \left(1 - \frac{1}{\rho_0^2}\right)\operatorname{sen}\rho_0.$$

Si el dipolo no se halla en el centro de la esfera, el cálculo de los campos se complica mucho; sin embargo, la solución se puede hallar en forma de series.

III. EFECTO EPIDERMICO

La corriente alterna, a diferencia de la constante, no se distribuye uniformemente por la sección del conductor, sino que tiene mayor densidad en su superficie. Este fenómeno es llamado *efecto epidérmico*[1]).

Consideremos, para simplificar, un cable cilíndrico homogéneo infinito (μ = const, σ = const), por el cual pasa corriente alterna. Supondremos que la corriente total $I = I_0 e^{i\omega t}$ que pasa por la sección del cable es conocida.

Despreciando las corrientes de desplazamiento en comparación con la de conducción[2]) y considerando que el proceso es perma-

[1]) Véase I. E. Tamm, *Fundamentos de la Teoría de la Electricidad*, ed. «Naúka», 1966.

[2]) Obsérvese que dentro de los conductores, en particular, de los metales, la densidad de las corrientes de desplazamiento es despreciablemente pequeña en comparación con la densidad de las corrientes de conducción: $j_d \ll j = \sigma E$.

nente, es decir, depende del tiempo según la ley $e^{i\omega t}$, se obtienen, después de simplificar sobre el factor $e^{i\omega t}$, las ecuaciones de Maxwell en la forma

$$\operatorname{rot} H = \frac{4\pi\sigma}{c} E, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} E = -ik\mu H, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} E = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div} H = 0, \tag{4}$$

donde $k = \frac{\omega}{c}$. Las ecuaciones (3) y (4) en nuestro caso, evidentemente, son consecuencias de las (1) y (2).

Introduzcamos un sistema de coordenadas cilíndricas (r, z, φ) de forma que el eje z coincida con el eje del cable. Entonces, en virtud de la simetría axial de la corriente, se puede considerar que todas las magnitudes dependen sólo de la variable r.

Como en nuestro caso el vector E está dirigido a lo largo del eje z, de las ecuaciones (1) y (2) tendremos:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rH_\varphi) = \frac{4\pi\sigma}{c} E_z, \tag{1'}$$

$$\frac{d}{dr} E_z = ik\mu H_\varphi. \tag{2'}$$

Excluyendo de aquí H_φ, se halla:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE_z}{dr}\right) = i\frac{4\pi\sigma\mu k}{c} E_z. \tag{5}$$

Introduzcamos la condición de frontera en la superficie del cable para $r = R$. Para esto, utilicemos el hecho de conocer la corriente total I_0 que pasa por el cilindro.

Escribamos la primera ecuación de Maxwell (1) en la forma integral:

$$\oint_C H_s\, ds = \frac{4\pi}{c} I_0,$$

En nuestro caso, la última condición es equivalente a la exigencia

$$\varepsilon\omega \ll \sigma.$$

En virtud de que para metales sólidos la conductibilidad es $\sigma \approx 10^{17}$ unid. abs., se pueden despreciar las corrientes de desplazamiento para todas las frecuencias que se utilizan en la técnica.

donde C es un contorno que abarca el cable, H_s, la componente tangencial del vector H en C. Si se toma la circunferencia $r = R$ como tal contorno, se obtiene:

$$\int_0^{2\pi} H_\varphi(R)\,d\varphi = \frac{4\pi}{cR} I_0,$$

o bien

$$H_\varphi(R) = \frac{2I_0}{cR}. \tag{6}$$

De aquí, aplicando la relación (2), se halla:

$$\left.\frac{dE_z}{dr}\right|_{r=R} = \frac{2ik\mu}{cR} I_0. \tag{7}$$

De este modo, debemos resolver la ecuación de Bessel

$$E_z''(r) + \frac{1}{r}E_z'(r) + (\alpha\sqrt{-i})^2 E_z(r) = 0 \tag{5'}$$

$$\left(\alpha^2 = \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}\right)$$

con la condición de frontera

$$E_z'(R) = \frac{2ik\mu}{cR} I_0 \tag{7'}$$

y la de acotación cuando $r = 0$:

$$|E_z(0)| < \infty. \tag{8}$$

La solución general de la ecuación (5′) tiene la forma

$$AJ_0(\alpha r\sqrt{-i}) + BN_0(\alpha r\sqrt{-i}), \tag{9}$$

donde J_0 y N_0 son las funciones de Bessel de primera y segunda especie (véase el Complemento II, I Parte). A y B, constantes que hay que determinar.

La función N_0 tiene una particularidad logarítmica para $r = 0$. Por esto, en virtud de la condición (8) será $B = 0$ y, por consiguiente,

$$E_z(r) = AJ_0(\alpha r\sqrt{-i}). \tag{10}$$

El coeficiente A se determina de la condición de frontera (7):

$$A = \frac{2\sqrt{-i}\,k\mu I_0}{\alpha cRJ_1(\alpha R\sqrt{-i})}. \tag{11}$$

De aquí, para la densidad de la corriente

$$j = \sigma E_z,$$

se obtiene:

$$j(r) = \frac{I_0 \alpha \sqrt{-i}}{2\pi R J_1 \left(\alpha R \sqrt{-i}\right)} J_0 \left(\alpha r \sqrt{-i}\right). \qquad (12)$$

En el segundo miembro de esta fórmula se hallan las funciones de Bessel del argumento complejo

$$x\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\, x.$$

Comúnmente se utilizan para estas funciones las notaciones siguientes:

$$J_0 \left(x\sqrt{-i}\right) = \operatorname{ber}_0 x + i \operatorname{bei}_0 x;$$

$$J_1 \left(x\sqrt{-i}\right) = \operatorname{ber}_1 x + i \operatorname{bei}_1 x.$$

No es difícil hallar las expresiones para las funciones reales ber x y bei x, utilizando el desarrollo de las funciones de Bessel en serie. Por ejemplo,

$$J_0 \left(x\sqrt{-i}\right) = J_0 \left(xi\sqrt{i}\right) =$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 (-1)\, i}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4 (-1)}{(2!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6 i}{(3!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \ldots =$$

$$= \left\{1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \ldots\right\} + i\left\{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \ldots\right\},$$

de donde se obtiene:

$$\operatorname{ber}_0 x = 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{(4!)^2} - \ldots; \qquad (13)$$

$$\operatorname{bei}_0 x = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \ldots \qquad (14)$$

No es difícil comprobar, de un modo semejante, que

$$\operatorname{ber}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1!2!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2!3!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3!4!} + \dots\right\}, \tag{15}$$

$$\operatorname{bei}_1 x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{x}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{1!2!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^5}{2!3!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^7}{3!4!} - \dots\right\}. \tag{16}$$

En las aplicaciones se encuentran también las derivadas

$$\operatorname{ber}_0' x, \qquad \operatorname{bei}_0' x,$$

siendo, además,

$$J_1\left(x\sqrt{-i}\right) = \sqrt{-i}\,(\operatorname{bei}_0' x - i \operatorname{ber}_0' x). \tag{17}$$

Utilizando las funciones introducidas, se puede escribir la expresión (12) para la corriente en la forma

$$j(r) = \frac{I_0 \alpha}{2\pi R}\,\frac{\operatorname{ber}_0 \alpha r + i \operatorname{bei}_0 \alpha r}{\operatorname{bei}_0' \alpha R - i \operatorname{ber}_0' \alpha R},$$

o bien

$$j(r) = \frac{I_0 \alpha}{2\pi R}\left\{\frac{(\operatorname{ber}_0 \alpha r \operatorname{bei}_0' \alpha R - \operatorname{bei}_0 \alpha r \operatorname{ber}_0' \alpha R)}{(\operatorname{bei}_0' \alpha R)^2 + (\operatorname{ber}_0' \alpha R)^2} + \right.$$

$$\left. + i\,\frac{(\operatorname{bei}_0 \alpha r \operatorname{bei}_0' \alpha R + \operatorname{ber}_0 \alpha r \operatorname{ber}_0' \alpha R)}{(\operatorname{bei}_0' \alpha R)^2 + (\operatorname{ber}_0' \alpha R)^2}\right\}. \tag{18}$$

Calculando la magnitud absoluta de esta expresión, se obtiene:

$$|j(r)| = \frac{I_0 \alpha}{2\pi R}\sqrt{\frac{(\operatorname{ber}_0 \alpha r)^2 + (\operatorname{bei}_0 \alpha r)^2}{(\operatorname{ber}_0' \alpha R)^2 + (\operatorname{bei}_0' \alpha R)^2}}. \tag{19}$$

La magnitud que caracteriza la distribución de la corriente por el corte es el cociente

$$\frac{|j(r)|}{|j(R)|} = \sqrt{\frac{(\operatorname{ber}_0 \alpha r)^2 + (\operatorname{bei}_0 \alpha r)^2}{(\operatorname{ber}_0' \alpha R)^2 + (\operatorname{bei}_0' \alpha R)^2}}. \tag{20}$$

Efectuemos el cálculo de la distribución de la corriente por el corte para dos frecuencias, $\omega_1 = 314$ (50 períodos por segundo), $\omega_2 = 314 \cdot 10^4$ ($5 \cdot 10^5$ períodos por segundo).

Todos los razonamientos hechos más arriba fueron efectuados en el sistema simétrico de Gauss. Por esto, al pasar al sistema CGSE hay que tener en cuenta que $\mu_{CGSE} = \mu_{Gauss} \frac{1}{c^2}$. Las magnitudes restantes que figuran en las fórmulas (12), (18), (19) y (20) coinciden en ambos sistemas (de Gauss y CGSE). Por esto, en el sistema CGSE será

$$\alpha^2 = 4\pi\mu\sigma\omega.$$

Para el cobre es $\sigma = 57 \cdot 10^{6}$ CGSE; por esto, $\alpha_1 = 0{,}4444$ (para ω_1), $\alpha_2 = 44{,}44$ (para ω_2). Calculemos el cociente de los módulos de las corrientes (20) para la frecuencia baja $\omega_1 = 314$ para dos valores de r: $r = 0$ y $r = 0{,}5R$. Aquí haremos R igual a la unidad.

Teniendo en cuenta[1]) que

$$\begin{aligned}
\mathrm{ber}_0\, 0 &= 1,\\
\mathrm{bei}_0\, 0 &= 0,\\
\mathrm{ber}_0\, 0{,}222 &= 1 - 0{,}000036 + \ldots = 0{,}999964,\\
\mathrm{bei}_0\, 0{,}222 &= 0{,}0123 - 0{,}000002 + \ldots = 0{,}012300,\\
\mathrm{ber}_0\, 0{,}444 &= 1 - 0{,}00061 + \ldots = 0{,}9939,\\
\mathrm{bei}_0\, 0{,}444 &= 0{,}493 - 0{,}0003 + \ldots = 0{,}4990,
\end{aligned}$$

se halla que

$$\left.\frac{j(0)}{j(R)}\right|_{R=1} = 0{,}9994, \quad \left.\frac{j(0{,}5R)}{j(R)}\right|_{R=1} = 0{,}9999,$$

es decir, a pequeñas frecuencias la corriente se distribuye por la sección en forma aproximadamente uniforme (no hay efecto epidérmico).

Consideremos ahora el segundo caso: $\omega_2 = 314 \cdot 10^{4}$. Como α es grande, para el cálculo resulta cómodo partir no del desarrollo de las funciones ber y bei en serie, sino de las fórmulas asintóticas

$$J_0\left(\alpha r\sqrt{-i}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha r}}\, e^{\frac{\alpha r}{\sqrt{2}} - i\left(\frac{\alpha r}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)},$$

$$J_0\left(\alpha R\sqrt{-i}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha R}}\, e^{\frac{\alpha R}{\sqrt{2}} - i\left(\frac{\alpha R}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)},$$

de donde se obtiene, dando los valores $r = 0{,}9R$; $R = 1$:

$$\left.\frac{j(0{,}9R)}{j(R)}\right|_{R=1} = \sqrt{2}\, e^{-\frac{44}{\sqrt{2}}0{,}1} \approx 0{,}28.$$

---

[1]) Véase también Janke—Emde—Lösch, *Tafeln Höherer Funktionen*, 6 a. ed., Stuttgart, 1960.

Este resultado muestra la gran rapidez de disminución de la densidad de la corriente a medida que aumenta la profundidad en el conductor, a grandes frecuencias. Obsérvese, por último, que el efecto epidérmico se utiliza ampliamente en la práctica para el templado de los metales.

IV. PROPAGACION DE LAS ONDAS DE RADIO SOBRE LA SUPERFICIE DE LA TIERRA

Los problemas relacionados con la propagación de las ondas de radio tanto en el espacio libre como en presencia de superficies de separación, tienen un enorme significado teórico y práctico. A estos problemas se han dedicado muchísimos trabajos de autores soviéticos y extranjeros.

Estudiaremos el problema sobre la influencia de la tierra en la propagación de ondas de radio, irradiadas por un dipolo vertical. Aquí consideraremos que la tierra es plana[1]).

Supongamos que sobre la superficie de la tierra, a una distancia h, en el punto P_0, se halla un dipolo que genera oscilaciones periódicas de frecuencia ω. Tomaremos el plano de la tierra como plano $z = 0$ y dirigiremos el eje z por el eje del dipolo (fig. 84). Supongamos que en la atmósfera ($z > 0$) es $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$, $\sigma_0 = 0$. Supongamos, además, que la tierra ($z < 0$) se caracteriza por la constante dieléctrica ε, la conductibilidad σ, y que la permeabilidad magnética μ se puede tomar igual a la unidad; consideraremos que ε y σ son constantes.

Nuestro problema consiste en hallar la intensidad del campo creado por el dipolo. El proceso de propagación de las ondas electromagnéticas se describe por las ecuaciones de Maxwell.

Como fue demostrado en el Apéndice II del cap. V, la resolución de las ecuaciones de Maxwell se puede reducir a la resolución de la ecuación ondulatoria para el potencial de polarización Π[2]):

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0, \tag{1}$$

donde

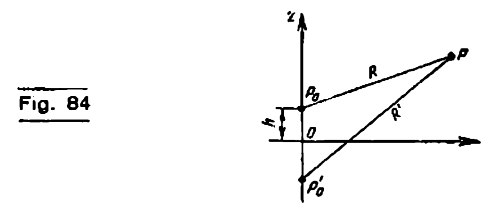
$$k^2 = \begin{cases} k_0^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}; & z > 0; \\ k_T^2 = \dfrac{\varepsilon\omega^2 + i\sigma\omega}{c^2}; & z < 0. \end{cases}$$

---

[1]) Este problema fue resuelto por primera vez por Sommerfeld en 1909. La solución original de Sommerfeld contenía un error, que fue corregido por V. A. Fok.

[2]) Como se estudia el proceso permanente, se puede omitir el factor de tiempo $e^{-i\omega t}$.

Fig. 84



El potencial Π está relacionado con la intensidad del campo por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} E &= k^2\Pi + \operatorname{grad}\operatorname{div}\Pi, \\ H &= -i\frac{k^2}{k_0}\operatorname{rot}\Pi. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

En nuestro caso, el vector Π está dirigido en forma paralela al dipolo que irradia:

$$\Pi = (0,\ 0,\ \Pi_z); \quad \Pi_z = \Pi_z(r,\ z) \qquad (3)$$

Haciendo

$$n^2 = \varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega},$$

se obtiene:

$$k_T^2 = n^2 k_0^2.$$

Las relaciones (2) y (3) nos dan:

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \Pi_0}{\partial z}; \quad H_\varphi = -ik_0^2\frac{\partial \Pi_0}{\partial r}; \quad E_\varphi = H_r = 0 \text{ para } z > 0, \quad (4)$$

$$E_r = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \Pi_T}{\partial z}; \quad H_\varphi = -\frac{ik_T^3}{k_0}\frac{\partial \Pi_T}{\partial r}; \quad E_\varphi = H_r = 0 \text{ para } z < 0. \quad (5)$$

Para obtener las condiciones de frontera para $z = 0$, utilicemos la condición de continuidad de las componentes tangenciales de las intensidades de los campos. Estas condiciones, como demuestran las fórmulas (4) y (5), se cumplirán si se hace:

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_T}{\partial z}; \qquad \Pi_0 = n^2\Pi_T \text{ para } z = 0. \qquad (6)$$

Buscaremos la solución de la ecuación (1) con las condiciones de frontera (6) en forma de la superposición de soluciones particulares de la forma

$$J_0(\lambda r)\, e^{\pm\mu z} \qquad (k^2 = \lambda^2 + \mu^2).$$

Para una región infinita, en lugar de un espectro discreto de valores propios λ, se obtiene un espectro continuo. Por esto, la solución Π se puede buscar en la forma

$$\Pi = \int_0^\infty F(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{\pm\mu z}\, d\lambda; \tag{7}$$

el signo de μ se debe escoger de modo que se asegure la convergencia de la integral (7). La función $F(\lambda)$, por ahora indeterminada, representa el factor de amplitud de cada oscilación.

Utilicemos la representación integral del potencial (véase el Complemento II, I Parte, § 5)

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu|z-h|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu}$$

$$\mu = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad R = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}). \tag{8}$$

Consideremos las dos regiones diferentes:

a) *Aire* ($z > 0$). El campo tendrá, en esta región, la forma

$$\Pi_0 = \Pi_{prim} + \Pi_{sec},$$

donde

$$\Pi_{prim} = \frac{e^{ikR}}{R} \tag{9}$$

es el potencial del campo de la excitación primaria, creada por el propio dipolo, y Π_{sec}, el potencial del campo de la excitación secundaria, creado por las corrientes que surgen en la tierra.

Utilizando las representaciones (7), (8) y (9), se puede escribir:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{prim} &= \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu|z-h|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu}, \\ \Pi_{sec} &= \int_0^\infty F(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{-\mu(z+h)}\, d\lambda, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

donde $F(\lambda)$ es una función por ahora indeterminada.

b) *Tierra* ($z < 0$). En esta región tiene lugar sólo la excitación secundaria, que podemos aquí escribir en la forma

$$\Pi_T = \int_0^\infty F_T(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, e^{\mu_T z - \mu h}\, d\lambda; \tag{11}$$

donde $\mu_T^2 = k_T^2 - \lambda^2$. Como $z < 0$, el signo del exponente asegura la convergencia de la integral.

Para determinar las funciones $F(\lambda)$ y $F_T(\lambda)$, utilicemos las condiciones de frontera (6), las que nos dan:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu h}\,[\lambda - \mu F(\lambda) - \mu_T F_T(\lambda)]\, d\lambda = 0,\\ &\int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu h}\,[\lambda + \mu F(\lambda) - n^2 \mu F_T(\lambda)]\, \frac{d\lambda}{\mu} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Las condiciones (12) se cumplirán si hacemos

$$\left.\begin{aligned} \mu F(\lambda) + \mu_T F_T(\lambda) &= \lambda,\\ \mu F(\lambda) - n^3 \mu F_t(\lambda) &= -\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Resolviendo las ecuaciones (13), se hallan $F(\lambda)$ y $F_T(\lambda)$ en la forma

$$\left.\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - \frac{2\mu_T}{n^2\mu + \mu_T}\right);\\ F_T(\lambda) &= \frac{2\lambda}{n^2\mu + \mu_T}. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Sustituyendo la expresión obtenida (14) en las fórmulas (10) y (11), se obtienen las siguientes expresiones para el potencial de polarización de un dipolo vertical:

$$\left.\begin{aligned} \Pi_0 &= \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu|z+h|}\,\frac{\lambda\, d\lambda}{\mu} + \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu|z+h|}\,\frac{\lambda\, d\lambda}{\mu} - \\ &\qquad - 2\int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu(z+h)}\,\frac{\mu_T}{n^2\mu + \mu_T}\,\frac{\lambda\, d\lambda}{\mu};\\ \Pi_T &= 2\int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{\mu_T z - \mu h}\,\frac{\lambda\, d\lambda}{n^2\mu + \mu_T}. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Designando mediante $R = \sqrt{r^2 + (z-h)^2}$ la distancia del punto de observación al dipolo, mediante $R' = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}$ la distancia del punto de observación a la imagen especular del dipolo en el plano $z = 0$ y aplicando la representación (8), la expresión para la función Π_0 se escribe en la forma

$$\Pi_0 = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'} - 2\int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu(z+h)}\,\frac{\mu_T}{n^3\mu + \mu_T}\,\frac{\lambda\, d\lambda}{\mu}. \qquad (15')$$

Consideremos ciertos casos límite.

1) *Tierra conductora ideal.* En este caso, $\sigma \to \infty$, y, en consecuencia, $|k_T|$ y $|n| \to \infty$. Entonces, las fórmulas (15) y (15′) dan:

$$\Pi_0 = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'}; \qquad \Pi_T = 0.$$

Es fácil obtener el mismo resultado directamente, resolviendo el problema por el método de las imágenes.

2) *Dipolo en un medio homogéneo.* En este caso es $k_0 = k_T$; $n = 1$; $\mu = \mu_T$. Las fórmulas (15) y (15′) dan:

$$\Pi_0 = \Pi_T = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\mu|z-h|} \frac{\lambda\, d\lambda}{\mu} = \frac{e^{ikR}}{R},$$

es decir, tiene lugar sólo la excitación primaria, como debe ser.

Las expresiones integrales obtenidas (15) son muy complejas para el análisis y la aplicación práctica. Los integrandos tienen puntos de ramificación y polos. Sommerfeld propuso un método de cálculo aproximado de estas integrales, mediante la deformación del contorno de integración[1]). Por este método, obtuvo la siguiente fórmula aproximada para el campo en las proximidades de la superficie de la tierra:

$$\Pi_0 = 2\frac{e^{ik_0 r}}{r}\left(1 + i\sqrt{\pi\rho}\, e^{-\rho} - 2\sqrt{\rho}\, e^{-\rho}\int_0^{\sqrt{\rho}} e^{\alpha^2}\, d\alpha\right), \qquad (16)$$

donde la magnitud ρ, llamada «distancia numérica», está relacionada con el polo p del integrando de (15) mediante la fórmula

$$\rho = i\,(k_0 - p)\, r.$$

La fórmula (16) coincide con las fórmulas obtenidas por otro camino completamente distinto por varios otros autores (Weyl, Van der Pol, Fok).

[1]) Véase F. Frank y R. Mises, *Ecuaciones Diferenciales e Integrales de la Física matemática*, t. II, 1937.

COMPLEMENTO I

METODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

§ 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Hemos estudiado los métodos analíticos de resolución de las ecuaciones en derivadas parciales. Sin embargo, la representación explícita de la solución en forma de serie o de integral no siempre es posible.

Tomemos, por ejemplo, la ecuación de la conducción del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right). \qquad (1)$$

El método de separación de las variables se aplica solamente al caso $k(x, t) = k_1(x) k_2(t)$. Sin embargo, con frecuencia se encuentran problemas en los que el coeficiente de conductividad térmica no se puede representar en esta forma, o aun depende de la temperatura (ecuación cuasilineal de la conducción del calor). La representación de las soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales en forma analítica es posible sólo en casos excepcionales.

El método universal de resolución aproximada de las ecuaciones diferenciales, que se aplica a una amplia clase de ecuaciones de la física matemática, es el de las diferencias finitas (o método de las mallas).

El método de las diferencias finitas consiste en lo siguiente. La región de variación continua de los argumentos (por ejemplo, x y t) se sustituye por un conjunto finito (discreto) de puntos (nudos), llamado malla; en lugar de las funciones de argumento continuo, se consideran las de argumento discreto, definidas en los nudos de la malla y llamadas funciones de malla. Las derivadas que figuran en la ecuación diferencial se sustituyen (se aproximan) mediante los cocientes respectivos de diferencias, es decir, combinaciones lineales de valores de la función de malla en varios nudos

de la red; entonces, la ecuación diferencial se sustituye por un sistema de ecuaciones algebraicas (ecuación en diferencias). Las condiciones iniciales y de frontera también se sustituyen por condiciones iniciales y de contorno en diferencias, para la función de malla.

Es natural exigir que el problema de contorno en diferencias obtenido de este modo sea resoluble y que su solución se aproxime (converja), al aumentar el número N de puntos de la malla, a la solución del problema original para la ecuación diferencial.

Más abajo se ilustran en ejemplos sencillos los conceptos de aproximación, convergencia, exactitud y estabilidad.

1. Mallas y funciones de malla. Consideremos los ejemplos más sencillos de mallas.

Supongamos que la región de variación del argumento x es el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$. Dividamos este segmento, mediante los puntos $x_i = ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, N;\ h > 0)$, en N partes iguales de longitud $h = \frac{l}{N}$ cada una. El conjunto de los puntos $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, se llama malla de diferencias en el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$ y se denota mediante $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N\}$ y el número h —la distancia entre los puntos (nudos) de la malla $\overline{\omega}_h$—se llama paso de ésta.

El segmento $[0, l]$ se puede dividir en N partes también introduciendo arbitrariamente los puntos $x_1 < x_2 < \ldots < x_{N-1} < l$. Así se obtiene la malla $\overline{\omega}_h = \{x_i,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ x_0 = 0,\ x_N = l\}$ con paso $h_i = x_i - x_{i-1}$, que depende del número i del nudo x_i. Si $h_i \neq h_{i-1}$ al menos para un número i, la malla $\overline{\omega}_h = \overline{\omega}_h^*$ se llama irregular. Si $h_i = \text{const} = h = \frac{l}{N}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, N$, se obtiene la malla uniforme (regular) construida más arriba.

En la recta infinita $-\infty < x < \infty$ se puede considerar la malla $\omega_{h,x} = \{x + ih,\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ con origen en cualquier punto x, formada por un número infinito de nudos.

La función $y_i = y(x_i)$ de argumento discreto x_i, $i = 0, 1, \ldots, N$, se llama función de malla, definida en la red $\overline{\omega}_h$.

A cualquier función continua $f(x)$ se le puede poner en correspondencia la función de malla f_i^h, haciendo, por ejemplo, $f_i^h = f(x_i)$. Sin embargo, en ciertos casos resulta más cómodo establecer esta correspondencia por otros medios.

Supongamos que la región de variación de los argumentos (x, t) es el rectángulo $\overline{D} = (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$. Construyamos en el segmento, $0 \leqslant x \leqslant 1$ la malla $\overline{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i =

$= 0, 1, \ldots, N\}$ con paso $h = \frac{1}{N}$ y la malla $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,$ $j = 0, 1, \ldots, N_0\}$, con paso $\tau = \frac{T}{N_0}$, en el segmento $0 \leqslant t \leqslant \leqslant T$. El conjunto de nudos (x_i, t_j) de coordenadas $x_i = ih$ y $t_j = j\tau$ será llamado malla en el rectángulo $\bar{D}$, y denotado por $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i = ih, t_j = j\tau), i = 0, 1, \ldots, N, j = 0, 1, \ldots, N_0\}$. Esta malla es uniforme con respecto a cada variable x y t. Si por lo menos una de las mallas $\bar{\omega}_h$ u $\bar{\omega}_\tau$ es irregular, la red $\bar{\omega}_{h\tau}$ se llama irregular. La malla $\bar{\omega}_{h\tau}$, evidentemente, está formada por los puntos de intersección de las rectas $x = x_i$, $i = 0, 1, \ldots, N$ con las $t = t_j$, $j = 0, 1, \ldots, N_0$.

Sea y una función de malla dada en $\bar{\omega}_{h\tau}$. Denotaremos por $y_i^j = y(x_i, t_j)$ el valor de esta función en el nudo (x_i, t_j) de la malla $\omega_{h\tau}$. Pondremos en correspondencia a la función continua $u(x, t)$, donde (x, t) es un punto de $\bar{D}$, la función de malla $u_i^j = = u_{i,h,\tau}^j = u(x_i, t_j)$.

También son posibles otros medios de realizar esta correspondencia, en los cuales no nos detendremos aquí.

2. Aproximación de los operadores diferenciales más simples. El operador L_h, que transforma la función de malla y en la función de malla $Y = L_h y$, es llamado operador de malla, o de diferencias. El operador diferencial L, dado en la clase de funciones de argumento continuo, puede ser sustituido aproximadamente (ser aproximado) por el operador de diferencias L_h, dado en las funciones de malla. Para esto, cada derivada se sustituye por un cociente de diferencias (de aquí el nombre de «operador de diferencias»), que contiene los valores de la función de malla en varios puntos de la red. Analicemos cómo se efectúa esto para las derivadas primera y segunda de la función de una variable.

Sea $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih\}$ una malla con paso h en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$. Tomemos la derivada primera $Lv = v'$ de la función $v(x)$. Podemos sustituirla por una expresión de diferencias de una infinidad de maneras. Las más simples son los cambios

$$Lv \sim \frac{v_i - v_{i-1}}{h} = L_h^- v_i$$

—derivada izquierda en diferencias, o cociente izquierdo de diferencias—,

$$Lv \sim \frac{v_{i+1} - v_i}{h} = L_h^+ v_i$$

—derivada derecha en diferencias—, o bien $L_h^\circ v_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}$ (derivada central en diferencias).

Aquí $v_i = v(x_i)$, el signo $\sim$ indica correspondencia, o aproximación. Al sustituir $Lv = v'$ por la expresión en diferencias $L_h^{\pm} v_i$, se obtiene un error $L_h^{\pm} v_i - (Lv)_i = \psi_i^h$, llamado error de aproximación del operador L por el operador de diferencias L_h. Es natural exigir que, al tender h a cero, este error tienda a cero. Para acotar ψ_i^h, hay que suponer que $v(x)$ es una función suave. Diremos que $v(x)$ pertenece a la clase (al espacio) $C^{(m)}[0, 1]$ ($v(x) \in C^{(m)}[0, 1]$) de funciones dadas en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$, si $v(x)$ tiene m derivadas continuas en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$. Para $m = 0$, se obtiene la clase $C^{(0)}[0, 1]$ de funciones continuas para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Supongamos que $v(x) \in C^{(m)}[0, 1]$, donde $m \geqslant 2$. Desarrollemos $v(x)$ en un entorno del punto $x = x_i$:

$$v_{i\pm 1} = v_i \pm h v_i' + O(h^2)$$

y calculemos $\psi_i^h = L_h^- v_i - v_i' = O(h)$, $\psi_i^h = L_h^+ v_i - v_i' = O(h)$.

Diremos que el operador de diferencias L_h: 1) aproxima al operador diferencial L en la malla $\bar{\omega}_h$, si $\max\limits_{\bar{\omega}_h} |\psi_i^h| = \max\limits_{\bar{\omega}_h} |L_h v_i - (Lv)_i|$, donde $v(x)$ es una función suficientemente suave, tiende a cero cuando $h \to 0$; 2) aproxima a L con orden n ($n > 0$), si $\max\limits_{\bar{\omega}_h} |\psi_i^h| = O(h^n)$ (o bien $\max\limits_{\bar{\omega}_h} |\psi_i^h| \leqslant Mh^n$, donde M es una constante positiva, que no depende de h).

Al analizar las fórmulas para $L_h^{\pm}$, se aprecia que $L_h^- v_i$ y $L_h^+ v_i$ aproximan a $Lv = v'$ con el primer orden para $v \in C^{(m)}$, donde $m \geqslant 2$. El aumento de m no cambia el orden de la aproximación

La expresión para $L_h^- v_i$ contiene los valores de v en dos puntos, $x = x_i$ y $x = x_{i-1}$ de la malla. Se dice que L_h^- es un operador bipuntual, o de primer orden.

El conjunto de nudos para los cuales los valores de la función figuran en la expresión $L_h v_i$, se llama modelo del operador L_h en el punto x_i. Es evidente que el modelo del operador L_h^- está formado por los dos nudos x_i y x_{i-1} y el de L_h^+, por los nudos x_i y x_{i+1}.

Tomemos, por ejemplo, el operador de tres puntos, definido en el modelo x_{i-1}, x_i, x_{i+1}:

$$L_h^{(\sigma)} v_i = \sigma L_h^+ v_i + (1 - \sigma) L_h^- v_i = \frac{\sigma v_{i+1} + (1 - 2\sigma) v_i + \sigma v_{i-1}}{h}, \quad (2)$$

donde σ es un número arbitrario. En particular, para $\sigma = \frac{1}{2}$ se obtiene la derivada central en diferencias $L_h^0 v_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}$, la cual aproxima a $v'(x)$ con segundo orden, como se demuestra fácilmente, para $v(x) \in C^{(3)}[0, 1]$.

En lo sucesivo, utilizaremos las notaciones

$$v_{\bar{x}, i} = \frac{v_i - v_{i-1}}{h}, \qquad v_{x, i} = \frac{v_{i+1} - v_i}{h},$$

$$v_{\overset{\circ}{x}, i} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} = \frac{1}{2}(v_{\bar{x}, i} + v_{x, i}). \tag{3}$$

En los casos en que el número i del nudo no tiene importancia, lo omitiremos y escribiremos $v_{\bar{x}}$, v_x, $v_{\overset{\circ}{x}}$.

Consideremos ahora la derivada segunda $Lv = v''$. En el modelo de dos puntos, evidentemente, no se la puede aproximar. Escojamos un modelo de tres puntos, formado por los nudos x_{i-1}, x_i, x_{i+1} y tomemos el operador de diferencias

$$L_h v_i = v_{\bar{x}x, i} = \frac{1}{h}(v_{x, i} - v_{\bar{x}, i}) = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} \tag{4}$$

Si $v \in C^{(m)}[0, 1]$, $m \geqslant 4$, se puede escribir

$$v_{i\pm1} = v_i \pm hv_i' + \frac{h^2}{2} v_i'' \pm \frac{h^3}{6} v_i''' + \frac{h^4}{24} v_i^{(IV)} + o(h^4). \tag{5}$$

($o(h^n)$ es una magnitud que tiende a cero, cuando $h \to 0$, más rápidamente que h^n). De aquí se deduce (el índice i se omite) que

$$v_{\bar{x}x} - v'' = \frac{h^2}{12} v^{(IV)} + o(h^2), \tag{6}$$

es decir, $v_{\bar{x}x}$ aproxima a v'' con segundo orden.

Para la aproximación de la derivada cuarta $Lv = v^{(IV)}$, tomemos un modelo de cinco puntos, formado por los nudos $x_i + kh$ $(k = 0, \pm1, \pm2)$ y hagamos

$$L_h v_i = v_{\bar{x}x\bar{x}x, i} = \frac{v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2}}{h^4}. \tag{7}$$

En este caso, será $v_{\bar{x}x\bar{x}x} - v^{(IV)} = O(h^2)$ para $v(x) \in C^{(6)}$. En el modelo de cinco puntos $(x_i + kh)$, $k = 0, \pm1, \pm2$, se puede obte-

ner una aproximación de $O(h^4)$ para v'', si $v \in C^{(6)}$. En efecto, de (6) y (7) se deduce que el operador

$$L_h v = v_{\bar{x}x} - \frac{h^2}{12} v_{\bar{x}x\bar{x}x} = v'' + O(h^4) \tag{8}$$

posee cuarto orden de aproximación.

En la práctica, la aproximación de las derivadas en modelos de muchos puntos se utiliza raramente, puesto que al aumentar el modelo comúnmente aumenta el volumen del trabajo de cálculo y se empeoran las cualidades de los operadores de diferencias obtenidos (en el sentido de la estabilidad).

Hagamos notar, una vez más, que el orden de aproximación del operador de diferencias L_h depende del orden m de derivabilidad de la función $v(x)$. En todas partes nos referíamos, de hecho, al orden máximo de aproximación, que no cambia al aumentar el número m de la clase $C^{(m)}$, considerando que $v(x)$ era una función arbitraria de $C^{(m)}$. Es evidente que si $v(x)$ se escoge de modo especial, el orden de aproximación puede aumentar. Si, por ejemplo, $v(x) = u(x)$ es la solución de la ecuación $u'' = x$, entonces $u^{(IV)} = 0$ y $u_{\bar{x}x} = u''$, es decir, $v_{\bar{x}x}$ aproxima exactamente a v'' para $v = u$.

Consideremos el operador más complejo

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{9}$$

donde $u = u(x, t)$ es una función de dos argumentos, x y t, que varían en la región $\bar{D} = (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$. Introduzcamos la malla

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i = ih,\ t_j = j\tau),\ i = 0, 1, \ldots, N,\ j = 0, 1, \ldots, N_0\}$$

con pasos $h = \frac{1}{N}$ y $\tau = \frac{T}{N_0}$, construida en el p. 1.

Efectuemos el cambio

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{j+1} \sim \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = u_{\bar{t}}^{j+1},$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^j \sim \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} = u_{\bar{x}x, i}^j.$$

Como resultado, se obtiene el operador de diferencias

$$L_{h\tau} u_i^{j+1} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}, \tag{10}$$

$\sigma=1$ $\sigma=0$

$(i-1,j+1)$ $(i,j+1)$ $(i+1,j+1)$ $(i-1,j+1)$ $(i,j+1)$ $(i+1,j+1)$ $(i,j+1)$

τ h

$(i-1,j)$ (i,j) $(i+1,j)$ (i,j) $(i-1,j)$ (i,j) $(i+1,j)$

a) b) c)

Fig. 85

que se puede escribir en la forma $L_{h\tau}u = u_{\bar{t}} - \check{u}_{\bar{x}x}$, donde $\check{u} = u_i^j$, $u = u_i^{j+1}$. Este operador está definido en el modelo formado por los cuatro puntos (x_i, t_{j+1}), (x_i, t_j), (x_{i-1}, t_j), (x_{i+1}, t_j) (fig. 85, c). El operador $L_{h\tau}$ no está determinado en todos los nudos de $\bar{\omega}_{h\tau}$, sino sólo para $0 < i < N$ y $j > 0$, es decir, en los nudos en los que el modelo está formado sólo por puntos de la red $\bar{\omega}_{h\tau}$. Los nudos (x_i, t_j), $0 < i < N$, $j > 0$, se llamarán interiores, y se denotarán por $\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j),\ 0 < i < N,\ 0 < j \leqslant N_0\}$ el conjunto de éstos. De este modo, el operador $L_{h\tau}$ está definido en $\omega_{h\tau}$, es decir, en los nudos interiores. En los demás, llamados de frontera, deben darse las condiciones iniciales y de frontera. El operador $L_{h\tau}$ tiene primer orden de aproximación con respecto a τ y segundo con respecto a h:

$$\max_{\omega_{h\tau}} | L_{h\tau}u_i^j - (Lu)_i^j | = O(h^2 + \tau), \qquad (11)$$

puesto que $u_{\bar{x}x} = u'' + O(h^2)$, $u_{\bar{t}} = \dot{u} + O(\tau)$ $\left(\dot{u} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^j\right)$.

Aquí el tilde indica la derivación con respecto a x, y el punto, con respecto a t. Consideremos el operador

$$L_{h\tau}u_i^{j+1} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2},$$

$$\text{o bien } L_{h\tau}u = u_{\bar{t}} - u_{\bar{x}x}, \qquad (12)$$

definido en el modelo de cuatro puntos (x_{i-1}, t_{j+1}), (x_i, t_{j+1}), (x_{i+1}, t_{j+1}), (x_i, t_j) (fig. 85, b). Este aproxima a Lu con el mismo orden que el operador (10).

En el § 2 se considera una familia monoparamétrica de operadores de diferencias que aproximan al (9). Esta familia contiene a los operadores (10) y (12).

Hasta ahora hemos acotado la magnitud del error de aproximación $\psi = L_hv - Lv$ para el operador L_h (o $L_{h\tau}$) como el $\max\limits_{\omega_h} |\psi|$,

es decir, por la norma[1]), («en la norma»)

$$\|\psi\|_0 = \max_{x\in\omega_h} |\psi(x)|. \qquad (13)$$

Para acotar la magnitud de la función de malla ψ, se pueden utilizar también otras normas, por ejemplo:

$$\|\psi\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{N-1} h\psi_i^2\Big)^{1/2}, \qquad \|\psi\|_1 = \sum_{i=1}^{N-1} h\,|\psi_i|, \text{ etc.} \qquad (14)$$

Sea $\|\psi\|$ cierta norma para las funciones ψ, dadas en la malla ω_h. En lo sucesivo diremos que el operador de diferencias L_h: 1) aproxima al operador diferencial L en la norma $\|\cdot\|$, si $\|\psi\| = \|L_hv - Lv\| \to 0$ cuando $h \to 0$; 2) aproxima a L con orden n ($n > 0$) (L_h tiene orden n-ésimo de aproximación), si $\|\psi\| = O(h^n)$, o bien $\|\psi\| \leqslant Mh^n$, donde M = const > 0 no depende de h.

Si v es una función suficientemente suave y $\bar\omega_h$, una malla uniforme, todos los operadores de diferencias considerados más arriba tienen el mismo orden de aproximación en cualquiera de las normas (13), (14).

En el caso de una malla irregular, el cuadro cambia.

Sea $\bar\omega_h = \{x_i,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ x_0 = 0,\ x_N = 1\}$ una malla irregular con pasos $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, N$ en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$. Consideremos el operador $Lv = v''$. Le pondremos en correspondencia el operador de diferencias

$$L_hv_i = \frac{1}{\hbar_i}\left[\frac{v_{i+1}-v_i}{h_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}\right], \qquad (15)$$

donde $\hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})$, definido en el modelo de tres puntos $(x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1})$.

Calculemos el error de aproximación $\psi_i = L_hv_i - Lv_i$. Suponiendo que $v(x) \in C^{(4)}[0, 1]$ y utilizando los desarrollos

$$v_{i+1} = v_i + h_{i+1}v_i' + \frac{h_{i+1}^2}{2}v_i'' + \frac{1}{6}h_{i+1}^3v_i''' + O(h_{i+1}^4),$$

$$v_{i-1} = v_i - h_iv_i' + \frac{1}{2}h_i^2v_i'' - \frac{1}{6}h_i^3v_i''' + O(h_i^4),$$

[1]) A cada función de malla y se le pone en correspondencia cierto número no negativo $\|y\|$, llamado norma, y que representa el análogo de la distancia desde el origen de coordenadas en la geometría habitual. La norma satisface a las condiciones: 1) $\|y\| = 0$ solamente para $y(x) \equiv 0$; 2) $\|cy\| = |c|\,\|y\|$, c = const; 3) $\|y + z\| \leqslant \|y\| + \|z\|$ (desigualdad triangular) véase L. V. Kantorovich y G. P. Akilov, *Análisis Funcional en los Espacios Normados*, ed. Fizmatguiz, 1959).

se halla que

$$\psi_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} v_i''' + O(h_i^2 + h_{i+1}^2).$$

De aquí se ve que $\|\psi\|_s = O(h_0)$, $h_0 = \max h_i$, si $\|\cdot\|_s$, para $s = 0, 1, 2$ es cualquiera de las normas (13), (14). De aquí se deduce que L_h tiene primer orden de aproximación en las normas $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$.

Mostremos que si la norma se escoge adecuadamente, a saber:

$$\|\psi\|_3 = [\sum_{i=1}^{N-1} h_i (\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \psi_k)^2]^{1/2},$$

el operador (15) tendrá en esta norma segundo orden de aproximación:

$$\|\psi\|_3 = \|L_h v - Lv\|_3 = O(h_0^2).$$

Como $v_i''' = v_{i+1}''' + O(h_{i+1})$, entonces $(h_{i+1} - h_i) v_i''' = \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{h_i + h_{i+1}} v_i''' = \frac{1}{2\hbar_i}(h_{i+1}^2 v_{i+1}''' - h_i^2 v_i''') + O(h_{i+1}^2)$ y, por esto, ψ_i se representa en la forma

$$\psi_i = \mathring{\psi}_i + \psi_i^*, \qquad \psi_i^* = O(h_i^2 + h_{i+1}^2),$$

$$\mathring{\psi}_i = \frac{1}{\hbar_i}(\eta_{i+1} - \eta_i), \quad \eta_i = \frac{1}{6} h_i^2 u_i''' = O(h_i^2).$$

Calculando $\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \mathring{\psi}_k = \sum_{k=1}^{i} (\eta_{k+1} - \eta_k) = \eta_{i+1} - \eta_1$ y teniendo en cuenta que $|\eta| = O(h_0^2)$, se obtiene que $\|\mathring{\psi}\|_3 = O(h_0^2)$ y, por consiguiente,

$$\|\psi\|_3 \leqslant \|\mathring{\psi}\|_3 + \|\psi^*\|_3 \leqslant M h_0^2,$$

donde $M = \text{const} > 0$ no depende de la malla, es decir, (15) tiene segundo orden de aproximación en la norma $\|\cdot\|_3$ en cualquier malla irregular $\bar{\omega}_h$. Este resultado se mantiene válido también para las normas

$$\|\psi\|_3 = [\sum_{i=1}^{N-1} h_i (\sum_{k=i}^{N-1} \hbar_k \psi_k)^2]^{1/2}, \quad \|\psi\|_{3*} = \sum_{i=1}^{N-1} h_i |\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \psi_k|.$$

Obsérvese que $\|\psi\|_3 \leqslant \|\psi\|_s$, $s = 0, 1, 2$.

En lo sucesivo, utilizaremos las notaciones

$$v_{\bar{x},i}=\frac{v_i-v_{i-1}}{h_i},\quad v_{x,i}=\frac{v_{i+1}-v_i}{h_{i+1}},\quad v_{\hat{x},i}=\frac{v_{i+1}-v_i}{\hbar_i},$$

$$v_{\bar{x}\hat{x},i}=\frac{1}{\hbar_i}(v_{x,i}-v_{\bar{x},i})=\frac{1}{\hbar_i}\left[\frac{v_{i+1}-v_i}{h_{i+1}}-\frac{v_i-v_{i-1}}{h_i}\right]. \quad (16)$$

Si la malla ω_h es irregular, al aproximar el operador (9) se utiliza el (15), de forma que, en lugar de (10) y (12), tendremos los operadores de diferencias $L_{h\tau}u = u_{\bar{t}} - \check{u}_{\bar{x}\hat{x}}$, $L_{h\tau}u = u_{\bar{t}} - u_{\bar{x}\hat{x}}$. En este caso, en lugar de (11) se obtiene la apreciación

$$\max_{\omega_\tau} \| L_{h\tau}u - Lu \|_3 = O(h_0^2 + \tau), \quad (17)$$

donde el máximo se toma con respecto a $j = 1, 2, \ldots, N_0$.

La malla $\bar{\omega}_\tau$ también puede ser irregular, con paso $\tau_j = t_j - t_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, N_0$. Aquí es $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1} \sim \frac{u^{j+1}-u^j}{\tau_{j+1}} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1} + O(\tau_{j+1})$; entonces en (17) será $\tau = \max\limits_{1\le j\le N_0} \tau_j$.

3. Problema de diferencias. Hasta ahora hemos estudiado la aproximación de los operadores diferenciales más simples por operadores de diferencias. Comúnmente hay que resolver la ecuación diferencial $Lu = -f$ con ciertas condiciones complementarias (iniciales, de frontera). Por esto, además de escribir el operador de diferencias hay que aproximar, en la malla, el segundo miembro y las condiciones complementarias, luego de lo cual se debe plantear el problema de diferencias, es decir, escribir las ecuaciones en diferencias (algebraicas) y las condiciones complementarias en la malla.

La ley de escritura de las ecuaciones en diferencias y las condiciones complementarias es llamada esquema de diferencias.

Consideremos algunos ejemplos de planteamiento del problema de diferencias.

Ejemplo 1. Al problema de Cauchy para la ecuación de primer orden

$$u'(x) = f(x), \quad x > 0, \quad u(0) = u_0, \quad (18)$$

le corresponde, en la malla uniforme, el problema de contorno de diferencias

$$y_{i+1} - y_i = h\varphi_i, \quad y_0 = u_0 \quad (\varphi_i = f_i^{(h)} = f(x_i)),$$

que se obtiene al sustituir el operador u' por el operador de diferencias

$$L_h u = u_{\bar{x}}.$$

Ejemplo 2. Al problema de contorno para la ecuación de segundo orden

$$u'' = -f(x), \qquad 0 < x < 1, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2, \quad (19)$$

le corresponde, en la malla uniforme, el problema de contorno
$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = -h^2\varphi_i$, $y_0 = \mu_1$, $y_N = \mu_2$ $(\varphi_i = f(x_i))$,
que se obtiene al sustituir el operador u'' por el operador de diferencias $u_{\bar{x}x}$.

Ejemplo 3. Al problema de contorno para la ecuación de la conducción del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \qquad 0 < x < 1, \ 0 < t < T, \qquad (20)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad (21)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T \qquad (22)$$

en la malla uniforme $\bar{\omega}_{h\tau} = \{x_i = ih,\ t_j = j\tau\ (i = 0, 1, \ldots, N,\ j = 0, 1, \ldots, N_0)\}$ le corresponde el problema de contorno de diferencias

$$y_i^{j+1} - y_i^j = \gamma(y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^{j+1}, \qquad 0 < i < N, \qquad j > 0$$

$$\left(\gamma = \frac{\tau}{h^2}, \ \varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_j)\right), \quad y_i^0 = u_0(x_i), \qquad (23)$$

$$y_0^j = \mu_1(t_j), \quad y_N^j = \mu_2(t_j), \qquad (24)$$

que se obtiene al sustituir el operador de la conducción del calor por el operador de diferencias (10). Determinemos y_i^{j+1}:

$$y_i^{j+1} = (1 - 2\gamma)\, y_i^j + \gamma(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^{j+1}, \qquad (25)$$

donde $\gamma = \dfrac{\tau}{h^2}$.

Si se conoce y_i^j, por esta fórmula se puede determinar y_i^{j+1} en todos los nudos $i = 1, 2, \ldots, N - 1$ (en la capa $j + 1$). Como para $j = 0$ se da la condición inicial $y_i^0 = u(x_i)$, la fórmula (25) permite calcular y_i^{j+1}, de una capa a otra, en todos los nudos de la malla $\omega_{h\tau}$, utilizando las condiciones de frontera (24). El esquema (23) se denomina explícito.

Supongamos que $L_{h\tau}$ se determina por la fórmula (12). Entonces, la ecuación adquiere la forma

$$y_{\bar{t}} = y_{\bar{x}x} + \varphi, \text{ o bien } \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \varphi_i^{j+1}. \quad (26)$$

Para determinar y_i^{j+1} en la nueva capa $j+1$, se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\gamma y_{i-1}^{j+1} - (1 + 2\gamma) y_i^{j+1} + \gamma y_{i+1}^{j+1} = -y_i^j - \tau\varphi_i^{j+1}, \quad 0 < i < N. \quad (27)$$

Este esquema se llama implícito, o esquema con adelanto.

4. Estabilidad. Después de escribir el esquema de diferencias, es decir, de formular la ecuación en diferencias y todas las condiciones complementarias, surge, ante todo, el problema sobre la resolución del sistema de ecuaciones algebraicas obtenido. Si este sistema es irresoluble, tal esquema debe considerarse inservible.

Supongamos que el problema de diferencias es resoluble. Entonces, es natural exigir que para un empequeñecimiento ilimitado de la malla la solución del problema de diferencias tienda a la solución del problema inicial para la ecuación diferencial (que el esquema converja). En estos razonamientos, se supone que el problema de diferencias se resuelve en forma exacta y que la solución se puede hallar con cualquier número de cifras. En la práctica, sin embargo, los cálculos se efectúan con un número finito de cifras, y en cada etapa de los cálculos se hacen errores de aproximación. Si pequeños errores de aproximación, que se efectúan en las etapas intermedias del proceso del cálculo, al espesarse la red conducen a grandes deformaciones de la solución, el esquema se llama inestable. En la práctica es inservible.

Los errores de los cálculos se pueden considerar como una perturbación de los datos iniciales, o del segundo miembro de la ecuación. De aquí se deduce que hay que pedir que la solución del problema de diferencias varíe poco para pequeños cambios de los datos iniciales del problema (segundo miembro, condiciones de frontera e iniciales) o, en otras palabras, que la solución dependa en forma continua de los datos iniciales al espesarse la red. Si esta condición se cumple, el esquema se llama estable; en caso contrario, el esquema es inestable. Más abajo se exponen ejemplos de esquemas estables e inestables.

Ejemplo 4. Esquema estable. Consideremos el problema de Cauchy para la ecuación

$$u' = -\alpha u, \quad x > 0, \quad u(0) = u_0, \quad \alpha > 0. \quad (28)$$

cuya solución es $u(x) = u_0 e^{-\alpha x}$ y sustituyámoslo por el esquema de diferencias

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = -\alpha y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \; y_0 = u_0.$$

De las ecuaciones de diferencias, se obtiene $y_i (1 + \alpha h) = y_{i-1}$, o bien $y_i = s y_{i-1} = s^i y_0$, donde $s = \frac{1}{1 + \alpha h} < 1$. Transformemos la expresión para s:

$$\ln s = -\ln (1 + \alpha h) = -\alpha h + O(h^2) = -h(\alpha + O(h)),$$

o bien

$$s = e^{-h(\alpha + O(h))}.$$

Tomemos cierto punto $\bar{x}$. Para simplificar, supondremos que este punto es un nudo de la sucesión de mallas $\bar{\omega}_h$ cuando $h \to 0$. Los números i que corresponden a este punto para la malla $\bar{\omega}_h$, son iguales a $i = \frac{\bar{x}}{h}$. Es evidente que

$$y_i = s^i y_0 = y_0 e^{-h(\alpha + O(h)) \frac{\bar{x}}{h}} = y_0 e^{-\alpha \bar{x} + O(h)} = y_0 [e^{-\alpha \bar{x}} + O(h)],$$

lo cual demuestra la convergencia del esquema de diferencias.

De aquí se aprecia que a pequeñas variaciones del valor inicial y_0 le corresponden pequeños cambios de la solución y_i (y_i depende en forma continua de y_0).

Ejemplo 5. Esquema inestable. Consideremos el mismo problema (28) que en el ejemplo 4:

$$u' = -\alpha u, \quad x > 0, \quad u(0) = u_0.$$

Aproximemos la ecuación $u' = -\alpha u$ por el esquema de diferencias

$$\sigma \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + (1 - \sigma) \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \alpha y_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{29}$$

donde σ es un parámetro arbitrario, diferente de la unidad, $\sigma \neq 1$.

Como el esquema es de tres puntos, hay que dar las condiciones iniciales no solamente en el punto $x = 0$, sino también en el $x_1 = h$: $y_0 = u_0$, $y_1 = u_0$. De (29) se sigue que

$$(\sigma - 1) y_{i+1} - [(2\sigma - 1) + \alpha h] y_i + \sigma y_{i-1} = 0. \tag{30}$$

Buscaremos las soluciones particulares de esta ecuación en la forma $y_i = s^i$. Para s se obtiene, de (30), la ecuación cuadrática

$$(\sigma - 1)\, s^2 - (2\sigma - 1 + \alpha h)\, s + \sigma = 0, \tag{31}$$

cuyo discriminante es igual a

$$\Delta = (2\sigma - 1 + \alpha h)^2 - 4\sigma(\sigma - 1) = \\ = 1 + 2(2\sigma - 1)\,\alpha h + \alpha^2 h^2,$$

de forma que $\sqrt{\Delta} = 1 + (2\sigma - 1)\,\alpha h + O(h^2)$. De aquí se halla, para las raíces s_1 y s_2 de la ecuación (31):

$$s_1 = \frac{\sigma}{\sigma - 1}\,(1 + \alpha h + O(h^2)), \quad s_2 = 1 - \alpha h + O(h^2).$$

La solución general de la ecuación (30) tiene la forma

$$y_i = A s_1^i + B s_2^i, \tag{32}$$

donde las constantes A y B se determinan de las condiciones iniciales para $i = 0$ e $i = 1$. Teniendo en cuenta que $\ln(1 \pm \alpha h + O(h^2)) = \pm h(\alpha + O(h))$, se halla:

$$s_1 = \frac{\sigma}{\sigma - 1}\, e^{h(\alpha + O(h))}, \qquad s_2 = e^{-h(\alpha + O(h))}.$$

Sea $\bar{x}$ un punto fijo, que sea nudo de la malla ω_h, de forma que $\bar{x} = ih$. De (32) se deduce que

$$y_i = A\left(\frac{\sigma}{\sigma - 1}\right)^{\frac{\bar{x}}{h}} e^{\bar{x}(\alpha + O(h))} + B e^{-\bar{x}(\alpha + O(h))}.$$

De aquí se ve que el comportamiento de la solución depende del valor del parámetro σ. Si $\sigma > 1$, entonces es $\frac{\sigma}{\sigma - 1} > 1$ y el primer sumando, para cualquier valor de $A \neq 0$, crece indefinidamente cuando $h \to 0$.

El coeficiente A depende de y_0, y_1. Si para cierta elección de los valores iniciales es $A = 0$, para una perturbación arbitrariamente pequeña de los valores iniciales, que puede tener lugar por el error de aproximación, se obtiene $A \neq 0$ y la solución correspondiente crecerá indefinidamente para $h \to 0$.

De este modo, para $\sigma > 1$ el esquema (29) es inestable e inútil para los cálculos[1]).

---

[1]) Para $\sigma = 0{,}5$, el esquema (29) es también inestable.

Los ejemplos expuestos muestran que si el esquema es estable, pequeñas variaciones de las condiciones iniciales o del segundo miembro de la ecuación conducen a pequeños cambios de la solución del problema de diferencias; si, en cambio, es inestable, pequeñas variaciones de los datos iniciales y del segundo miembro pueden conducir, en una red suficientemente pequeña, a cambios arbitrariamente grandes de la solución. Por esto, el esquema inestable diverge.

Supongamos que se busca la solución y^h de cierto problema de diferencias con paso h en la malla ω_h, que satisfaga a la ecuación en diferencias con segundo miembro φ dado y a las relaciones complementarias (por ejemplo, a las condiciones iniciales y de contorno), dadas en los nudos de frontera de la malla. El segundo miembro de la ecuación y las funciones conocidas que están contenidas en las condiciones complementarias se llaman datos de partida. La solución del problema de diferencias depende de las condiciones de partida y del parámetro h, el paso de la malla. Cambiando h, obtenemos una sucesión $\{y^h\}$ de soluciones del problema de diferencias.

Se dice que el problema de diferencias está planteado correctamente (que el esquema de diferencias es correcto), si su solución y^h, para cualquier $h \leqslant h_0$ suficientemente pequeño:

1) existe para datos de partida arbitrarios;

2) depende en forma continua de dichos datos, y esta dependencia es uniforme con respecto al paso h.

La propiedad de dependencia uniforme de la solución del problema de diferencias de los datos de partida se llama también estabilidad del problema (esquema) de diferencias.

La solución del problema de diferencias y^h se considera no para un valor fijo de h, sino para cualesquiera $h \leqslant h_0$, es decir, para sucesiones suficientemente pequeñas cualesquiera de mallas. La dependencia continua de y^h de los datos de partida, en forma uniforme con respecto a h, significa que la propiedad de dependencia uniforme se conserva para $h \to 0$. En otras palabras, si se aprecia la solución con respecto a la norma $\|\cdot\|_{(1)}$ y los datos de partida, por ejemplo, el segundo miembro φ, a la norma $\|\cdot\|_{(2)}$, la estabilidad (uniformemente con respecto a h) del esquema para su segundo miembro significa la existencia de una constante $M > 0$, independiente de h, tal que

$$\|y^h\|_{(1)} \leqslant M \|\varphi\|_{(2)} \quad \text{para todo} \quad h \leqslant h_0.$$

La definición del esquema de diferencias correcto, dada más arriba, es análoga a la definición de problema correcto para una ecuación diferencial, que encontramos varias veces en este curso.

La diferencia entre estas definiciones consiste en la exigencia de la estabilidad de la solución del problema de diferencias en forma uniforme con respecto a h.

§ 2. ESQUEMAS DE DIFERENCIAS PARA LA ECUACION DE LA CONDUCCION DEL CALOR

1. Esquemas para la ecuación con coeficientes constantes. Consideremos el primer problema de contorno para la ecuación de la conducción del calor:

hallar la función $u = u(x, t)$, continua en el rectángulo $\overline{D}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$, que satisfaga a las condiciones:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t \leqslant T, \\ &u(x, 0) = u_0(x),\ u(0, t) = u_1(t),\ u(1, t) = u_2(t). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Introduzcamos en $\overline{D}$ la malla descrita en el § 1: $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i = ih,\ t_j = j\tau),\ i = 0, 1, \ldots, N,\ j = 0, 1, \ldots, N_0\}$ con pasos $h = \frac{1}{N}$, $\tau = \frac{T}{N_0}$. Efectuando la sustitución

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \sim (u_{\bar{x}x})_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1} \sim \frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} = u_{\bar{t}}^{j+1}, \qquad f \sim \varphi$$

e introduciendo un parámetro real arbitrario σ (densidad de la capa superior $t = t_{j+1}$), se obtiene la familia monoparamétrica de esquemas

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda\left(\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma)\, y_i^j\right) + \varphi_i^{j+1},$$

$$j = 1, 2, \ldots, N_0, \quad i = 1, 2, \ldots, N - 1, \qquad (2)$$

donde $\Lambda y_i = y_{\bar{x}x,\, i}$.

El esquema (2) está definido en un modelo de seis puntos, formado por los nudos (x_{i+s}, t_{j+k}) $(s = -1, 0, 1;\ k = 0, 1)$, situados en las dos capas $t = t_j$ y $t = t_{j+1}$ (fig. 85,*a*). Por esto, el esquema (2) es llamado frecuentemente esquema de seis puntos y dos capas, o esquema con densidades.

Como en (2) figura el parámetro arbitrario σ, tenemos, de hecho, no un esquema, sino una familia monoparamétrica de éstos. Más adelante se demostrará que, mediante el parámetro σ, se puede regular la estabilidad y la exactitud del esquema (2). Como este esquema se escribe igual en todos los nudos interiores (para $1 < i < N$, $j > 0$) (x_i, t_j) de la red $\omega_{h\tau}$, los subíndices i, j se pueden omitir y utilizar notaciones sin índices, haciendo

$$y = y_i^{j+1}, \ \check{y} = y_i^j, \ y_{\bar{t}} = \frac{(y - \check{y})}{\tau}, \ \varphi = \varphi_i^{j+1}.$$

En estas notaciones, escribamos el esquema (2) como sigue

$$y_{\bar{t}} = \Lambda(\sigma y + (1 - \sigma)\check{y}) + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}. \tag{3}$$

Agregando aquí las condiciones iniciales y de frontera

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h,$$
$$y(0, t) = u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \tag{4}$$

se obtiene el problema de diferencias (3) — (4) que corresponde al (1). Hay que hallar la función de malla $y(x, t)$, definida para $(x, t) \in \bar{\omega}_{h\tau}$, que satisfaga a la ecuación (3) en los nudos interiores de $\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j), 0 < i < N, 0 < j \leqslant N_0\}$ y a las condiciones (4) en los nudos de frontera $\gamma_{h\tau} = \{(x_i, t_j), i = 0, 0 \leqslant j \leqslant N_0; i = N, 0 \leqslant j \leqslant N_0; j = 0, 0 \leqslant i \leqslant N\}$ de la red $\bar{\omega}_{h\tau}$.

Para determinar $y = y^{j+1}$, de (3) y (4) se obtiene el problema

$$\sigma\gamma y_{i-1} - (1 + 2\sigma\gamma) y_i + \sigma\gamma y_{i+1} = -F_i, \quad 0 < i < N,$$
$$y_0 = u_1, \quad y_N = u_2,$$

$$F_i = (1 - 2\gamma(1 - \sigma))\check{y}_i + (1 - \sigma)\gamma(\check{y}_{i-1} + \check{y}_{i+1}) + \tau\varphi_i, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}.$$

Los valores $\check{y} = y_i^j$ y, en consecuencia, F_i, son conocidos en la capa inferior (para $t = t_j$). El cálculo se efectúa de la capa j a la $j + 1$, a partir de $j = 0$, en la cual se da $y^0 = u_0(x)$.

Para $\sigma = 0$, se obtiene el esquema explícito (véase el § 1, p. 2). Para éste se tiene $y_i = F_i$, es decir, los valores de y se determinan independientemente en cada nudo de la malla ω_h. Para $\sigma \neq 0$, se obtiene, para determinar y, un sistema de ecuaciones algebraicas de orden $N - 1$ (tales sistemas se denominan implícitos). El método de resolución de este sistema, que considera su forma especial («tridiagonalidad» de su matriz, que tiene diferentes de cero sólo los elementos que se hallan a lo largo de la diagonal principal y de las dos diagonales adyacentes) se indica en el p. 10.

2. Error de aproximación. Sea $y = y(x, t)$ la solución del problema (3) — (4), $u = u(x, t)$, la solución del problema inicial (1). Consideremos la diferencia $z_i^{j+1} = y_i^{j+1} - u(x_i, t_{j+1})$, o bien $z = y - u$, y sustituyamos $y = z + u$ en la ecuación (3). Suponiendo que $u = u(x, t)$ es una función dada, se halla:

$$\left.\begin{aligned} z_{\bar{t}} &= \Lambda(\sigma z + (1-\sigma)\check{z}) + \psi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ z(x, 0) &= 0, \quad z(0, t) = z(1, t) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

donde

$$\psi = \Lambda(\sigma u + (1-\sigma)\check{u}) + \varphi - u_{\bar{t}} \tag{6}$$

representa el error con el cual la solución $u = u(x, t)$ de la ecuación (1) satisface a la ecuación de diferencias (3). La función de malla $\psi = \psi(x, t, u; h, \tau, \sigma)$, determinada por la fórmula (6), se llama error de la aproximación de la ecuación diferencial (1) por la ecuación en diferencias (3) en la clase de soluciones $u = u(x, t)$ de la ecuación (1) (o «error de aproximación para el esquema (3) en la solución de la ecuación (1)»).

Para acotar la magnitud de la función ψ, utilizaremos distintas normas (para $t \in \omega_\tau$ fijos), por ejemplo:

$$\|\psi\|_C = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |\psi_i|, \tag{7}$$

$$\|\psi\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h\psi_i^2\right)^{1/2}, \tag{8}$$

así como también las normas

$$\max_{\omega_\tau} \|\psi\|_C, \quad \max_{\omega_\tau} \|\psi\|_2, \quad \text{etc.} \tag{9}$$

Diremos que el esquema (3) tiene, con respecto a la norma $\|\psi\|$, orden m-ésimo de aproximación en h y n-ésimo en τ, en la solución $u = u(x, t)$ (aproxima la ecuación (1) con orden (m, n)), o, simplemente, tiene aproximación $O(h^m) + O(\tau^n)$, si

$$\|\psi\| \leqslant M(h^m + \tau^n) \qquad (m > 0,\ n > 0), \tag{10}$$

donde M es una constante positiva, que no depende de h y τ, y $\|\cdot\|$, cierta norma (por ejemplo, (7) u (8)).

Para apreciar el orden de ψ en h y τ, desarrollemos $u = u(x, t)$ en potencias de h y τ, en un entorno del punto $(x_i, \bar{t} = t_{j+1/2} = t_j + 0{,}5\tau)$. Supondremos que $u(x, t)$ tiene el número de derivadas que se necesita en el transcurso de la exposición. Designando $\dot{u} = \frac{\partial x}{\partial t}$, $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$, etc., $u = u(x_i, t_{j+1})$, $\bar{u} = u(x_i, t_{j+1/2})$, se obtiene $\Lambda u = u'' + \frac{h^2}{12} u^{(IV)} + \ldots$ (véase el § 1, p. 1),

$$u = \bar{u} + 0{,}5\tau\bar{\dot{u}} + \frac{\tau^2}{8}\bar{\ddot{u}} + O(\tau^3), \qquad \check{u} = \bar{u} - 0{,}5\tau\bar{\dot{u}} + \frac{\tau^2}{8}\bar{\ddot{u}} + O(\tau^3),$$

$$u_{\bar{t}} = \bar{\dot{u}} + O(\tau^2).$$

Utilizando los desarrollos para u, $\check{u}$, Λu, se halla que

$$\sigma u + (1-\sigma)\check{u} = \bar{u} + (\sigma - 0{,}5)\tau\bar{\dot{u}} + O(\tau^2),$$

$$\Lambda(\sigma u + (1-\sigma)\check{u}) = \sigma u'' + (1-\sigma)\check{u}'' + O(h^2) =$$

$$= \bar{u}'' + (\sigma - 0{,}5)\tau\bar{\dot{u}}'' + O(h^2 + \tau^2).$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas en (6), tendremos:

$$\psi = \bar{u}'' - \bar{\dot{u}} + (\sigma - 0{,}5)\tau\bar{\dot{u}}'' + \varphi + O(h^2 + \tau^2).$$

Como u es solución de la ecuación (1), entonces $\bar{u}'' - \bar{\dot{u}} = -\bar{f}$ y

$$\psi = \varphi - \bar{f} + (\sigma - 0{,}5)\tau\dot{u}'' + O(h^2 + \tau^2)\,^{1)}.$$

Escogiendo φ de forma que sea $\varphi = \bar{f} + O(h^2 + \tau^2)$, por ejemplo, $\varphi = \bar{f}$, si $f \in C^{(0)}$, se obtiene:

$$\psi = (\sigma - 0{,}5)\tau\dot{u}'' + O(h^2 + \tau^2). \tag{11}$$

Denotemos mediante $C_n^m(\bar{D})$ la clase de funciones que tienen m derivadas con respecto a x y n con respecto a t, continuas en $\bar{D}$. De lo anterior queda claro que

$$\|\psi\|_C = O(h^2 + \tau) \quad \text{para} \quad \sigma \neq 0{,}5 \quad \text{y} \quad u \in C_2^{(4)}, \tag{12}$$

$$\|\psi\|_C = O(h^2 + \tau^2) \quad \text{para} \quad \sigma = 0{,}5 \quad \text{y} \quad u \in C_3^{(4)}. \tag{13}$$

Escogiendo el parámetro σ igual a

$$\sigma = \sigma_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} \tag{14}$$

y el segundo miembro

$$\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12}\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}, \tag{15}$$

---

1) Como $\bar{u}'' + \bar{f} - \bar{\dot{u}} = 0$, se hubiera podido escribir (6) directamente en la forma $\psi = [\Lambda(\sigma u + (1-\sigma)\check{u}) - \bar{u}''] + (\varphi - \bar{f}) - (u_{\bar{t}} - \bar{\dot{u}})$.

se obtiene un esquema de orden más elevado de aproximación, $\psi = O(h^4 + \tau^2)$, si $u \in C_4^{(6)}$, $f \in C_4^{(2)}$ [1]).

3. **Identidad energética.** Para esclarecer para qué valores de σ el esquema (2) es estable con respecto a los datos iniciales y al segundo miembro, hallemos la apreciación de la solución del problema de diferencias (3) — (4) con condiciones de contorno homogéneas ($u_1 = u_2 \equiv 0$) a partir de φ y u_0.

Para esto, utilicemos el método de las relaciones integrales, o energéticas, el cual se generaliza, sin cambios sustanciales, al caso de ecuaciones con coeficientes variables. Nos harán falta ciertas nociones preliminares. Sean $v(x) = v_i$, $z(x) = z_i$ funciones arbitrarias, dadas en la malla $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih\}$.

Tienen lugar las siguientes fórmulas:

1. *Fórmula de derivación en diferencias del producto*:

$$(vz)_{x,i} = v_i z_{x,i} + v_{x,i} z_{i+1}. \tag{16}$$

En efecto, $v_i z_{x,i} + v_{x,i} z_{i+1} = [v_i(z_{i+1} - z_i) + (v_{i+1} - v_i) z_{i+1}]/h = (v_{i+1} z_{i+1} - v_i z_i)/h = (vz)_{x,i}$. La fórmula (16) es la análoga, para las diferencias, de la fórmula de derivación del producto: $(uv)' = u'v + uv'$.

2. *Fórmula de sumación por partes*:

$$(v, z_x) = -(z, v_{\bar{x}}] + (vz)_N - v_0 z_1, \tag{17}$$

donde

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i w_i h, \qquad (v, w] = \sum_{i=1}^{N} v_i w_i h, \tag{18}$$

que es la análoga, para las diferencias, de la fórmula de integración por partes.

Expresemos de (16) $v_i z_{x,i} = (vz)_{x,i} - v_{x,i} z_{i+1}$ y transformemos la suma

$$(v, z_x) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i z_{x,i} h = \sum_{i=1}^{N-1} [(vz)_{i+1} - (vz)_i] - \sum_{i=1}^{N-1} v_{x,i} z_{i+1} h =$$
$$= (vz)_N - v_1 z_1 - \sum_{i=2}^{N} v_{\bar{x},i} z_i h \quad (v_{x,i} = v_{\bar{x},i+1}).$$

[1]) Para los puntos 1 y 2, véase V. K. Saúliev, *Integración de las Ecuaciones Parabólicas por el Método de las Mallas*, ed. Fizmatguiz, 1960.

Considerando, ahora, que $v_1 = v_0 + (v_1 - v_0) = v_0 + hv_{\bar{x},1}$, se obtiene:

$$(v, z_x) = (vz)_N - (v_0 + hv_{\bar{x},1}) z_1 - \sum_{i=2}^{N} z_i v_{\bar{x},i} h = (vz)_N - v_0 z_1 - (z, v_{\bar{x}}].$$

3. *Primera fórmula en diferencias de Green*:

$$(v, (ay_{\bar{x}})_x) = -(ay_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}] + ay_{\bar{x}} v|_N - v_0 a_1 y_{\bar{x}}|_1. \quad (19)$$

En efecto, haciendo en (17) $z = ay_{\bar{x}}$, se obtiene de inmediato (19). De (19) se sigue, en particular, que

$$(v, (ay_{\bar{x}})_x) = -(ay_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}], \quad \text{si} \quad y = v = 0 \quad \text{para} \quad i = 0, \ N; \quad (20)$$

$$(y, (ay_{\bar{x}})_x) = -(a, (y_{\bar{x}})^2], \quad \text{si} \quad y_0 = y_N = 0. \quad (21)$$

La fórmula (19) es la análoga, para las diferencias, de la fórmula de Green

$$\int_0^1 u (kw')' \, dx = kuw' |_0^1 - \int_0^1 ku' w' \, dx.$$

4. *Segunda fórmula en diferencias de Green*:

$$(v, (ay_{\bar{x}})_x) - (y, (av_{\bar{x}})_x) = a_N (vy_{\bar{x}} - yv_{\bar{x}})_N - a_1 (vy_x - yv_x)_0. \quad (22)$$

Esta se obtiene de (19) si se cambian de lugar y y v y se resta de (19) la igualdad obtenida.

Nos hará falta también la desigualdad

$$|(y, z)^i| \leqslant \sqrt{(y, y)^i (z, z)^i}, \quad (23)$$

donde

$$(y, z)^i = \sum_{k=1}^{i} y_k z_k h, \qquad i = 2, 3, \ldots, N. \quad (24)$$

Consideremos la suma

$$(y + \lambda z, \ y + \lambda z)^i = (y, y)^i + 2\lambda (y, z)^i + \lambda^2 (z, z)^i \geqslant 0,$$

donde λ es un número real cualquiera.

Si $(z, z)^i \neq 0$, entonces $(y + \lambda z, \ y + \lambda z)^i \geqslant 0$ para todo valor de λ, sólo con la condición de que el discriminante del trinomio cuadrático sea $[(y, z)^i]^2 - (y, y)^i \cdot (z, z)^i \leqslant 0$. De aquí se deduce, precisamente, la (23). En particular, para $i = N$ se obtiene la desigualdad de Cauchy—Bunyakovski

$$|(y, z)| \leqslant \|y\| \cdot \|z\|, \quad (25)$$

donde $(,)$ se expresa por la fórmula (18) e $\| y \|$ es la norma de la función de malla $y = y_i$, igual a

$$\| y \| = \sqrt{(y, y)} = \Big(\sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h\Big)^{1/2}. \tag{26}$$

Demostremos las siguientes desigualdades:

$$\| z \| \leqslant \frac{1}{2} \| z_{\bar{x}}]|, \quad \text{si} \quad z_0 = z_N = 0, \tag{27}$$

$$\| z \|_C \leqslant \frac{1}{2} \| z_{\bar{x}}]|, \quad \text{si} \quad z_0 = z_N = 0, \tag{28}$$

donde $\| z \|_c = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant N} | z_i |$, $\| z \|$ se da por la fórmula (26), y

$$\| z_{\bar{x}}]| = (z_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}]^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^{N} z_{\bar{x}, i}^2 h\Big)^{1/2}.$$

Teniendo en cuenta que $z_i^2 = |\sum\limits_{k=1}^{i} z_{\bar{x}, k} h|^2 = |\sum\limits_{k=i+1}^{N} z_{\bar{x}, k} h|^2$, representemos z_i^2 en la forma

$$z_i^2 = (1 - x_i) \Big(\sum_{k=1}^{i} z_{\bar{x}, k} h\Big)^2 + x_i \Big(\sum_{k=i+1}^{N} z_{\bar{x}, k} h\Big)^2.$$

Aplicando la desigualdad (23) para cada suma, por ejemplo:

$$\Big(\sum_{k=1}^{i} z_{\bar{x}, k} h\Big)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{i} (z_{\bar{x}, k})^2 h \cdot \sum_{k=1}^{i} 1^2 h = x_i \sum_{k=1}^{i} (z_{\bar{x}, k})^2 h,$$

se obtiene:

$$z_i^2 \leqslant x_i (1 - x_i) \Big(\sum_{k=1}^{i} (z_{\bar{x}, k})^2 h + \sum_{k=i+1}^{N} (z_{\bar{x}, k})^2 h\Big) = x_i (1 - x_i) \| z_{\bar{x}}]|^2. \tag{29}$$

Como es $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} x (1 - x) = \frac{1}{4}$, de aquí se deduce que $\| z \|_C \leqslant \leqslant \frac{1}{2} \| z_{\bar{x}}]|$.

Multiplicando (29) por h y sumando con respecto a $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N - 1$, tendremos $\| z \|^2 \leqslant \frac{1}{4} \| z_{\bar{x}}]|^2$, o bien $\| z \| \leqslant \leqslant \frac{1}{2} \| z_{\bar{x}}]|$, puesto que $\sum\limits_{i=1}^{N-1} ih = (N - 1) h < 1$.

Sea $\Lambda v = (av_{\bar{x}})_x$, $a \geqslant c_1 > 0$. De (21) y (27) se deduce la acotación

$$-(\Lambda v, v) = -((av_{\bar{x}})_x \geqslant 4c_1 \| v \|^2. \qquad (30)$$

En efecto, $-(\Lambda v, v) = (a, (v_{\bar{x}})^2] \geqslant c_1 \| v_{\bar{x}}]|^2$ en virtud de (21). Aplicando después la desigualdad (27), se obtiene (30).

Indiquemos otra desigualdad:

$$2 | ab | < c_0 a^2 + \frac{1}{c_0} b^2, \qquad (31)$$

donde a y b son números dados y c_0, un número positivo arbitrario. Efectivamente, $2 \mid ab \mid = 2 \mid (a \sqrt{c_0}) \left(\frac{b}{\sqrt{c_0}}\right) \mid \leqslant (a \sqrt{c_0})^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{c_0}}\right)^2$, puesto que $2 \mid a_1 b_1 \mid \leqslant a_1^2 + b_1^2$ para a_1 y b_1 cualesquiera.

Pasemos ahora al estudio del problema sobre la estabilidad del esquema (3) con respecto a los datos iniciales y al segundo miembro.

Escribamos la identidad energética que corresponde a la ecuación con las condiciones de frontera homogéneas:

$$z_{\bar{t}} = \Lambda z^{(\sigma)} + \psi, \quad z_0 = z_N = 0, \quad z(x, 0) = z_0(x), \qquad (32)$$

donde

$$z^{(\sigma)} = \sigma z + (1 - \sigma) \check{z}.$$

Multipliquemos la ecuación por $2\tau z_{\bar{t}, i} h = 2 (z_i - \check{z}_i) h$ y sumemos con respecto a $i = 1, 2, \ldots, N - 1$:

$$2\tau \| z_{\bar{t}} \|^2 = 2\tau (\Lambda z^{(\sigma)}, z_{\bar{t}}) + 2\tau (\psi, z_{\bar{t}}), \quad \Lambda z = z_{\bar{x}x}. \qquad (33)$$

Representando $z^{(\sigma)}$ en la forma

$$z^{(\sigma)} = 0{,}5 (z + \check{z}) + (\sigma - 0{,}5) (z - \check{z}) = 0{,}5 (z + \check{z}) + (\sigma - 0{,}5) \tau z_{\bar{t}}$$

y aplicando la primera fórmula de Green (20) para $a = 1$, $y = \tau z_{\bar{t}} = z - \check{z}$, $v = z + \check{z}$ y $a = 1$, $y = v = z_{\bar{t}}$, tendremos[1]):

$$2\tau (\Lambda z^{(\sigma)}, z_{\bar{t}}) = 2 (\sigma - 0{,}5) \tau^2 (z_{\bar{x}\bar{t}}, z_{\bar{x}\bar{t}}] - (z_{\bar{x}} + \check{z}_{\bar{x}}, z_{\bar{x}} - \check{z}_{\bar{x}}] =$$
$$= -2 (\sigma - 0{,}5) \tau^2 \| z_{\bar{x}\bar{t}}]|^2 - \| z_{\bar{x}}]|^2 + \| \check{z}_{\bar{x}}]|^2.$$

---

[1]) $\Lambda (z + \check{z}), z - \check{z}) = -(z_{\bar{x}} + \check{z}_{\bar{x}}, z_{\bar{x}} - \check{z}_{\bar{x}}]$, $(\Lambda z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}}) = -(z_{\bar{x}\bar{t}}, z_{\bar{x}\bar{t}}]$.

Sustituyendo esta expresión en (33), se obtiene la identidad energética:

$$2\tau[\| z_{\bar{t}} \|^2 + (\sigma - 0{,}5)\tau \| z_{\bar{x}t}]|^2] + \| z_{\bar{x}}]|^2 = \| \check{z}_{\bar{x}}]|^2 + 2\tau(\psi, z_{\bar{t}}). \quad (34)$$

Obsérvese que tiene lugar la siguiente desigualdad:

$$\| v_{\bar{x}}]|^2 \leqslant \frac{4}{h^2} \| v \|^2, \quad \text{si} \quad v_0 = v_N = 0. \quad (35)$$

En efecto, sumando la desigualdad $v_{\bar{x},i}^2 = \frac{1}{h^2}(v_i - v_{i-1})^2 \leqslant \leqslant \frac{2}{h^2}(v_i^2 + v_{i-1}^2)$ con respecto a $i = 1, 2, \ldots, N-1$, se obtiene (35).

4. **Estabilidad.** Como fue indicado en el § 1, p. 4, la estabilidad de un esquema significa la dependencia continua de la solución del problema de diferencias con respecto a los datos que figuran en la ecuación (a los datos iniciales, al segundo miembro y a las condiciones de contorno, en nuestro caso).

Establezcamos para qué valores del parámetro σ el esquema (3) es estable con respecto a los datos iniciales y al segundo miembro. Para esto, consideremos el problema (32) con condiciones de contorno homogéneas. Precisemos el concepto de estabilidad.

Supongamos que la solución del problema (32) se aprecia según la norma $\| z \|_{(1)}$ (por ejemplo, $\| z \|_{(1)} = \| z \|_C$, $\| z \|_{(1)} = \| z_{\bar{x}}]|$) y el segundo miembro ψ, según la norma $\| \psi \|_{(2)}$ (por ejemplo, $\| \psi \|_{(2)} = \| \psi \|_C$, $\| \psi \|_{(2)} = \| \psi \|_{(2)}$).

Diremos que *el esquema* (32) (ó (3) — (4)) *es estable con respecto a las condiciones iniciales y al segundo miembro, si para* $h \leqslant h_0$ y $\tau \leqslant \tau_0$ *suficientemente pequeños tiene lugar la desigualdad*

$$\max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \| z(x, t) \|_{(1)} \leqslant M_1 \| z(x, 0) \|_{(1)} + M_2 \max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \| \psi(x, t) \|_{(2)}, \quad (36)$$

donde M_1, M_2 *son constantes positivas, que no dependen de* h *y* τ.

Para la estabilidad del esquema (32) es suficiente que se cumpla una de las condiciones

$$\| z \|_{(1)} \leqslant (1 + c_1\tau) \| \check{z} \|_{(1)} + c_2\tau \| \psi \|_{(2)}, \quad (37)$$

o bien

$$\| z \|_{(1)}^2 \leqslant (1 + c_1\tau) \| \check{z} \|_{(1)}^2 + c_2\tau \| \psi \|_{(2)}^2, \quad (38)$$

donde c_1 y c_2 son constantes positivas, que no dependen de h y τ.

En efecto, supongamos que se cumple la condición (37). La escribiremos en la forma

$$\| z^j \|_{(1)} \leqslant (1 + c_1\tau) \| z^{j-1} \|_{(1)} + c_2\tau \| \psi^j \|_{(2)}, \tag{39}$$
$j = 1, 2, \ldots$

Eliminando de (39) sucesivamente $\| z^{j-1} \|_{(1)}$, $\| z^{j-2} \|_{(1)}$, ... y teniendo en cuenta que $(1 + c_1\tau)^{j'} \leqslant e^{c_1 t_j}$ para $j' \leqslant j$, se obtiene:

$$\| z^j \|_{(1)} \leqslant e^{c_1 t_j} \left[\| z(x, 0) \|_{(1)} + c_2 \sum_{j'=1}^{j} \tau \| \psi^{j'} \|_{(2)} \right]. \tag{40}$$

De aquí se sigue (36), para $M_1 = e^{c_1 t_j}$, $M_2 = c_2 M_1$. Suponiendo que tiene lugar (38), obtenemos, mediante razonamientos análogos, una desigualdad del tipo (40), en la cual debe sustituirse $\|\cdot\|$ por $\|\cdot\|^2$. Como resultado, se obtiene nuevamente (36) para $M_1 = e^{\frac{1}{2} c_1 T}$, $M_2 = \sqrt{c_2} M_1$.

Aplicando la identidad (34) al esquema (32), estableceremos una desigualdad del tipo (36), de la cual se seguirá, en virtud de lo que acabamos de exponer, la estabilidad del esquema (3).

Para analizar el problema sobre la estabilidad con respecto a las condiciones iniciales, consideremos el problema (32) para $\psi = 0$ y hagamos $\| z \|_{(1)} = \| z_{\bar{x}}]\!]$.

La identidad (34), para $\psi = 0$, tiene la forma

$$2\tau [\| z_{\bar{t}} \|^2 + (\sigma - 0.5) \tau \| z_{\bar{x}\bar{t}}]\!]^2] + \| z_{\bar{x}}]\!]^2 = \| \check{z}_{\bar{x}}]\!]^2. \tag{41}$$

Sea $\sigma \geqslant 0{,}5$. Entonces, la expresión entre corchetes no es negativa y

$$\| z_{\bar{x}}]\!]^2 \leqslant \| \check{z}_{\bar{x}}]\!]^2, \quad \text{o bien} \quad \| z^j_{\bar{x}}]\!] \leqslant \| z^{j-1}_{\bar{x}}]\!] \leqslant \| z^0_{\bar{x}}]\!].$$

De aquí, en virtud de la condición inicial $z^0 = z_0(x)$, se deduce que

$$\| z^j \|_{(1)} \leqslant \| z_0 \|_{(1)}, \quad \text{donde} \quad \| z \|_{(1)} = \| z_{\bar{x}}]\!]. \tag{42}$$

Sea $\sigma < 0{,}5$, de forma que $\sigma - 0{,}5 < 0$. Designando $z_{\bar{t}} = v$ y utilizando (35), se halla:

$$\| v \|^2 + (\sigma - 0{,}5) \tau \| v_{\bar{x}}]\!]^2 \geqslant \| v \|^2 - (0{,}5 - \sigma) \tau \cdot \frac{4}{h^2} \| v \|^2 =$$
$$= \left(1 - (0{,}5 - \sigma) \tau \cdot \frac{4}{h^2} \right) \| v \|^2 \geqslant 0$$

para

$$1-(0{,}5-\sigma)\tau\cdot\frac{4}{h^2}\geqslant 0,$$

es decir, para $\sigma\geqslant\sigma_0=\frac{1}{2}-\frac{h^2}{4\pi}$. Bajo esta condición, la expresión entre corchetes en (34) no es negativa, y obtenemos nuevamente (42).

De este modo, el esquema (32) (y el (3)) es estable con respecto a las condiciones iniciales en la norma $\|z\|_{(1)}=\|z_{\bar{x}}]|$, si se cumple la condición

$$\sigma\geqslant\frac{1}{2}-\frac{h^2}{4\tau}=\sigma_0. \tag{43}$$

Consideremos casos particulares. Si $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$, la condición (43) se cumple siempre y el esquema (32) es estable para todo h y τ.

Para el esquema explícito es $\sigma=0$ y la condición (43) da

$$\gamma=\frac{\tau}{h^2}\leqslant\frac{1}{2},\quad\text{o bien}\quad\tau\leqslant\frac{1}{2}h^2, \tag{44}$$

es decir, el esquema explícito es estable condicionalmente (estable con la condición (44), que relaciona a τ y h). Se puede demostrar que, para $\gamma\geqslant\frac{1}{2}+c_1\tau^\alpha$, $0\leqslant\alpha<1$, el esquema explícito es inestable, es decir, la condición $\gamma<\frac{1}{2}+c_1\tau^\alpha$ es necesaria para la estabilidad del esquema explícito ($c_1=\text{const}>0$ es una constante arbitraria, que no depende de h y τ).

De (43) se aprecia que el esquema de orden más elevado de exactitud $\left(\sigma=\sigma_*=\frac{1}{2}-\frac{h^2}{12\tau}\right)$ es estable incondicionalmente (para cualesquiera h y τ), puesto que $\sigma_*\geqslant\sigma_0$.

Pasemos a la apreciación de la estabilidad del esquema (32) con respecto al segundo miembro. Tomaremos como punto de partida la identidad (34). Tiene lugar el teorema:

El esquema de diferencias (32) *es estable con respecto a las condiciones iniciales y al segundo miembro para*

$$\sigma\geqslant\frac{1}{2},$$

de forma que para la solución z del problema (32) es válida la apreciación

$$\| z^j_{\bar{x}}]\!] \leqslant \| z_{0\bar{x}}]\!] + \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\sum_{j'=1}^{j} \tau \| \psi^{j'} \|^2 \Big)^{1/2}. \qquad (45)$$

Aplicando las desigualdades (26) y (31), se tiene que

$$2\tau (\psi, z_{\bar{t}}) \leqslant c_0 \tau \| z_{\bar{t}} \|^2 + \frac{\tau}{c_0} \| \psi \|^2. \qquad (46)$$

Si $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, se obtiene, de (34), la desigualdad

$$2\tau \| z_{\bar{t}} \|^2 + \| z_{\bar{x}}]\!]^2 \leqslant \| \check{z}_{\bar{x}}]\!]^2 + c_0 \tau \| z_{\bar{t}} \|^2 + \frac{\tau}{c_0} \| \psi \|^2.$$

Tomando ahora $c_0 = 2$, tendremos

$$\| z_{\bar{x}}]\!]^2 \leqslant \| \check{z}_{\bar{x}}]\!]^2 + \frac{1}{2} \tau \| \psi \|^2.$$

De aquí se deduce, inmediatamente, que

$$\| z^j_{\bar{x}}]\!]^2 \leqslant \| z_{0\bar{x}}]\!]^2 + \frac{1}{2} \sum_{j'=1}^{j} \tau \| \psi^{j'} \|^2.$$

Como $a^2 + b^2 \leqslant (a + b)^2$ para $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, con esto el teorema queda demostrado.

Observación. Cambiando un tanto los razonamientos, se puede demostrar que el teorema es válido para $\sigma \geqslant \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{4\tau} h^2$, donde $0 < \varepsilon \leqslant 1$; en (45) hay que escribir $\sqrt{2\varepsilon}$ en lugar de $\sqrt{2}$. La comparación con (36) muestra que

$$\| z \|_{(1)} \leqslant \| z_{\bar{x}} \|, \quad \| \psi \|_{(2)} = \| \psi \|, \quad M_1 = 1, \quad M_2 = \sqrt{\frac{T}{2\varepsilon}}.$$

No es difícil obtener la apreciación (36) con $\| z \|_{(1)} = \| z \|$, $\| \psi \|_{(2)} = \| \psi \|$ para $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$.

Limitémonos a demostrar la estabilidad con respecto a las condiciones iniciales. Hagamos $\psi = 0$ en la ecuación (32), multipliquémosla por $2\tau z^{\sigma}_i h$ y sumemos con respecto a $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Aplicando la fórmula de Green (20) y la identidad $2\tau (z^{(\sigma)}, z_{\bar{t}}) = (z - \check{z}, z - \check{z}) + 2\tau (\sigma - 0{,}5) \times \times \| z_{\bar{t}} \|^2 = \| z \|^2 - \| \check{z} \|^2 + 2\tau (\sigma - 0{,}5) \| z_{\bar{t}} \|^2$, se obtiene: $\| z \|^2 + 2\tau^2 (\sigma - 0{,}5) \times \times \| z_{\bar{t}} \|^2 + 2\tau \| z^{(\sigma)}_{\bar{x}} \|^2] = \| \check{z} \|^2$. De aquí se sigue, para $\sigma \geqslant 0{,}5$, que $\| z \|^2 \leqslant \leqslant \| \check{z} \|^2$ y $\| z^j \| \leqslant \| z_0 \|$.

Esta acotación es válida también para $\sigma \geqslant \sigma_0$. Sin embargo, no podemos detenernos en la demostración de esto.

Hemos demostrado la estabilidad del esquema (32) en las normas $\| z_{\bar{x}}]|$ y $\| z \|$, que son las análogas, para las diferencias, de las normas $\left(\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \partial x \right)^{1/2}$ y $\left(\int\limits_0^1 u^2\, dx\right)^{1/2}$. Utilizando el análogo, para las diferencias, del principio del valor máximo, se puede comprobar que el sistema puramente implícito es estable en la métrica uniforme, es decir, que

$$\| z \|_c \leqslant \| z_0 \|_c \text{ para } \sigma = 1 \quad (\psi = 0). \tag{47}$$

Resulta ser que el esquema simétrico de seis puntos con $\sigma = 0{,}5$ es también uniformemente estable para todo h y τ:

$$\| z \|_c \leqslant M \| z_0 \|_c \quad \text{para} \quad \sigma = 0{,}5. \tag{48}$$

Consideremos el esquema explícito ($\sigma = 0$). Escribámoslo en la forma

$$y_i = (1 - 2\gamma)\, \check{y}_i + \gamma\, (\check{y}_{i-1} + \check{y}_{i+1}) + \tau\varphi_i.$$

Si $\gamma \leqslant \frac{1}{2}$, entonces $| y_i | \leqslant (1 - 2\gamma) | \check{y}_i | + \gamma\, (| \check{y}_{i-1} | + | \check{y}_{i+1} |) + \tau | \varphi_i | \leqslant \| \check{y} \|_c + \tau \| \varphi \|_c$, puesto que $1 - 2\gamma \geqslant 0$. De aquí se deduce que $\| y \|_c \leqslant \| \check{y} \|_c + \tau \| \varphi \|_c$ para $\gamma \leqslant \frac{1}{2}$ e

$$\| y^j \|_c \leqslant \| y_0 \| + \sum_{j'=1}^{j} \tau \| \varphi^{j'} \|_c, \tag{49}$$

donde $\| y \|_c = \max\limits_{\bar{\omega}_h} | y |$. De este modo, el esquema explícito es uniformemente estable con respecto a las condiciones iniciales y al segundo miembro, si se cumple la condición $\gamma \leqslant \frac{1}{2}$.

5. Convergencia y exactitud. Diremos que:

1) la solución del problema (3) — (4) converge hacia la solución $u = u\,(x, t)$ del problema (1) (el esquema (3)—(4) converge) para $h \to 0$ y $\tau \to 0$, si $\max\limits_{0 \leqslant t_j \leqslant T} \| y^j - u^j \|_{(1)} \to 0$ cuando $h \to 0$ y $\tau \to 0$;

2) el esquema (3)—(4) converge con velocidad $O\,(h^m + \tau^n)$, $m > 0$, $n > 0$, o que tiene lugar una exactitud de $O\,(h^m + \tau^n)$ (de orden m con respecto a h y orden n con respecto a τ), si para $h \leqslant h_0$ y $\tau \leqslant \tau_0$, suficientemente pequeñas, se tiene:

$$\max_{0 \leqslant t_j \leqslant T} \| y^j - u^j \|_{(1)} \leqslant M\,(h^m + \tau^n),$$

donde $M = \text{const} > 0$ no depende de h y τ.

La característica de la exactitud del esquema (3)—(4) es $\| z \|_{(1)} = \| y - u \|_{(1)}$, donde $\| \cdot \|_{(1)}$ es una de las normas introducidas más arriba. La función $z = z(x_i, t_{j+1})$ es solución del problema (5). Como $z(x, 0) = 0$, de (45) se sigue la acotación para z:

$$\| z_{\bar{x}}^j] \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{j'=1}^{j} \tau \| \psi_0^{j'} \|^2 \right)^{1/2} \quad \text{para} \quad \sigma \geqslant \frac{1}{2}. \tag{50}$$

Teniendo en cuenta la desigualdad (28), se obtiene:

$$\| z^j \|_c \leqslant \frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{2}} \max_{\bar{\omega}_\tau} \| \psi^{j'} \| = M_2 \max_{\omega_\tau} \| \psi^{j'} \|. \tag{51}$$

De aquí se deduce el teorema

De la estabilidad con respecto al segundo miembro y la aproximación del esquema (3) *se deduce su convergencia uniforme, y el orden de su exactitud coincide con el de aproximación*[1]). En otras palabras, si el esquema (3) es estable con respecto al segundo miembro, es decir, si $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$, y se cumplen las condiciones bajo las cuales el esquema (3) tiene orden máximo de aproximación en la solución $u = u(x, t)$ (véase (12), (13)), entonces ésta tiene una exactitud de $O(\tau^{m_\sigma} + h^2)$, donde $m_\sigma = 2$ para $\sigma = 0{,}5$, $m_\sigma = 1$ para $\sigma \neq 0{,}5$:

$$\| y^j - u^j \|_c \leqslant M (h^2 + \tau^{m_\sigma}) \quad \text{para} \quad \sigma \neq \sigma_*, \tag{52}$$

donde $M = \text{const} > 0$ no depende de h y τ.

Del p. 2 se deduce que la acotación (52) tiene lugar si $u \in C_2^{(4)}$, $\varphi = f$ para $\sigma \neq 0{,}5$; $u \in C_3^{(4)}$, $\varphi = \bar{f} = f^{j+1/2}$ para $\sigma = 0{,}5$.

De la desigualdad (49) se deduce que para el esquema explícito es $\| y^j - u^j \|_c \leqslant M (h^2 + \tau)$, si $u \in C_2^{(4)}$.

Observación. En virtud de la observación al teorema del p. 4, el esquema (3), para $\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$, tiene una exactitud de $O(h^4 + \tau^2)$ para $u \in C_3^{(6)}$, $f \in C_1^{(2)}$, si φ se determina según la fórmula (15).

6. Esquemas de diferencias para las ecuaciones con coeficientes variables. Pasemos ahora al estudio de los esquemas de diferencias para la resolución numérica de la ecuación de la conducción del

[1]) Véase V. S. Riábenki, A. F. Filippov, *Sobre la Estabilidad de las Ecuaciones en Diferencias*, ed. Gostejizdat, 1956.

calor (de la difusión) con coeficientes variables

$$c\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)-qu+f, \quad k>0, \quad c>0, \qquad (53)$$

donde $c=c(x, t)$, $k=k(x, t)$, $q=q(x, t)$, $f=f(x, t)$ son funciones dadas de x y t. Si, por ejemplo, el coeficiente de conductividad térmica $k=k(x, t, u)$ depende de la temperatura u, la ecuación (53) se denomina cuasilineal. Las ecuaciones cuasilineales admiten soluciones en forma analítica sólo en casos excepcionales. El desarrollo de la técnica del cálculo y la aplicación del método de las diferencias finitas hicieron posible la resolución de las ecuaciones lineales y cuasilineales con coeficientes variables. Aquí surgió la necesidad de desarrollar métodos que sean aplicables a la resolución de ecuaciones tanto con coeficientes continuos como discontinuos, mediante los mismos programas.

Los problemas con coeficientes discontinuos se encuentran con gran frecuencia en la física y en la técnica. Es suficiente indicar, por ejemplo, los problemas sobre la difusión de los neutrones y sobre el régimen térmico en un reactor heterogéneo, formado por gran número de zonas con diferentes propiedades físicas, los problemas sobre el movimiento de las fronteras de los cambios de fase (véase el cap. III, apéndice IV), etc. Para la resolución de los problemas con coeficientes discontinuos se utilizan esquemas de cálculo «de parte a parte», que no usan la información de la posición de los puntos de discontinuidad. Aquí se escriben las mismas fórmulas (sin cambio alguno de éstas en un entorno de las discontinuidades) en todos los nudos de la malla y para coeficientes cualesquiera.

Las exigencias de convergencia y exactitud de los esquemas de cálculo «de parte a parte» imponen limitaciones en la forma de éstos. Los esquemas que convergen en el caso de coeficientes discontinuos se pueden obtener mediante el método del balance, o método integral de interpolación.

7. Método del balance. Esquemas conservativos. Los procesos físicos que hemos estudiado en el curso, se caracterizan por ecuaciones integrales de conservación (de la cantidad de calor, de la cantidad de movimiento, de la energía, etc.). Así, por ejemplo, la ley de conservación del calor (ecuación del balance) en el segmento $[x_1, x_2]$, durante el tiempo $\Delta t=t_2-t_1$, tiene la forma

$$\int_{x_1}^{x_2} c\,[u(x, t_2)-u(x, t_1)]\,dx=\int_{t_1}^{t_2}[W(x_1, t)-W(x_2, t)]\,dt+\\ +\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(x, t)\,dx\,dt,$$

donde $u(x, t)$ es la temperatura; c, la capacidad calorífica de la unidad de longitud; $f(x, t)$, la densidad de las fuentes térmicas; $W(x, t) = -k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$, el flujo térmico; $k(x, t)$, el coeficiente de conductividad térmica. Si existen las derivadas continuas $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, de la ecuación del balance se deduce la ecuación diferencial de la conducción del calor

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x, t).$$

Es natural, al escribir las ecuaciones en diferencias que describen aproximadamente cierto proceso, partir de la ecuación del balance. Sea dada la malla $(x_i = ih, t_j = j\tau)$. Para cada parcela elemental (rectángulo) de esta malla, se escribe la ecuación del balance, que contiene integrales de la función y de sus derivadas (flujos, en el caso de la ecuación del balance del calor) a lo largo de la frontera de la parcela. Para su cálculo, son necesarias hipótesis complementarias sobre el perfil de las funciones. Según la elección de la interpolación local en x y en t, se obtienen diferentes esquemas. El problema sobre la elección de las interpolaciones se somete a las condiciones de estabilidad, exactitud y sencillez en la realización (en particular, la condición de que haya un mínimo de operaciones aritméticas que hay que efectuar para obtener la solución).

Ilustremos el método del *balance* (*método integral de interpolación*) mediante ejemplos.

Consideremos, primeramente, la ecuación estacionaria de la conducción del calor

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad k > 0, \quad q \geqslant 0; \quad (54)$$

aquí $q(x)u$ es la potencia de las pérdidas de calor (para $q \leqslant 0$, de las fuentes), proporcional a la temperatura $u(x)$.

Escojamos, en el segmento $0 \leqslant x \leqslant 1$, la red $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \ldots, N\}$ con paso h. Escribamos la ecuación de balance del calor en el segmento $x_{i-1/2} \leqslant x \leqslant x_{i+1/2}$, $x_{i-1/2} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = x_{i-1} + \frac{h}{2}$:

$$W_{i-1/2} - W_{i+1/2} - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)u(x)\,dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx = 0, \quad (55)$$

donde $W(x) = -k(x)\frac{du}{dx}$ es el flujo de calor. Para obtener el esquema, sustituyamos la primera integral y W' por expresiones en diferencias. Tomemos la aproximación más simple (u = const = $= u_i$ para $x_{i-1/2} \leqslant x \leqslant x_{i+1/2}$).

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,u(x)\,dx \approx h\,d_i u_i, \quad d_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,dx. \qquad (56)$$

Integremos la igualdad $\frac{du}{dx} = -\frac{W'}{k}$ en el segmento $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$:

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W'}{k}\,dx.$$

Como W' figura en (55) en los puntos semienteros $x_{i\pm 1/2}$, haciendo $W' = \text{const} = W'_{i-1/2}$ para $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ tendremos:

$$u_{i-1} - u_i = W_{i-1/2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)},$$

o bien

$$W_{i-1/2} = -a_i\frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -a_i u_{\bar{x},i}, \qquad (57)$$

$$a_i = \frac{1}{\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}}. \qquad (57')$$

Obsérvese que $\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}$ es la resistencia térmica del segmento $[x_{i-1}, x_i]$. Sustituyendo la integral (57′) por una de las fórmulas

$$\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)} \approx \frac{1}{k_{i-1/2}}, \quad \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_{i-1}} + \frac{1}{k_i}\right),$$

se obtiene $a_i = k_{i-1/2}$, $a_i = \frac{2k_{i-1}k_i}{k_{i-1} + k_i}$, etc. Todos estos coeficientes se diferencian entre sí en una magnitud de orden $O(h^2)$. Sustituyendo en (55) las expresiones (56) y (57) y denotando la función buscada mediante y_i, se obtiene el esquema de diferencias que expresa la ley de conservación del calor en la malla (esquema con-

servativo):

$$\frac{1}{h}\left[\frac{a_{i+1}(y_{i+1}-y_i)}{h}-\frac{a_i(y_i-y_{i-1})}{h}\right]-d_i v_i=-\varphi_i, \qquad (58)$$

que se puede escribir en la forma

$$(ay_{\bar{x}})_x-dy=-\varphi, \qquad (58')$$

donde

$$d_i=\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,dx, \quad \varphi_i=\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx. \qquad (59)$$

El método del balance, de este modo, permite obtener esquemas cuyos coeficientes se calculan en todos los nudos de la malla por las mismas fórmulas, como los valores medios de los coeficientes de la ecuación diferencial en un entorno del nudo de la malla.

Los propios esquemas (58) se escriben de igual forma en todos los nudos de la malla también para $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$ cualesquiera. Estos esquemas se denominan *homogéneos*. Para los fines de la práctica, es conveniente hallar los coeficientes a, d, φ del esquema partiendo de fórmulas sencillas, utilizando los valores de k, q, f en puntos aislados. Entonces a, d, φ se determinan como los valores medios de k, q, f en uno o varios puntos:

$$a(x)=\sum_{j=n_1}^{n_2} c_j k(x+s_j h), \quad -1\leqslant s_j\leqslant 0, \quad \sum_{j=n_1}^{n_2} c_j=1, \ c_j\geqslant 0, \qquad (60)$$

y análogamente para d, φ. El conjunto de los puntos $\{s_j\}$ se llama modelo del coeficiente.

Comúnmente se utilizan modelos de uno o dos puntos, haciendo, por ejemplo,

$$a_i=k_{i-1/2}, \quad d_i=q_i, \quad \varphi_i=f_i, \qquad (61)$$

si k, q, f son continuos. Si k, q, f son discontinuos, en estas fórmulas debe tomarse la semisuma de los valores límite a izquierda y derecha[1]).

El esquema (58) tiene segundo orden de aproximación, si

$$\frac{a_i+a_{i+1}}{2}=k_i+O(h^2), \quad \frac{a_{i+1}-a_i}{h}=k'_i+O(h^2),$$

$$d_i=f_i+O(h^2), \quad \varphi_i=f_i+O(h^2). \qquad (62)$$

[1]) Véase A. N. Tíjonov, A. A. Samarsky, *Sobre los esquemas homogéneos de diferencias*, Revista de cálculo numérico y Física matemática, t. 1, № 1 (1961).

En efecto, el error de la aproximación para el esquema (58), en la solución $u = u(x)$ de la ecuación (54), es igual a

$$\psi_i = (\Lambda u - du + \varphi)_i =$$
$$= \frac{1}{h^2}[a_{i+1}(u_{i+1} - u_i) - a_i(u_i - u_{i-1})] - d_i u_i + \varphi_i.$$

Sustituyendo aquí

$$u_{i\pm1} = u_i \pm h u_i' + \frac{h^2}{2}u_i'' \pm \frac{h^3}{6}u_i''' + O(h^4)$$

y teniendo en cuenta que $((ku')' - qu + f)_i = 0$, se obtiene:

$$\psi_i = \left(\frac{a_{i+1} + a_i}{2} - k_i\right)u_i'' + \left(\frac{a_{i+1} - a_i}{h} - k_i'\right)u_i' -$$
$$- (d_i - q_i)u_i + (\varphi_i - f_i).$$

De aquí se aprecia que $\psi = O(h^2)$, si se cumplen las condiciones (62). No es difícil comprobar que los coeficientes a, d, φ, escritos más arriba, satisfacen a estas condiciones.

De esta forma, el método del balance conduce a esquemas homogéneos de segundo orden de aproximación. Estos esquemas convergen en la clase de coeficientes continuos a trozos, y tienen por lo menos el primer orden de exactitud (el esquema (58) con los coeficientes (57'), (59), segundo orden).

Los esquemas de diferencias para la ecuación (54) se pueden escribir partiendo de la condición de segundo orden de aproximación. Sin embargo, aquí puede resultar que el esquema $O(h^2)$ diverja en la clase de coeficientes discontinuos. Un ejemplo de esto lo puede dar el esquema

$$\Lambda y_i = k_i \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \cdot \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - q_i y_i = -f_i, \tag{63}$$

que corresponde a la ecuación $(ku')' - qu = ku'' + k'u' - qu = -f$. Hay un ejemplo[1]) (para $q = 0$, $f = 0$, $u(0) = 1$, $u(1) = 0$) que muestra que la solución de la ecuación (63), cuando $h \to 0$, tiene por límite la función $\bar{u}(x)$, que no es solución del problema original. Si se juzga sobre la convergencia del esquema mediante la disminución del paso de las mallas (cosa que se

[1]) Véase la referencia de la nota al pie de la pág. anterior.

Fig. 86

efectúa con frecuencia en la práctica), se puede hacer la conclusión errónea de su convergencia (éste "converge", pero no hacia la solución del problema original).

8. **Esquemas de dos capas para la ecuación de la conducción del calor con coeficientes variables.** Estudiemos ahora la ecuación no estacionaria de la conducción del calor (53). Hagamos, para simplificar, $c = 1$, $q = 0$. Escribamos la ecuación del balance para el rectángulo $(x_{i-1/2} \leqslant x \leqslant x_{i+1/2},\ t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1})$ (fig. 86):

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)]\, dx =$$

$$= \int_{t_j}^{t_{j+1}} [W(x_{i-1/2}, t) - W(x_{i+1/2}, t)]\, dt + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x, t)\, dx\, dt, \quad (64)$$

donde $W = -k\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Tomemos las fórmulas más sencillas:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)]\, dx \approx h[u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)]. \quad (65)$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} [W(x_{i+1/2}, t) - W(x_{i-1/2}, t)]\, dt \approx \sigma [W_{i+1/2}^{j+1} - W_{i-1/2}^{j+1}] +$$

$$+ (1 - \sigma) [W_{i+1/2}^{j} - W_{i-1/2}^{j}], \quad (66)$$

siendo σ un número arbitrario. Utilizando la fórmula (57) para $W_{i-1/2}$ y sustituyendo (65), (66) en (64), se obtiene el sistema conservativo de dos capas

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \sigma (\Lambda y)_i^{j+1} + (1 - \sigma)(\Lambda y)_i^j + \varphi_i^{j+1}, \quad (67)$$

$$\Lambda y = (a y_{\bar{x}})_x, \quad \varphi_i^{j+1} = \frac{1}{h\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t)\, dx\, dt, \quad (68)$$

donde a se calcula (para t fijos) por las fórmulas del punto precedente, de forma que $\Lambda u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + O(h^2)$. Para φ se pueden utilizar también otras fórmulas, equivalentes a la (68), con exactitud de $O(h^2+\tau^2)$. Si f es una función continua, se hace $\varphi_i^{j+1} = f_i^{j+1/2}$.

Por analogía con el p. 3, se comprueba que el esquema (67) tiene una aproximación de $O(h^2 + (\sigma - 1/2)\tau + \tau^2)$. Si se sustituye $\sigma(\Lambda y)_i^{j+1} + (1-\sigma)(\Lambda y)_i^j$ por la expresión

$$\Lambda^{j+1/2}(\sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j) = (a^{j+1/2}(\sigma y_{\bar x}^{j+1} + (1-\sigma) y_{\bar x}^j))_x,$$

se obtiene un esquema del mismo orden de exactitud:

$$\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau} = \Lambda^{j+1/2}(\sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j) + \varphi^{j+1},$$

o bien

$$y_{\bar t} = \Lambda(\sigma y + (1-\sigma)\check{y}) + \varphi. \qquad (69)$$

Como la ecuación del balance se puede escribir para cualquier región G en el plano (x, t), delimitada por la curva Γ:

$$\int_\Gamma (cu\,dx + W\,dt) = \iint_G f(x, t)\,dx\,dt,$$

se la puede utilizar para obtener esquemas conservativos de diferencias en el caso de problemas térmicos con fronteras interiores y exteriores móviles, en mallas irregulares arbitrarias.

Análogamente se pueden obtener esquemas conservativos para las ecuaciones de la dinámica de los gases, de la elasticidad, etc. En todos los casos, es necesario verificar el orden de aproximación, la convergencia, estabilidad y otras propiedades de los esquemas obtenidos, puesto que estas cualidades del esquema no se desprenden del hecho de ser conservativo.

El método del balance, o método integral de interpolación (véase la referencia de la nota al pie de la pág. 652) se aplica ampliamente en la práctica[1]). Los esquemas de cálculo "de parte a parte" que se obtienen, convergen en la clase de coeficientes discontinuos.

Consideremos ahora el primer problema de contorno para la ecuación de la conducción del calor en la región $(0 \leqslant x \leqslant 1,$

---

[1]) Véase, por ejemplo, G. I. Marchuk, *Métodos Numéricos del Cálculo de Reactores Atómicos*, ed. Atomizdat, Moscú, 1958.

$0 \leqslant t \leqslant T$)·

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t),\ 0 < x < 1,\ t > 0,\ Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right),\\&u(0, t) = \mu_1(t),\ u(1, t) = \mu_2(t),\ u(x, 0) = u_0(x),\\&\qquad 0 < c_1 \leqslant k(x, t) \leqslant c_2,\end{aligned}\right\} \quad (70)$$

donde c_1, c_2 = const.

Para su resolución en la malla $\bar{\omega}_{h\tau}$ (véase el p. 1 del § 1), utilizaremos el esquema de dos capas (69), obtenido por el método del balance:

$$\left.\begin{aligned}&y_{\bar{t}} = \Lambda(\sigma y + (1-\sigma)\check{y}) + \varphi,\ 0 < x = ih < 1,\ t = j\tau > 0,\\&y(0, t) = \mu_1(t),\ y(1, t) = \mu_2(t),\ t \in \bar{\omega}_\tau,\end{aligned}\right\} \quad (71)$$

$$y(x, 0) = u_0(x),\ x \in \bar{\omega}_h,$$

donde $\Lambda y = (a(x, t_{j+1/2})\, y_{\bar{x}})_x$ es un esquema de segundo orden de aproximación con respecto a h

Para hallar $y = y_i^{j+1}$, se obtiene, de (71), el problema de contorno:

$$\left.\begin{aligned}&A_{i+1}y_{i+1} - C_i y_i + A_i y_{i-1} = -F_i,\ 0 < i < N,\\&y_0 = \mu_1,\ y_N = \mu_N,\end{aligned}\right\} \quad (72)$$

donde $A_i = \sigma\frac{\tau}{h^2}a_i$, $C_i = A_i + A_{i+1} + \frac{1}{\tau}$, y F_i se expresa mediante y^j.

Acotemos el error de aproximación del esquema (71). Sea $y(x, t)$ la solución del problema (71), y $u = u(x, t)$, la del problema original (70). Sustituyendo en (71) $y^j = z^j + u^j$, se obtienen, para la diferencia $z = y - u$, las condiciones

$$z_{\bar{t}} = \Lambda(\sigma z + (1-\sigma)\check{z}) + \psi,\quad z_0 = z_N = 0, \quad (73)$$
$$z(x, 0) = 0,$$

donde $\psi = \Lambda(\sigma u + (1-\sigma)\check{u}) + \varphi - u_{\bar{t}}$ es el error de aproximación para el esquema (71) en la solución $u = u(x, t)$ de la ecuación (70). Teniendo en cuenta que $\Lambda u = Lu + O(h^2)$, $\varphi = f^{j+1/2}$, $u_{\bar{t}} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2} + O(\tau^2)$, $\sigma u + (1-\sigma)\check{u} = (u + (\sigma - 0{,}5)\tau\dot{u})^{j+1/2} + O(\tau^2)$, se obtiene que $\psi = (\sigma - 1/2)\tau(L\dot{u})^{j+1/2} + O(\tau^2 + h^2)$, si $u(x, t)$ y $k(x, t)$ son funciones suficientemente suaves ($u \in C_3^{(4)}$, $k \in C_3^{(3)}$).

De aquí se observa que el sistema simétrico ($\sigma = 0,5$) tiene segundo orden de aproximación con respecto a h y τ.

Pasemos al estudio de la estabilidad del esquema (71) con respecto a los datos iniciales y al segundo miembro. Como $\sigma z + (1 - \sigma)\check z = 0,5(z + \check z) + (\sigma - 0,5)\tau z_{\bar t}$, entonces (73) se puede escribir en la forma:

$$z_{\bar t} - (\sigma - 0,5)\tau\Lambda z_{\bar t} - 0,5\Lambda(z + \check z) = \psi,\quad z_0 = z_N = 0. \tag{74}$$

Supondremos que

$$z(x, 0) = z_0(x), \tag{75}$$

$$0 < c_1 \leqslant a \leqslant c_2,\quad |a_{\bar t}| \leqslant c_3,\quad \text{o bien}\quad |a - \check a| \leqslant \tau c_3. \tag{76}$$

Razonando igual que en el p. 3, escribamos la identidad energética para el problema (74)—(76), análoga a la identidad (33):

$$2\tau\|z_{\bar t}\|^2 - 2\tau^2(\sigma - 0,5)(\Lambda z_{\bar t}, z_{\bar t}) - (\Lambda(z + \check z), z - \check z) = 2\tau(\psi, z_{\bar t}). \tag{77}$$

En virtud de la fórmula de Green (19), se tiene: $-(\Lambda v, v) = (a, v_{\bar x}^2]$, $-(\Lambda(z + \check z), z - \check z) = (a(z_{\bar x} + \check z_{\bar x}), z_{\bar x} - \check z_{\bar x}] = (a, z_{\bar x}^2] - (a, \check z_{\bar x}^2]$. Representando luego a en la forma $a = \check a + (a - \check a) = \check a + \tau a_{\bar t}$ y utilizando la condición $|a_{\bar t}| \leqslant c_3$, tendremos que $a \leqslant (1 + \tau c_4)\check a_4$, $c_4 = \frac{c_3}{c_1}$, $(a, \check z_{\bar x}^2] \leqslant (1 + c_4\tau) \times (\check a, \check z_{\bar x}^2]$. Sustituyamos esta acotación en (77):

$$2\tau[\|z_{\bar t}\|^2 + (\sigma - 1/2)\tau(a, z_{\bar x t}^2]] + (a, z_{\bar x}^2] \leqslant$$
$$\leqslant (1 + c_4\tau)(\check a, \check z_{\bar x}^2] + 2\tau(\psi, z_{\bar t}). \tag{78}$$

Estudiemos primeramente la estabilidad del esquema (74) con respecto a las condiciones iniciales. Para esto, hagamos en (78) $\psi = 0$. Mostremos que la expresión entre corchetes es $\geqslant 0$ para $\sigma \geqslant 0,5 - \frac{h^2}{4c_2\tau}$. Para $\sigma \geqslant 0,5$, esto es evidente. Sea $\sigma < 0,5$. En analogía con el p. 4, se halla: $\|v\|^2 - (0,5 - \sigma)\tau(a, v_{\bar x}^2] \geqslant \|v\|^2 - (0,5 - \sigma)c_2\tau\|v_{\bar x}]|^2 \geqslant \left(1 - (0,5 - \sigma)\frac{4c_2\tau}{h^2}\right)\|v\|^2 \geqslant 0$ para $1 - (0,5 - \sigma)4c_2\tau h^{-2} \geqslant 0$ (aquí $v = z_{\bar t}$). Por esto, de (78)

se obtiene:

$$\|z\|_{(1)}^2 \leqslant (1 + c_4\tau)\|z\|_{(1)}^2 \leqslant \left(1 + \frac{c_4\tau}{2}\right)^2 \|\check{z}\|_{(1)}^2, \quad \text{donde} \quad \|z\|_{(1)}^2 = (a, z_{\bar{x}}^2], \tag{79}$$

$$\|z^j\|_{(1)} \leqslant (1 + 0{,}5c_4\tau)\|z^{j-1}\|_{(1)} \leqslant \left(1 + \frac{c_4\tau}{2}\right)^j \|z^0\|_{(1)} \leqslant e^{0{,}5c_4 t_j}\|z_0\|_{(1)}. \tag{80}$$

Así queda demostrado el teorema:

El esquema de diferencias (74) (ó (71)) es estable con respecto a los datos iniciales según la norma $\|z\|_{(1)} = \sqrt{(a, z_{\bar{x}}^2]}$, *para*

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4c_2\tau}. \tag{81}$$

En este caso, para la solución del problema (74)—(76), *cuando* $\psi = 0$, *es válida la apreciación*

$$\|z^j\|_{(1)} \leqslant M_1\|z_0\|_{(1)}, \quad \text{donde} \quad M_1 = e^{0{,}5c_4T}. \tag{82}$$

De (81) se deduce que el esquema explícito ($\sigma = 0$) $z_{\bar{t}} = \Lambda\check{z}$ es estable para $\tau \leqslant \frac{h^2}{2c_2}$, es decir, el paso en el tiempo para el esquema explícito estable debe ser tanto menor cuanto mayor es el máximo del coeficiente de conductividad térmica. Por esto, no es conveniente utilizar los esquemas explícitos para las ecuaciones con coeficientes variables.

Demostremos el teorema:

Para la solución del problema de diferencias (74)—(76), *si* $\sigma \geqslant 0{,}5$, *es válida la acotación*

$$\max_{\bar{\omega}_\tau} \|z\|_{(1)} \leqslant M_1\|z_0\|_{(1)} + M_2 \max_{\bar{\omega}_\tau} \|\psi\|, \tag{83}$$

donde

$$\|z\|_{(1)} = \sqrt{(a, z_{\bar{x}}^2]}. \tag{84}$$

Utilicemos la desigualdad (78):

$$2\tau\|z_{\bar{t}}\|^2 + (a, z_{\bar{x}}^2] \leqslant (1 + c_4\tau)(\check{a}, \check{z}_{\bar{x}}^2] + 2\tau(\psi, z_{\bar{t}}), \quad \text{para} \quad \sigma \geqslant \frac{1}{2}. \tag{85}$$

Sustituyendo aquí la acotación (46), se obtiene (para $c_0 = 2$):

$$(a, z_{\bar{x}}^2] \leqslant (1 + c_4\tau)(\check{a}, \check{z}_{\bar{x}}^2] + \frac{\tau}{2}\|\psi\|^2.$$

Resolviendo esta desigualdad (en forma análoga al p. 4):

$$\| z^j \|_{(1)}^2 \leqslant M_1' \left[\| z_0 \|_{(1)}^2 + \frac{\tau}{2} \sum_{j'=1}^{j} \| \psi^{j'} \|^2 \right], \quad M_1' = e^{c_1 T},$$

se obtiene la acotación (83).

Si se tiene en cuenta que $(a, z_{\bar{x}}^2] \geqslant c_1 \| z_{\bar{x}} \|^2 \geqslant 4c_1 \| z \|_C^2$, de (83) se obtiene, para la solución del problema (73),

$$\max_{\bar{\omega}_\tau} \| z \|_C \leqslant M \max_{\bar{\omega}_\tau} \| \psi \|, \tag{86}$$

donde

$$M = \sqrt{\frac{M_1'}{8c_1}}, \qquad \| z \|_C = \max_{\omega_h} | z |.$$

Así queda demostrado el teorema: *si el esquema* (71) *es estable* (*para* $\sigma \geqslant 0{,}5$) *y aproxima a la ecuación* (70), *éste converge, y el orden de su exactitud coincide con el de la aproximación.*

Supongamos que la malla $\bar{\omega}_h$ es irregular, $\bar{\omega}_h^* = (x_i,\ i = 0,\ 1, \ldots, N)$, es decir, que su paso $h_i = x_i - x_{i-1}$ depende de i. Entonces en (71), en lugar de Λy, hay que poner la expresión (cfr. el. p. 2, § 1, (15))

$$\Lambda y_i = (a y_{\bar{x}})_{\hat{x}, i} = \frac{1}{\hbar_i} \left[a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right], \quad \hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}). \tag{87}$$

El error de la aproximación para Λ se puede representar en la forma

$$\psi_i = \Lambda u_i - L u_i = \frac{1}{\hbar_i} (\eta_{i+1} - \eta_i) + O(h_i^2 + h_{i+1}^2),$$

donde $\eta = O(h_i^2)$, es decir, $\| \psi \|_0 = O(h_0)$, $\| \psi \|_2 = O(h)$. Sin embargo, como fue demostrado en el p. 2, para $\| \psi \|_3$ es válida la acotación

$$\| \psi \|_3 = \Big[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \Big(\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \psi_k \Big)^2 \Big]^{1/2} = O(h_0^2),$$

donde $h_0 = \max h_i$.

El esquema puede ser obtenido por el método del balance.

Si el coeficiente $k(x, t)$ tiene una discontinuidad de primera especie en la línea $x = \text{const}$ (discontinuidad inmóvil), ó $x = \xi(t)$ (discontinuidad móvil), el esquema (71) sigue siendo convergente; sin embargo, el orden de su axactitud, en general, disminuye. En el caso de una discontinuidad fija ($x = \text{const}$), es conveniente elegir la malla de modo que el punto de discontinuidad $x = \text{const}$ sea un nudo de ω_h. Esto nos conduce a mallas irregulares. Sin embargo, el orden de exactitud (segundo con respecto a h) del esquema (71) se conserva también en el caso de k discontinuo, para esta malla.

La acotación del orden de exactitud, en el caso de coeficientes discontinuos y de una malla irregular, se complica considerablemente. En este caso, es válida una apreciación del tipo (86), sólo que en el segundo miembro, en lugar de $\| \psi \|$, figura la norma $\| \psi \|_3$ de tipo especial, indicada más arriba.

Hasta ahora hemos considerado condiciones de contorno de primera especie. Estas se satisfacen exactamente en la malla $\bar{\omega}_h$ y, por esto, la exactitud del esquema de diferencias se determina por el orden de aproximación de la ecuación. Las condiciones de contorno de tercera especie se cumplen en forma aproximada. Es natural exigir que el orden de su aproximación coincida con el de aproximación de la ecuación diferencial.

Expondremos las condiciones de contorno en diferencias de tercera especie sin deducirlas[1]).

Consideremos primeramente el problema de contorno

$$(ku')' - qu = -f(x),\ 0 < x < 1;\ k(x) > 0,\ q(x) \geqslant 0;$$

$$k(0)\,u'(0) = \beta_1 u(0) - \mu_1;\ -k(1)\,u'(1) = \beta_2 u(1) - \mu_2, \qquad (88)$$

donde $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$. La ecuación se sustituye por el esquema (58) y las condiciones para $x = 0$, $x = 1$, por las condiciones de contorno en diferencias de tercera especie

$$a_1 y_{x,0} = \tilde{\beta}_1 y_0 - \tilde{\mu}_1, \quad -a_N y_{\bar{x},N} = \tilde{\beta}_2 y_N - \tilde{\mu}_2, \qquad (89)$$

donde $a_1 = a(h)$, $a_N = a(x_N) = a(1)$, $\tilde{\beta}_1 = \beta_1 + 0{,}5hq(0)$, $\tilde{\beta}_2 = \beta_2 + 0{,}5hq(1)$, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + 0{,}5hf(0)$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2 + 0{,}5hf(1)$. Estas condiciones aproximan las condiciones (88) a la solución $u = u(x)$ del problema (88) con orden $O(h^2)$.

Resolviendo (89) con respecto a y_0 o y_N, se obtiene una escritura cómoda para los cálculos de las condiciones de contorno de tercera especie:

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \nu_1, \quad y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \nu_2, \qquad (90)$$

donde $\varkappa_1 = a_1/(a_1 + h\tilde{\beta}_1)$, $\varkappa_2 = a_N/(a_N + h\tilde{\beta}_2)$, $\nu_1 = \tilde{\mu}_1/(a_1 + h\tilde{\beta}_1)$, $\nu_2 = \tilde{\mu}_2/(a_N + h\tilde{\beta}_2)$.

Consideremos ahora el tercer problema de contorno para la ecuación de la conducción del calor (70). Sean dadas, para $x = 0$ y $x = 1$, las condiciones:

$$k\frac{\partial u}{\partial x} = \beta_1(t)\,u - \mu_1(t) \quad \text{para} \quad x = 0,$$

$$-k\frac{\partial u}{\partial x} = \beta_2(t)\,u - \mu_2(t) \quad \text{para} \quad x = 1. \qquad (91)$$

---

[1]) Véase A. A. Samarsky, *Esquemas homogéneos de diferencias para las ecuaciones no lineales de tipo parabólico*, Revista de cálculo numérico y Física matemática, t. 2, № 1, (1962). Las condiciones (89) y (92) pueden ser obtenidas por el método del balance.

Las condiciones de contorno en diferencias de tercera especie tienen, en este caso, la forma

$$\left.\begin{aligned} &a_1 (\sigma y_{x,0} + (1-\sigma)\check{y}_{x,0}) = \\ &\qquad = 0{,}5hy_{\bar{t},0} + \beta_1(\sigma y_0 + (1-\sigma)\check{y}_0) - \tilde{\mu}_1, \\ &\qquad \tilde{\mu}_1 = \mu_1 + 0{,}5hf(0, t), \\ -&a_N (\sigma y_{\bar{x},N} + (1-\sigma)\check{y}_{\bar{x},N}) = \\ &\qquad = 0{,}5hy_{\bar{t},N} + \beta_2(\sigma y_N + (1-\sigma)\check{y}_N) - \tilde{\mu}_2, \\ &\qquad \tilde{\mu}_2 = \mu_2 + 0{,}5hf(1, t), \end{aligned}\right\} \qquad (92)$$

donde a_1, a_N, β_1, β_2, $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$ se toman en el momento $t = t_{j+0,5}$, y σ es el parámetro que figura en la ecuación (71). Estas tienen el mismo orden de aproximación $O(h^2 + (\sigma - 0{,}5)\tau + \tau^2)$ en la solución $u = u(x, t)$ (de la ecuación (70) con las condiciones (91)) que el esquema (71). Teniendo en cuenta que $\check{y} = y^j$ son conocidas para todo $i = 0, 1, \ldots, N$, no es difícil reducir (92) a la forma de cálculo (90). No escribiremos las expresiones para $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ν_1 y ν_2.

Como resultado, para la determinación de $y = y^{j+1}$ se obtiene la ecuación en diferencias (72) con las condiciones de contorno (90).

9. Esquemas de tres capas. Además de los esquemas de dos capas, estudiados en el p. 8, para la resolución numérica de la ecuación de la conducción del calor (70) se utilizan los esquemas de tres capas, que relacionan los valores de la función buscada y para tres momentos de tiempo: $t = t_{j+1}, t_j, t_{j-1}$ (en tres capas) [1]).

Con frecuencia se utilizan los esquemas simétricos de tres capas

$$\frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} = \Lambda(\sigma y^{j+1} + (1-2\sigma) y^j + \sigma y^{j-1}) + \varphi^j \quad (\varphi^j = f^j), \qquad (93)$$

donde $\Lambda y = (a(x, t_j) y_{\bar{x}})_x$. Estos tienen un error de aproximación de $O(h^2 + \tau^2)$ para todo σ.

Para el esquema de tres capas (93), además de $y(x, 0)$, es necesario dar el valor $y(x, \tau)$ para $x = \tau$. Esto se puede hacer de dos formas: 1) utilizando la fórmula $u(x, \tau) = u(x, 0) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) + O(\tau^2)$ y la ecuación (70), se obtiene: $y(x, \tau) = u_0(x) + \tau [Lu + f]_{t=0} = u_0(x) + \tau [k(x, 0) u_0')' + f(x, 0)]$; 2) utilizar, para la determinación de $y(x, \tau)$ el esquema de dos capas de segundo orden de exactitud $y_{\bar{t}} = 0{,}5\Lambda(y + \check{y}) + \varphi$, para $t = \tau$. Sean, pues, dadas las condiciones iniciales

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y(x, \tau) = \bar{u}_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h. \qquad (94)$$

---

[1]) Véase R. D. Richtmyer, *Métodos de Diferencias de Resolución de los Problemas de Contorno*, ed. IL, 1960.

Para $x = 0$, $x = 1$, se plantean las condiciones de contorno, por ejemplo, de primera especie.

Mostremos que el esquema (93) es estable con respecto a las condiciones iniciales y al segundo miembro para

$$\sigma \geqslant \frac{1}{4}. \tag{94}$$

Para esto, consideremos las condiciones de frontera homogéneas $y_0 = 0$, $y_N = 0$. Introduzcamos las notaciones $y = y^{j+1}$, $\check{y} = y^j$, $\check{\check{y}} = y_{j-1}$ y escribamos el esquema (93) en la forma

$$\frac{y-\check{\check{y}}}{2\tau} = \Lambda y^{(\sigma)} + \varphi, \quad y^{(\sigma)} = \sigma y + (1-2\sigma)\check{y} + \sigma\check{\check{y}}. \tag{96}$$

Multipliquemos la ecuación (96) por $2\tau y_i^{(\sigma)} h$, sumemos con respecto a $i = 1, 2, \ldots, N-1$ y tengamos en cuenta las identidades

$$(y-\check{\check{y}})\, y^{(\sigma)} = \left[\frac{1}{2}(y^2+\check{y}^2) + \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)(y-\check{y})^2\right] -$$

$$-\left[\frac{1}{2}(\check{y}^2+\check{\check{y}}^2) + \left(\sigma-\frac{1}{2}\right)(\check{y}-\check{\check{y}})^2\right],$$

$$\frac{1}{2}(y^2+\check{y}^2) = \frac{1}{4}(y+\check{y})^2 + \frac{1}{4}(\check{y}-y)^2.$$

Como resultado, tendremos:

$$\| y \|_{(1)}^2 + 2\tau (a, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2] = \| \check{y} \|_{(1)}^2 + 2\tau (\varphi, y^{(\sigma)}), \tag{97}$$

donde

$$\| y \|_{(1)}^2 = \frac{1}{4} \| y + \check{y} \|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right) \| y - \check{y} \|^2, \tag{98}$$

$$\| y \|_{(1)}^2 \geqslant \frac{1}{4} \| y + \check{y} \|^2 \text{ para } \sigma \geqslant \frac{1}{4}.$$

Utilizando luego las desigualdades

$$2\tau (\varphi, y^{(\sigma)}) \leqslant \tau c_0 \| y^{(\sigma)} \|^2 + \frac{\tau}{c_0} \| \varphi \|^2,$$

$$(a, (y_{\bar{x}}^{(\sigma)})^2] \geqslant 4c_1 \| y^{(\sigma)} \|^2$$

y escogiendo $c_0 = 8c_1$, se obtiene:

$$\| y \|_{(1)}^2 \leqslant \| \check{y} \|_{(1)}^2 + \frac{\tau}{8c_1} \| \varphi \|^2. \tag{99}$$

De aquí se deduce la acotación

$$\| y^j \|_{(1)} \leqslant \| y(\tau) \|_{(1)} + \frac{1}{\sqrt{8c_1}} \left(\sum_{j'=1}^{j} \tau \| \varphi^{j'} \|^2 \right)^{1/2} \text{ para } \sigma \geqslant \frac{1}{4}. \tag{100}$$

Esta acotación permite demostrar la convergencia del esquema (93), (94) con velocidad $O(h^2 + \tau^2)$ para $\sigma \geqslant \frac{1}{4}$.

Indiquemos otro esquema de tres capas:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{3}{2\tau}(y^{j+1}-y^{j})-\frac{1}{2\tau}(y^{j}-y^{j-1})=\Lambda y^{j+1}+\varphi^{j+1}, \quad \varphi^{j+1}=f^{j+1}, \\ \Lambda y=(a(x, t_{j+1})\, y_{\bar{x}})_x.\end{array}\right\} \quad (101)$$

Este es, sin lugar a dudas, estable, y tiene una exactitud de $O(h^2+\tau^2)$. Para determinar y^{j+1}, de (101) se obtiene el problema (72) con

$$A_i=\frac{1}{h^2}a_i, \quad C_i=A_i+A_{i+1}+\frac{3}{2\tau}, \quad F_i=\varphi_i+\frac{4y_i^j-y_i^{j-1}}{\tau},$$

el cual se resuelve por el método del deslizamiento (véase el p. 10).

Para la ecuación de tipo hiperbólico

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=Lu+f, \quad Lu=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (102)$$

$$u(0, t)=u_1(t), \quad u(1, t)=u_2(t), \quad u(x, 0)=u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=\bar{u}_0(x), \quad (103)$$

los esquemas de diferencias deben contener no menos de tres capas. Los esquemas simétricos

$$\frac{y^{j+1}-2y^{j}+y^{j-1}}{\tau^2}=\Lambda^j(\sigma y^{j+1}+(1-2\sigma)y^j+\sigma y^{j-1})+f^j \quad (104)$$

tienen una aproximación de $O(h^2+\tau^2)$ y son estables para

$$\sigma\geqslant\frac{1}{4}-\frac{h^2}{4\tau^2 c_2}.$$

En particular, el esquema explícito ($\sigma=0$) es estable condicionalmente para

$$\tau\leqslant\frac{h}{\sqrt{c_2}}.$$

Aunque todos los esquemas estables (104) tienen el mismo orden de exactitud, en las mallas reales, como demuestran los experimentos numéricos, la exactitud del sistema aumenta al disminuir σ. Por esto, se puede recomendar utilizar esquemas incondicionalmente estables para $\sigma=\frac{1}{4}$.

10. Resolución de sistemas de ecuaciones en diferencias. Método del deslizamiento. Los esquemas implícitos para la ecuación de la conducción del calor conducen a un sistema de ecuaciones algebraicas para los valores de la función buscada y_i^{j+1} en la nueva capa $t=t_{j+1}$.

Este sistema de ecuaciones tiene la forma

$$A_i y_{i-1}-C_i y_{i+1}+B_i y_{i+1}=-F_i, \quad 0<i<N, \quad (105)$$

donde F_i es una función dada.

Para la ecuación con coeficientes constantes, es

$$A_i=\sigma\gamma, \quad B_i=\sigma\gamma, \quad C_i=1+2\sigma\gamma, \quad \gamma=\frac{\tau}{h^2}.$$

Para la ecuación con coeficientes variables, se tiene que

$$A_i = \sigma\gamma a_i, \; B_i = \sigma\gamma a_{i+1} = A_{i+1}, \; C_i = A_i + A_{i+1} + 1.$$

En el caso de una malla irregular, tendremos:

$$A_i = \frac{\sigma a_i}{\hbar_i h_i}\tau, \quad B_i = \frac{\sigma a_{i+1}}{\hbar_i h_{i+1}}\tau, \quad C_i = A_i + B_i + 1.$$

Las condiciones de contorno de primera y tercera especie, estudiadas en los parágrafos 1 y 2, se pueden escribir en la forma

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \nu_1, \quad y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \nu_2. \qquad (106)$$

Para $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0$, de aquí se obtienen las condiciones de primera especie $y_0 = \nu_1$, $y_N = \nu_2$.

Así, pues, estudiemos la ecuación (105) con las condiciones de contorno (106) y supongamos que

$$\left.\begin{aligned} A_i > 0, \; B_i > 0, \; C_i \geqslant A_i + B_i, \text{ o bien } C_i = A_i + B_i + D_i, \\ D_i \geqslant 0 \\ 0 \leqslant \varkappa_\alpha < 1, \; \alpha = 1, 2. \end{aligned}\right\} \qquad (107)$$

Bajo estas condiciones, como se demostrará más abajo, el problema (105)—(106) es resoluble. Para hallar su solución, se pueden aplicar los métodos usuales del álgebra lineal, o bien métodos iterativos. Sin embargo, el más ventajoso o económico en cuanto al volumen del trabajo empleado, es el método del deslizamiento, o de factorización[1]), que tiene en cuenta la forma especial de la matriz del sistema de ecuaciones (105): su "tridiagonalidad".

Buscaremos la solución del problema (105)—(106) en la forma

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N-1, \qquad (108)$$

donde α_i y β_i son funciones por ahora desconocidas. Sustituyendo $y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$ en (105), se excluye y_{i-1}, obteniéndose $(A_i\alpha_i - C_i)\, y_i + B_i y_{i+1} + (A_i\beta_i + F_i)$, luego de lo cual se excluye y_i, mediante (108):

$$[(A_i\alpha_i - C_i)\,\alpha_{i+1} + B_i]\, y_{i+1} + \\ + [(A_i\alpha_i - C_i)\,\beta_{i+1} + (A_i\beta_i + F_i)] = 0.$$

La ecuación (105) se satisfará si las expresiones entre corchetes son iguales a cero. De estas dos igualdades, se hallan las fórmulas

---

[1]) Véase G. I. Marchuk, *Métodos Numéricos del Cálculo de los Reactores Atómicos*, ed. Atomizdat, 1958; S. K. Godunóv, V. S. Riábenki, *Introducción a la Teoría de los Esquemas de Diferencias*, ed. Fizmatguiz, 1962.

de recurrencia para determinar α_{i+1} y β_{i+1}:

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i + F_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{109}$$

Comparando la fórmula $y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$ con la condición de contorno (106) para $i = 0$, se halla:

$$\alpha_1 = \varkappa_1, \quad \beta_1 = \nu_1. \tag{110}$$

Resolviendo (109) con las condiciones iniciales (110), se hallan α_i, β_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. Para utilizar la fórmula (108), es necesario conocer y_N.

Determinemos y_N partiendo de α_N y β_N, de la condición de contorno (106), para $i = N$. Eliminando y_{N-1} de las fórmulas $y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \nu_2$, $y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$, se halla:

$$y_N = \frac{\nu_2 + \varkappa_2\beta_N}{1 - \varkappa_2\alpha_N} \tag{111}$$

con la condición de que $1 - \varkappa_2\alpha_N \neq 0$.

Mostremos que de las condiciones (107) se deduce que $0 \leqslant \alpha_i < 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, N$. De la fórmula $\alpha_{i+1} = B_i/[B_i + A_i(1 - \alpha_i) + D_i]$, se aprecia que $0 < \alpha_{i+1} < 1$, si $0 \leqslant \alpha_i < 1$ y, por consiguiente, $0 \leqslant \alpha_i < 1$ para $i = 1, 2, \ldots, N$, puesto que $\alpha_1 = \varkappa_1 < 1$. De este modo, se tiene que $1 - \varkappa_2\alpha_N > 0$ para $0 \leqslant \varkappa_2 < 1$, y la fórmula (111) tiene sentido.

La solución del problema (105)—(106) se divide en dos etapas: 1) a partir de las condiciones iniciales (110) y de las fórmulas (109), se determinan sucesivamente α_i y después β_i para $i = 1, 2, \ldots, N$ (el cálculo va de izquierda a derecha, de i a $i+1$); 2) de (111) se halla y_N y después, por la fórmula (108), se determinan sucesivamente (de derecha a izquierda, de $i+1$ a i) y_{N-1}, y_{N-2}, $\ldots$, y_1, y_0.

El cálculo por las fórmulas (108) es estable, puesto que $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$.

Existe otra variante de las fórmulas de deslizamiento:

$$\xi_i = \frac{A_i}{C_i - B_i\xi_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad \xi_N = \varkappa_2; \tag{112}$$

$$\eta_i = \frac{B_i\eta_{i+1} + F_i}{C_i - B_i\xi_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad \eta_N = \nu_2; \tag{113}$$

$$y_{i+1} = \xi_{i+1}y_i + \eta_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0 = \frac{\nu_1 + \varkappa_1\eta_1}{1 - \varkappa_1\xi_1}. \tag{114}$$

El orden del cálculo es: 1) partiendo de las fórmulas (112) y (113) se determinan primero ξ_i, después η_i sucesivamente, de $i+1$ a i (de derecha a izquierda), para $i = N-1, N-2, \ldots, 1, 0$; 2) por las fórmulas (114) se hallan sucesivamente de i a $i+1$ (de izquierda a derecha) $y_1, y_2, \ldots, y_N$.

No es difícil comprobar que el número de operaciones aritméticas que se efectúan al resolver el problema (105)—(106) es proporcional al número de ecuaciones.

11. Métodos de diferencias de resolución de las ecuaciones cuasilineales. En el estudio de procesos a elevadas temperaturas, es necesario tener en cuenta la dependencia de los coeficientes de capacidad calorífica y de conductividad térmica de la temperatura. La potencia de las fuentes térmicas también puede depender de la temperatura si, por ejemplo, el calor se genera como resultado de una reacción química. Se obtiene entonces, para describir el proceso de propagación del calor, la ecuación cuasilineal de la conducción del calor

$$c(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(u), \quad c(u) > 0, \quad k(u) > 0. \qquad (115)$$

En el caso general, es $c = c(x, t, u)$, $k = k(x, t, u)$, $f = f(x, t, u)$.

En un medio no homogéneo, k y c pueden ser funciones discontinuas de los argumentos x y u (para diferentes sustancias, la dependencia de k, c de la temperatura es diferente). La ecuación del tipo (115) se encuentra también en el estudio de la penetración de un campo magnético en un medio, cuyo coeficiente de susceptibilidad magnética depende de este campo.

La ecuación (115), mediante un cambio de la función buscada, se reduce a una de las formas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad (116)$$

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u). \qquad (117)$$

En efecto, introduciendo, por ejemplo, la función $v = \int_0^u c(u)\,du$, se obtiene, para ésta, la ecuación (116).

En nuestros días, el método de las diferencias finitas es el único que permite hallar efectivamente la solución de las ecuaciones cuasilineales.

Consideremos los esquemas de dos capas más simples para la ecuación (115). Estos se pueden obtener por el método del balance, en forma análoga al p. 7, si se tiene en cuenta que $W = -k(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

Para las ecuaciones cuasilineales, la utilización de los esquemas explícitos no es conveniente, si $k(u)$ varía rápidamente (por ejemplo, es una función potencial), puesto que la condición de estabilidad

$$\tau \leqslant \frac{h^2}{2\max k(u)}$$

exige un paso τ muy pequeño en el tiempo. Por esto, se aplican los esquemas implícitos lineales y no lineales con respecto a y^{j+1}. En el caso de esquemas no lineales, se aplican métodos iterativos para la determinación de y^{j+1}.

a) Esquemas implícitos con exactitud de $O(h^2+\tau)$:

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}(y^j)(y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1}) - a_i(y^j)(y_i^{j+1}-y_{i-1}^{j+1})\right] + f(y_i^j), \tag{118}$$

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}(y^{j+1})(y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1}) - \right.$$

$$\left. - a_i(y^{j+1})(y_i^{j+1}-y_{i-1}^{j+1})\right] + f(y_i^{j+1}), \tag{119}$$

donde

$$a_i(y) = k\left(\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\right). \tag{120}$$

Para $x = 0$, $x = 1$, se plantean condiciones de contorno, por ejemplo, $y_0 = u_1$, $y_N = u_2$.

El primer esquema es lineal con respecto a y_i^{j+1}, los valores de y en la nueva capa $t = t_{j+1}$. La solución del problema en diferencias de contorno para y_i^{j+1}, se halla por el método del deslizamiento (véase el p. 10).

El segundo esquema, (119), es no lineal con respecto a y_i^{j+1}. Para resolver el sistema de ecuaciones no lineales que se obtiene, se aplican métodos iterativos. Escribamos la ecuación para la determinación de la iteración $\overset{s+1}{y_i}$ en el caso del método iterativo más sencillo:

$$\overset{s}{A}_i \overset{s+1}{y}_{i-1} - \overset{s}{C}_i \overset{s+1}{y}_i + \overset{s}{A}_{i+1} \overset{s+1}{y}_{i+1} = -\overset{s}{F}_i, \tag{121}$$

donde

$$\overset{s}{A}_i = \frac{\tau}{h^2} a_i(\overset{s}{y}), \quad \overset{s}{C}_i = \overset{s}{A}_i + \overset{s}{A}_{i+1} + 1, \quad \overset{s}{F}_i = y_i^j + \tau f(\overset{s}{y}_i),$$

$s = 0, 1, 2, \ldots$ es el número de la iteración.

Como aproximación nula, se toma comúnmente el valor y_i^j en la capa precedente, haciendo $\overset{0}{y}_i = y_i^j$; a veces se aplica la extrapolación, con la utilización de y_i^{j-1} (si y_i^j es monótona como función de j). La solución de la ecuación (121), con respecto a $\overset{s+1}{y}_i$, con condiciones de contorno para $i = 0$, $i = N$ de primera o de tercera especie, se halla por el método del deslizamiento (véase el p. 10). Para concluir las iteraciones, se utiliza la condición $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N-1} |\overset{s+1}{y}_i - \overset{s}{y}_i| < \varepsilon$, o bien se da un número determinado de iteraciones. Comúnmente, ya dos o tres iteraciones elevan considerablemente la exactitud. Los esquemas iterativos (119) permiten utilizar, para asegurar una exactitud dada, un paso más grande en el tiempo, en comparación con los esquemas sin iteraciones (118), lo cual a menudo conduce a una disminución significativa del volumen del trabajo del cálculo.

b) Sistema simétrico de seis puntos de exactitud $O(h^2 + \tau^2)$:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{2}\left[(ay_{\bar{x}})_{x,i}^{j+1} + (ay_{\bar{x}})_{x,i}^j\right] + f\left(\frac{y_i^{j+1} + y_i^j}{2}\right), \qquad (122)$$

donde $a_i = k\left(\frac{y_{i-1} + y_i}{2}\right)$. Este es un esquema no lineal, y para determinar y_i^{j+1} son necesarias las iteraciones.

En el caso de una cuasilinealidad débil, cuando k no depende de u y el segundo miembro $f(u)$ es no lineal, hay esquemas sin iteraciones, estables incondicionalmente, de segundo orden de exactitud.

Escribamos un esquema así (para $k = \text{const} = 1$):

$$\frac{\bar{y} - y^j}{0{,}5\tau} = \Lambda\bar{y} + f(y^j), \qquad \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = 0{,}5\Lambda\,(y^{j+1} + y^j) + f(\bar{y}), \qquad (123)$$

$$\Lambda y = y_{\bar{x}x},$$

donde $\bar{y}$ es un valor intermedio. Primeramente, se aplica el esquema puramente explícito, con paso $0{,}5\tau$ y segundo miembro $f(y^j)$; después, el esquema simétrico de seis puntos, con paso τ y segundo miembro $f(\bar{y})$. Como resultado, se obtiene un esquema de segundo grado de exactitud con respecto a h y a τ.

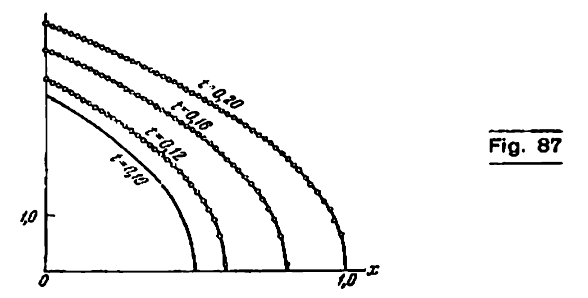


Fig. 87

A veces, para la resolución de las ecuaciones cuasilineales se utilizan los esquemas simétricos de tres capas (93); en este caso, $k(u)$ y $f(u)$ se toman en el paso j. Sin embargo, merece preferencia el esquema no lineal, análogo al (101).

Ejemplo. Expondremos los resultados de los cálculos numéricos, por el esquema (119), para el caso $k(u) = \varkappa_0 u^\sigma$, $\varkappa_0 > 0$, $\sigma > 0$, $f = 0$. La ecuación $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\varkappa_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ tiene soluciones cuyas derivadas son discontinuas en los puntos donde $u = 0$, siendo continuo el flujo $\varkappa_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}$, es decir, existe el frente térmico, que se propaga con velocidad finita (fig. 87).

Un ejemplo de esta solución es la función

$$u(x, t) = \begin{cases} [\sigma c \varkappa_0^{-1}(ct - x)]^{1/\sigma} & \text{para } x \leqslant ct, \\ 0 & \text{para } x \geqslant ct, \end{cases}$$

donde c es la velocidad de la onda térmica. Esta función es solución del problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \; u(0, t) = u_0 t^{1/\sigma}, \quad \text{donde} \quad u_0 = \left(\frac{\sigma c^2}{\varkappa_0}\right)^{1/\sigma}$$

Para este ejemplo, por el esquema (119), fueron efectuados los cálculos con parámetros $\sigma = 2$, $\varkappa_0 = 0,5$, $c = 5$, $h = 0,2$ (el número de puntos era $N = 50$) y paso $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$. La solución exacta y los resultados del cálculo se exponen en la fig. 87. En todas partes, a excepción de ciertos nudos próximos al frente,

la desviación de la solución calculada con respecto a la exacta no supera 0,02. El número de iteraciones fue $\nu \leqslant 3$ ($\varepsilon = 10^{-3}$). La línea continua en la fig. 87 indica la solución exacta; los circulitos, los puntos calculados[1]).

Obsérvese que el esquema (122) no es monótono y por esto, al calcular la onda térmica, da resultados peores en comparación con el esquema monótono (119).

§ 3. METODO DE DIFERENCIAS FINITAS PARA LA RESOLUCION DEL PROBLEMA DE DIRICHLET

1. Aproximación de diferencias del operador de Laplace. Sea dada la región G en el plano (x_1, x_2), limitada por la curva cerrada Γ. Consideremos el problema de Dirichlet (véase el cap. IV)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x) \text{ en } G, \quad u|_\Gamma = \mu(x_1, x_2). \tag{1}$$

Para resolver el problema (1) por el método de las diferencias finitas, hay que introducir en la región $G + \Gamma$ una malla y aproximar en ésta a la ecuación y a la condición de contorno.

Comencemos por aproximar el operador de Laplace. Sustituyamos cada derivada segunda $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ por las expresiones de diferencias:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \sim \frac{u(x_1 + h_1, x_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1 - h_1, x_2)}{h_1^2} = u_{\bar{x}_1 x_1} = \Lambda_1 u,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \sim \frac{u(x_1, x_2 + h_2) - 2u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2 - h_2)}{h_2^2} = u_{\bar{x}_2 x_2} = \Lambda_2 u,$$

donde h_α es el paso con respecto a x_α, $\alpha = 1, 2$.

Sustituyamos el operador de Laplace Δu por el operador de diferencias

$$\Lambda u = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2}, \tag{2}$$

que está definido en el modelo de cinco puntos ("cruz"), formado por los puntos (x_1, x_2), $(x_1 - h_1, x_2)$, $(x_1 + h_1, x_2)$, $(x_1, x_2 - h_2)$,

---

[1]) Véase A. A. Samarsky, I. M. Sóbol, *Ejemplos del cálculo numérico de las ondas térmicas*, Revista de cálculo numérico y Física matemática, t. 3, № 4, págs. 702—719 (1963).

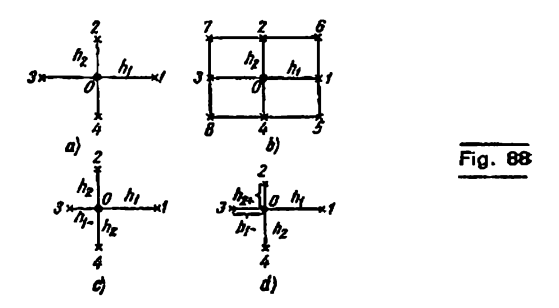


Fig. 88

$(x_1, x_2 + h_2)$. Este se representa en la fig. 88,*a*. Calculemos el error de aproximación para el operador Λ. Puesto que (véase el p. 2 del § 1)

$$u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{h_\alpha^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4} + O(h_\alpha^4), \qquad \alpha = 1, 2, \text{ será}$$

$$\Lambda u - \Delta u = \frac{h_1^2}{12} L_1^2 u + \frac{h_2^2}{12} L_2^2 u + O(h_1^4 + h_2^4), \quad L_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}$$

y, por lo tanto,

$$\Lambda v - \Delta v = O(|h|^2), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2,$$

donde v es una función cualquiera que tenga no menos de cuatro derivadas con respecto a x_1 y x_2 ($v \in C^{(m)}$, $m \geqslant 4$). De esta manera, el operador Λ aproxima al operador de Laplace con segundo orden.

No es difícil comprobar que el operador

$$\Lambda' v = \Lambda v + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 v, \tag{3}$$

definido en el modelo de nueve puntos («cajón») (fig. 88,*b*), tiene cuarto orden de aproximación en la solución $u = u(x)$ de la ecuación $\Delta u = 0$ ($\Lambda' u - \Delta u = O(|h|^4)$ para $u \in C^{(m)}$, $m \geqslant 6$) y sexto orden ($\Lambda' u - \Delta u = O(h^6)$ para $u \in C^{(m)}$, $m \geqslant 8$) en una malla cuadrada, es decir, para $h_1 = h_2 = h$.

Escribamos con más detalle la expresión para Λ en el caso $h_1 = h_2 = h$ (en una malla cuadrada):

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 4y_0}{h^2}.$$

Resolviendo la ecuación $\Lambda y = 0$ con respecto a y_0, se obtiene:

$$y_0 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4).$$

El valor de y en el centro del modelo es la media aritmética de los valores en los demás puntos de éste. Esta fórmula es la análoga, para las diferencias, de la fórmula del valor medio para una función armónica.

La ecuación de Poisson $\Delta u = -f(x_1, x_2)$ se sustituye por el esquema

$$\Lambda y = -\varphi(x), \quad \varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2). \tag{4}$$

Pasemos ahora a escribir el análogo en diferencias del problema de Dirichlet (1) en la región $G + \Gamma$. Tracemos dos familias de rectas paralelas: $x_1 = i_1h_1$, $x_2 = i_2h_2$, $i_1, i_2 = 0, \pm 1, \ldots$ (consideraremos que el origen de coordenadas $(0, 0)$ se halla dentro de G). Los puntos (i_1h_1, i_2h_2) serán llamados nudos. Los nudos $x = (i_1h_1, i_2h_2)$ y $x' = (i_1'h_1, i_2'h_2)$ se llamarán vecinos, si se hallan en una recta paralela o bien al eje x_1, o bien al x_2, y distan uno del otro un paso (h_1 ó h_2), de forma que $| i_1' - i_1 | + | i_2' - i_2 | = 1$. El nudo $x = (i_1h_1, i_2h_2)$ se denomina regular, si sus nudos vecinos $((i_1 \pm 1) h_1, i_2h_2)$, $(i_1h_1, (i_2 \pm 1) h_2)$, que forman el modelo de cinco puntos "cruz", se hallan dentro de la región G o en su frontera. Si al menos uno de estos cuatro puntos vecinos no pertenece a $G + \Gamma$, el nudo $x = x^*$ será denominado irregular. Denotemos mediante $\overset{\circ}{\omega}_h$ el conjunto de todos los nudos regulares, y mediante ω_h^*, el de los puntos irregulares. Llamaremos nudos de frontera a los puntos de intersección de las rectas $x_1 = i_1h_1$, $x_2 = i_2h_2$ con la frontera Γ. El conjunto de todos los nudos de frontera será denominado frontera de la malla y denotado por γ_h. De este modo, a la región $G + \Gamma$ se le pone en correspondencia la malla $\bar{\omega}_h (G + \Gamma)$, es decir, el conjunto de los puntos $x \in \bar{\omega}_h$, donde $\bar{\omega}_h = \overset{\circ}{\omega}_h + \omega_h^* + \gamma_h$ (fig. 89).

Supondremos que la malla posee la propiedad de conexión, es decir, que dos nudos interiores cualesquiera se pueden unir por una quebrada que se halle enteramente dentro de G y formada por segmentos que unen a los nudos de la malla y son paralelos a Ox_1 o a Ox_2.

En los nudos regulares, escribimos la ecuación en diferencias (4), utilizando el modelo de cinco puntos "cruz" con pasos h_1 y h_2.

En los nudos de frontera $x \in \gamma_h$, se da el valor de la función buscada:

$$y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h. \tag{5}$$

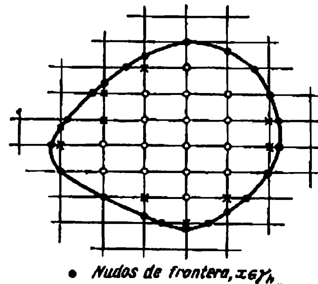


Fig. 89

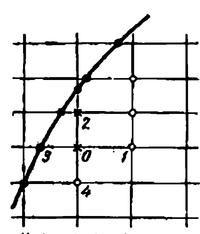


Fig. 90

En los puntos irregulares, se pueden escribir distintas condiciones.

1) interpolación de orden nulo. El valor $y(x)|_{\omega_h^*}$ se hace igual a $\mu(\bar{x})$ en el nudo más próximo $\bar{x}$ de la frontera γ_h:

$$y(x) = \mu(\bar{x}) \quad \text{para} \quad x \in \omega_h^*. \tag{6}$$

2) Interpolación de primer orden. El valor $y(x)|_{\omega_h^*}$ se determina mediante la interpolación lineal. Por ejemplo, para el caso representado en la fig. 90, el valor y_0 en el nudo O se determina por la fórmula

$$\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_{1-}}\right) y_0 = \frac{1}{h_1} y_1 + \frac{1}{h_{1-}} y_3 \,^{1)}, \tag{7}$$

la cual se puede escribir en la forma

$$\Lambda_1 y = 0, \quad \text{donde} \quad \Lambda_1 y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1};$$

$\Lambda_1 u$ es la aproximación del operador $L_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ en una malla irregular (véase el § 1, p. 2).

3) Interpolación de segundo orden. En el nudo $x \in \omega_h^*$ se escribe el esquema de cinco puntos en un modelo irregular (en una malla irregular)

$$\Lambda^* y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} = -\varphi. \tag{8}$$

[1] Las magnitudes h_1 y h_{1-} se indican en la fig. 91,a (*N. del T.*)

Fig. 91

a) b)

$$\Lambda_1 y_0 = \frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1} - \frac{y_0-y_3}{h_{1-}}\right), \quad \Lambda_2 y_0 = \frac{1}{\hbar_2}\left(\frac{y_2-y_0}{h_{2+}} - \frac{y_0-y_4}{h_2}\right), \quad \Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y$$

$$\hbar_1 = 0{,}5(h_{1-} + h_1),\quad \hbar_2 = 0{,}5(h_{2+} + h_2),\quad h_{1-} = \overline{03},\quad h_{2+} = \overline{02}$$

El modelo irregular está representado en la fig. 91,*a* y en la 88,*c*. El nudo 3 es de frontera, los 1, 2, 4 son interiores. Sea h_{1-} la distancia entre los nudos 3 y O. Entonces será $\Lambda_1 y = \frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1} - \frac{y_0-y_3}{h_{1-}}\right) = y_{\bar{x}_1\hat{x}}$, $\hbar_1 = \frac{h_{1-}+h_1}{2}$ (véase el § 1, p. 2), $\Lambda_2 y = \frac{1}{h_2^2}(y_2 - 2y_0 + y_4) = y_{\bar{x}_2 x_2}$, $\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y$. El segundo caso está representado en la fig. 91, *b* y en la 88, *d*. Los nudos 2 y 3 se hallan en la frontera; h_{2+} es la distancia entre los nudos 2 y O. En este caso, tendremos:

$$\Lambda_1 y = \frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1} - \frac{y_0-y_3}{h_{1-}}\right) = y_{\bar{x}_1\hat{x}_1},$$

$$\Lambda_2 y = \frac{1}{\hbar_2}\left(\frac{y_2-y_0}{h_{2+}} - \frac{y_0-y_4}{h_2}\right) = y_{\bar{x}_2\hat{x}_2},$$

donde $\hbar_2 = 0{,}5\,(h_2 + h_{2+})$. Nosotros consideraremos el tercer método de fijar las condiciones en ω_h^*. Como se demostrará más abajo, éste es el más exacto.

Formulemos ahora el problema en diferencias de contorno que corresponde al problema (1):

$$\Lambda y + \varphi = 0, \quad x \in \mathring{\omega}_h, \tag{9}$$

$$\Lambda^* y + \varphi = 0, \quad x \in \omega_h^*, \tag{10}$$

$$y = \mu, \quad x \in \gamma_h. \tag{11}$$

Surgen dos problemas: 1) sobre la resolución del problema, es decir, sobre la existencia de solución del sistema de ecuaciones algebraicas (9)—(11); 2) sobre la convergencia y exactitud del esquema (9)—(11). Estos serán resueltos más abajo, mediante el principio del valor máximo.

Para apreciar el error con que se determina la solución del problema (1), partiendo de las ecuaciones (9)—(11), hay que acotar la diferencia $y(x) - u(x) = z(x)$, donde $y(x)$ es la solución del problema (9)—(11) y $u(x)$, la del problema (1), tomada en los nudos de la malla $\bar{\omega}_h$. Sustituyendo $y = z + u$ en (9)—(11), se obtiene:

$$\left.\begin{array}{lll} \Lambda z = -\psi, & \psi = \Lambda u + \varphi, & x \in \mathring{\omega}_h, \\ \Lambda^* z = -\psi^*, & \psi^* = \Lambda^* u + \varphi, & x \in \omega_h^*, \\ z = 0, & & x \in \gamma_h. \end{array}\right\} \qquad (12)$$

De lo expuesto anteriormente se deduce, que $\psi = \Lambda u + \varphi = O(|h|^2)$, si $\varphi = f(x)$, $\psi^* = O(|h|)$ para la condición (8), $\psi^* = O(1)$ para la condición (7). Para acotar la solución del problema (9)—(11) con respecto al segundo miembro, nos será necesario el principio del valor máximo.

2. Principio del valor máximo. Consideremos el problema (9)—(11). Resolvamos la ecuación (9) con respecto a y_0 (véase la fig. 88,*a*):

$$2\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right) y_0 = \frac{1}{h_1^2}(y_1 + y_3) + \frac{1}{h_2^2}(y_2 + y_4) + \varphi_0, \quad x \in \omega_h. \qquad (13)$$

Sea O un nudo irregular (véase la fig. 88,*c*). Entonces, de la ecuación $\Lambda^* y + \varphi = 0$, se deduce que

$$\frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_{1-}}\right) + \frac{1}{h_2}\left(\frac{y_2 - y_0}{h_2} - \frac{y_0 - y_4}{h_2}\right) = -\varphi_0,$$

$$2\left(\frac{1}{\hbar_1 h_{1-}} + \frac{1}{h_2^2}\right) y_0 = \frac{1}{\hbar_1 h_1} y_1 + \frac{1}{h_2^2}(y_2 + y_4) + \tilde{\varphi}_0, \qquad (14)$$

donde $\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 + \frac{1}{\hbar_1 h_{1-}} \mu(3)$, h_{1-} es la distancia entre el nudo O y el de frontera 3, $\hbar_1 = 0{,}5(h_{-1} + h_1)$. De (13) y (14), se observa que ambas fórmulas se pueden escribir en la forma $A(x)\, y(x) = \sum_{\xi \in M'(x)} B(x, \xi)\, y(\xi) + F(x)$ para todo $x \in \omega_h = \mathring{\omega}_h + \omega_h^*$, donde la suma se efectúa por todos los nudos del modelo con centro en el punto x, excluyendo dicho punto. Los coeficientes $A(x)$ y $B(x, \xi)$ satisfacen a las condiciones $A(x) > 0$, $B(x, \xi) > 0$,

$$\sum_{\xi \in M'(x)} B(x, \xi) = A(x) \quad \text{para} \quad x \in \mathring{\omega}_h.$$

Si $y|_{\gamma_h} = 0$, entonces por lo menos uno de los coeficientes $B(x, \xi)$ en la zona fronteriza ω_h^* se puede hacer, formalmente, igual a cero, de forma que $\sum_\xi B(x, \xi) = A(x) - D(x)$, $D(x) > 0$. Si, por ejemplo, el nudo 3 (véase la fig. 91,*a*) se encuentra en γ_h, entonces $D(x) = D(0) = \frac{1}{h_1 h_{1-}} \geqslant \frac{1}{h_1^2}$, puesto que $\hbar_1 = 0{,}5(h_{1-} + h_1) \leqslant \leqslant h_1$. Si, en cambio, los dos nudos 2 y 3 (véase la fig. 91,*b*) son de frontera, entonces $D(x) = D(0) \geqslant \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}$, $B(0, 2) = B(0, 3) = 0$. De este modo, para $y|_{\gamma_h} = 0$, en ω_h^* siempre se cumple la condición

$$D(x) \geqslant \frac{1}{h^2}, \quad \text{donde} \quad h = \max(h_1, h_2). \tag{15}$$

Así, pues, consideremos el problema: hay que hallar la función $y(x)$, definida en $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$ y que satisfaga, en ω_h, a la ecuación

$$\left.\begin{aligned} &A(x)\, y(x) = \sum_{\xi \in M'(x)} B(x, \xi)\, y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h, \\ &A(x) > 0, \ B(x, \xi) > 0, \ \sum_{\xi \in M'(x)} B(x, \xi) \leqslant A(x). \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Es válido el siguiente teorema (*principio del valor máximo*):

Si $F(x) \leqslant 0$ en todo punto de ω_h, la solución del problema (16) (*diferente de una constante*) *no puede tomar su valor máximo positivo en los nudos interiores de la malla ω_h. Si, en cambio, $y(x) \not\equiv$ const y $F(x) \geqslant 0$ en ω_h, entonces $y(x)$ no puede tomar, dentro de ω_h, su valor mínimo negativo.*

Demostración. Sea $F(x) \leqslant 0$ en todos los nudos interiores. Supongamos que $y(x)$ toma su valor máximo positivo en cierto nudo interior. Como $y(x) \not\equiv$ const, existe un punto $\bar{x} \in \omega_h$, en el cual es $y(\bar{x}) = \max y(x) = M_0 > 0$, y en el nudo vecino $\bar{\xi} \in M'(\bar{x})$ se tiene $y(\bar{\xi}) < M_0$. La ecuación (16) se escribe, en el nudo $\bar{x}$, en la forma

$$[A(\bar{x}) - \sum_\xi B(\bar{x}, \xi)]\, y(\bar{x}) + \sum_\xi B(\bar{x}, \xi)\,(y(\bar{x}) - y(\xi)) = F(\bar{x}). \tag{17}$$

Como $\sum_\xi B(\bar{x}, \xi)\,(y(\bar{x}) - y(\xi)) \geqslant B(\bar{x}, \bar{\xi})\,(y(\bar{x}) - y(\bar{\xi})) > 0$,

de (17) y (16) se deduce que $F(\bar{x}) > 0$, lo cual contradice a la condición $F(x) \leqslant 0$. La primera parte del teorema queda demostrada.

La segunda parte se demuestra análogamente.

Corolario 1. Si $F(x) \geqslant 0$, $x \in \omega_h$ e $y|_{\gamma_h} \geqslant 0$, la solución del problema (16) no es negativa: $y(x) \geqslant 0$ en todos los puntos de $\bar{\omega}_h$. En efecto, supongamos que al menos en un punto $\bar{x} \in \omega_h$ la función $y(x)$ es negativa; entonces, ésta debe tomar su valor mínimo negativo en un nudo interior. Esto es imposible, en virtud del principio del valor máximo (siempre que $y(x) \not\equiv$ const).

Corolario 2. Si $F(x) \leqslant 0$, $x \in \omega_h$, e $y|_{\gamma_h} \leqslant 0$, entonces es $y(x) \leqslant 0$ para todos los $x \in \bar{\omega}_h$.

Corolario 3. La ecuación homogénea

$$A(x)\,y(x) = \sum_{\xi \in M'(x)} B(x, \xi)\,y(\xi), \tag{18}$$

con la condición de frontera homogénea $y|_{\gamma_h} = 0$, tiene sólo solución trivial.

En efecto, para $F \equiv 0$, los corolarios 1 y 2 nos dan $y(x) \geqslant 0$, $y(x) \leqslant 0$ respectivamente, es decir, $y(x) \equiv 0$.

De esta manera, el problema de diferencias (16) tiene solución única.

Corolario 4. Para la solución de la ecuación homogénea (18) tiene lugar la acotación

$$\|y\|_0 \leqslant \|y\|_{0,\gamma}, \tag{19}$$

donde $\|y\|_0 = \max\limits_{x \in \bar{\omega}_h} |y(x)|$, $\|y\|_{0,\gamma} = \max\limits_{x \in \gamma_h} |y(x)|$ (la solución de la ecuación (18) toma sus valores máximo y mínimo en la frontera γ_h).

Tiene lugar el siguiente *teorema de comparación*:

Sea $y(x)$ la solución de la ecuación (16), *e $\bar{y}(x)$, la solución de la misma ecuación con segundo miembro $\bar{F}(x) \geqslant 0$ y valor de frontera $\bar{y}|_{\gamma_h} \geqslant 0$. Si se cumplen las condiciones $|F(x)| \leqslant \bar{F}(x)$ para $x \in \omega_h$, $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$ para $x \in \gamma_h$, entonces será $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$ para todo $x \in \bar{\omega}_h$.*

El corolario 1 nos da de inmediato $\bar{y}(x) \geqslant 0$ en todo punto de $\bar{\omega}_h$. Las funciones $u = \bar{y} + y$, $v = \bar{y} - y$ satisfacen a la ecuación (16) con segundos miembros $F_u = \bar{F} + F$, $F_v = \bar{F} - F$ y a los valores de frontera $u = \bar{y} + y|_\gamma$, $v = \bar{y} - y|_\gamma$. Como, por hipótesis, es $F_u \geqslant 0$, $u|_\gamma \geqslant 0$ y $F_v \geqslant 0$, $v|_\gamma \geqslant 0$, entonces, en virtud del corolario 1, será $u \geqslant 0$, o bien $y \geqslant -\bar{y}$, $v \geqslant 0$, o bien $y \leqslant \bar{y}$, es decir, $|y| \leqslant \bar{y}$ para $x \in \omega_h$.

3. Acotación de la solución de la ecuación no homogénea. Consideremos la ecuación no homogénea

$$A(x)\,y(x)=\sum_{\xi}B(x,\xi)\,y(\xi)+F(x),\quad x\in\omega_h, \tag{20}$$

con la condición de frontera homogénea

$$y\,|_{\gamma}=0.$$

Supongamos que se cumplen las condiciones

$$B(x,\xi)>0,\ \sum_{\xi}B(x,\xi)=A(x)-D(x),\ D(x)\geqslant\delta>0 \tag{21}$$

$$\text{para todo}\quad x\in\omega_h.$$

Entonces, para la solución del problema (20), (21) es válida la acotación

$$\|y\|_0\leqslant\frac{\|F\|_0}{\delta}. \tag{22}$$

En virtud del teorema de comparación, es $|y|\leqslant\bar{y}$, donde $\bar{y}$ es la solución del problema (20) con segundo miembro $\bar{F}=|F|$. Supongamos que $\bar{y}(x)$ toma su valor máximo en el nudo $\bar{x}$. Como $\bar{y}(\bar{x})>0$, entonces será

$$A(\bar{x})\,\bar{y}(\bar{x})\leqslant\sum_{\xi}B(\bar{x},\xi)\,\bar{y}(\xi)+|F(\bar{x})|\leqslant$$
$$\leqslant(A(\bar{x})-D(\bar{x}))\,\bar{y}(\bar{x})+|F(\bar{x})|,$$

$$\bar{y}(\bar{x})\leqslant\frac{|F(\bar{x})|}{D(\bar{x})}\leqslant\left\|\frac{F}{D}\right\|_0\qquad(\|\psi\|_0=\max_{\bar{\omega}_h}|\psi|).$$

Teniendo en cuenta que $\|y\|_0\leqslant\bar{y}(\bar{x})$ y $D\geqslant\delta$, se obtiene (22). Obsérvese que, de hecho, hemos obtenido la acotación

$$\|y\|_0\leqslant\left\|\frac{F(x)}{D(x)}\right\|_0.$$

Supongamos que

$$D(x)\geqslant\delta>0\ \text{para}\ x\in\omega_h^*\ \text{y}\ D(x)\geqslant0\ \text{para}\ x\in\mathring{\omega}_h, \tag{23}$$

$$F(x)=0\ \text{para}\ x\in\mathring{\omega}_h,\ F(x)=F^*\ \text{para}\ x\in\omega_h^*. \tag{24}$$

Entonces, para la solución del problema (20), (23), (24) tiene lugar la acotación

$$\|y\|_0\leqslant\frac{1}{\delta}\|F^*\|_0. \tag{25}$$

En efecto, $\bar{y}(x) \geqslant 0$, en virtud del principio del valor máximo, y no puede tener su valor máximo en los nudos $x \in \mathring{\omega}_h$, en los cuales $F(x) = 0$. Suponiendo que $\bar{x} \in \omega_h^*$ es un punto en el cual se alcanza el máximo, se obtiene la apreciación (25).

Las mayores dificultades en la apreciación de la solución del problema (21) surgen en el caso en que $D(x) \equiv 0$ para $x \in \omega_h$. En este caso, se escribe la función mayorante $\bar{y}(x) \geqslant \| y \|_0$, que satisface a la ecuación (20) con segundo miembro $\bar{F}(x) \geqslant$ $\geqslant | F(x) |$.

De este modo, si se cumple la condición $D(x) \geqslant \delta > 0$, $x \in \omega_h$, para la solución del problema (20)—(21) tiene lugar la acotación

$$\| y \|_0 \leqslant \| y \|_{0,\gamma} + \frac{\| F \|_0}{\delta}, \tag{26}$$

que expresa la dependencia continua de la solución con respecto a los valores de frontera y al segundo miembro.

4. Convergencia de la solución del problema en diferencias de Dirichlet. Para establecer la convergencia y el orden de exactitud del esquema (9)—(11), debemos acotar la solución del problema (12).

El error de aproximación en los nudos regulares es $\psi =$ $= (\Lambda u + \varphi) - (Lu + f) = O(| h |^2)$, si $u \in C^{(4)}$ y en los irregulares, $\psi = \psi^* = O(| h |)$.

Como $\| \psi^* \|_0 = O(| h |)$, para la apreciación de z debe analizarse separadamente la influencia sobre z del error de aproximación en los nudos irregulares. Representemos a z en forma de la suma $z = \mathring{z} + z^*$, donde $\mathring{z}$ y z^* son las soluciones de los problemas

$$\Lambda \mathring{z} = -\mathring{\psi}, \quad x \in \omega_h, \quad \mathring{z}|_{\gamma_h} = 0, \quad \mathring{\psi} = \begin{cases} \psi, & x \in \mathring{\omega}_h, \\ 0, & x \in \omega_h^*; \end{cases} \tag{27}$$

$$\Lambda z^* = -\psi^*, \quad x \in \omega_h, \quad z^*|_{\gamma_h} = 0, \quad \psi^* = \begin{cases} 0, & x \in \mathring{\omega}_h, \\ \psi, & x \in \omega_h^*. \end{cases} \tag{28}$$

Como $z|_{\gamma_h} = 0$, entonces será $D(x) \geqslant \frac{1}{h^2} = \delta > 0$ para $x \in \omega_h^*$ y $D(x) \geqslant 0$ para $x \in \mathring{\omega}_h$.

Aplicando (25), se obtiene:

$$\| z^* \|_0 \leqslant h^2 \| \psi^* \|_0. \tag{29}$$

Para la apreciación de $\overset{\circ}{z}$, utilizaremos el teorema de comparación. Escribamos la función mayorante

$$U(x)=K\left(\frac{R^2}{4}-r^2\right),\quad r^2=x_1^2+x_2^2,$$

donde R es el radio de un círculo con centro en el punto $(0, 0)\in G$, que contenga la región G, K = const >0. Calculemos las derivadas en diferencias:

$$\Lambda_1 r^2=(r^2)_{\bar{x}_1x_1}=(x_1^2)_{\bar{x}_1x_1}=\frac{(x_1+h_1)^2-2x_1^2+(x_1-h_1)^2}{h_1^2}=2,$$

$\Lambda_2 r^2=2$ para $x\in\overset{\circ}{\omega}_h$. En los puntos irregulares, también será $\Lambda_1 r^2=2$. De este modo, se tiene que

$$\Lambda U=-K\Lambda r^2=-4K,\ \text{para}\ x\in\omega_h=\overset{\circ}{\omega}_h+\omega_h^*.$$

Escojamos K de forma que sea $\|\overset{\circ}{\psi}\|_0\leqslant 4K$. Para esto, es suficiente hacer $K=\frac{1}{4}\|\overset{\circ}{\psi}\|_0$. Teniendo en cuenta que $U\geqslant 0$ para $x\in\gamma_h$, $U\leqslant K\frac{R^1}{4}=\frac{R^2}{16}\|\overset{\circ}{\psi}\|_0$ y aplicando el teorema de comparación, se halla que

$$\|\overset{\circ}{z}\|_0\leqslant\|U\|_0\leqslant\frac{R^2}{16}\|\overset{\circ}{\psi}\|_0. \tag{30}$$

Uniendo las desigualdades (29) y (30) y teniendo en cuenta que $\|z\|_0\leqslant\|\overset{\circ}{z}\|_0+\|z^*\|_0$, se obtiene:

$$\|z\|_0\leqslant h^2\|\psi^*\|_0+\frac{R^2}{16}\|\overset{\circ}{\psi}\|_0. \tag{31}$$

Con esta queda demostrado el teorema:

Para la solución del problema (12) *tiene lugar la acotación* (31).

De (31) se aprecia que si $u\in C^{(2)}(\bar{G})$, es decir, si la solución del problema tiene derivadas segundas continuas en la región cerrada $\bar{G}=G+\Gamma$, de forma que $\|\overset{\circ}{\psi}\|_0=\rho(|h|)$, $\|\psi^*\|_0=\rho(|h|)$, donde $\rho(|h|)\to 0$ cuando $|h|\to 0$, el esquema (9)—(11) converge:

$$\|z\|_0=\|y-u\|_0=\rho(|h|). \tag{32}$$

Si $u\in C^{(4)}(G)$, tienen lugar las apreciaciones

$$\|\overset{\circ}{\psi}\|_0\leqslant\frac{M_4}{12}|h|^2,\quad \|\psi^*\|_0\leqslant\frac{2}{3}M_3h,\ \text{donde}\ M_s=\max_{\alpha,\bar{G}}\left|\frac{\partial^s u}{\partial x_\alpha^s}\right|, \tag{33}$$

($\alpha = 1, 2, s = 3, 4$). Aplicando la desigualdad (31), se aprecia que, para la solución del problema (12), es válida la acotación

$$\|z\|_0 = \|y - u\|_0 \leqslant \frac{2}{3} M_3 h^3 + \frac{M_4 R^2}{192} |h|^2,$$

es decir, el esquema (9)—(11) converge uniformemente con velocidad $O(|h|^2)$ (tiene segundo orden de exactitud).

Obsérvese que si y se da en ω_h^* mediante interpolación lineal (véase (7)), entonces $\psi^* = O(1)$ y la acotación (31) nos da:

$$\|y - u\|_0 = O(|h|^2), \tag{34}$$

es decir, en este caso el esquema (9) también tiene segundo orden de aproximación.

5. Resolución de las ecuaciones en diferencias por el método de iteración simple. Para determinar la solución del problema en diferencias de Dirichlet (9)—(11), se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales de orden superior, igual al número de nudos interiores de la malla. Para la resolución exacta de este sistema por los métodos conocidos del álgebra lineal, se necesita efectuar un gran número de operaciones aritméticas, y un gran volumen de memoria operativa de la máquina. Por esto, el sistema de ecuaciones se resuelve por métodos iterativos, que tienen en cuenta la forma especial de la matriz del sistema.

En este punto estudiaremos el método de iteración simple (*método de Jacobi*). Sea $h_1 = h_2 = h$. Escribamos la ecuación (9) en el modelo de la fig. 88, *a*. En un nudo regular, tendremos:

$$\overset{s+1}{v_0} = \frac{\overset{s}{v_1} + \overset{s}{v_2} + \overset{s}{v_3} + \overset{s}{v_4} + h^2\varphi_0}{4}, \tag{35}$$

donde $s = 0, 1, 2, \ldots$ es el número de la iteración. En un nudo irregular (véase la fig. 91, *a*), en el caso en que el nudo $3 \in \gamma_h$, será:

$$\overset{s}{v_0} = \frac{1}{4}\left[\frac{hh_-}{\hbar^2}\overset{s}{v_1} + \frac{h_-}{\hbar}(\overset{s}{v_2} + \overset{s}{v_4})\right] + \frac{h^2 h_-}{4\hbar}\varphi_0 + \frac{h^2}{4\hbar^2}\mu_3, \tag{36}$$

donde $\mu_3 = \mu(3)$ es el valor de $y|_{\gamma_h} = \mu$ en el nudo 3.

Para $s = 0$, se toma la aproximación inicial $\overset{0}{v} = u_0$. Sea y la solución exacta del problema (9)—(11), $\overset{s}{v}$, la iteración s-ésima. El proceso iterativo converge, si la diferencia $\overset{s}{v} - y = \overset{s}{z}$ tiende (según cierta norma) a cero para $s \to \infty$. Sustituyendo $\overset{s}{v} = y + \overset{s}{z}$

en (35) y tomando en cuenta que $y_0 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + h^2\varphi_0)$, se obtiene, para $\overset{s}{z}$, la ecuación homogénea

$$\overset{s+1}{z_0} = \frac{\overset{s}{z_1} + \overset{s}{z_2} + \overset{s}{z_3} + \overset{s}{z_4}}{4}, \qquad x \in \overset{\circ}{\omega}_h, \tag{37}$$

$$\overset{s+1}{z_0} = \frac{1}{4}\left[\frac{hh_-}{h^2}\overset{s}{z_1} + \frac{h_-}{h}(\overset{s}{z_2} + \overset{s}{z_4})\right], \qquad x \in \omega_h^*, \tag{38}$$

con las condiciones $z|_{\gamma_h} = 0$ y la condición inicial $\overset{0}{z} = y - u_0$, donde $\overset{0}{z}$ es el error que se comete al tomar la aproximación inicial.

Para apreciar $\overset{s}{z}$, hay que escoger la norma $\|\cdot\|$, por ejemplo:

$$\|z\|_{0,\bar{\omega}} = \max_{x\in\bar{\omega}_h}|y|, \quad \|z\|_2 = \sum_{\omega_h} z^2(i_1h_1,\ i_2h_2)\,h_1h_2)^{1/2}.$$

Diremos que el método iterativo (35) converge, si $\|y - \overset{s}{v}\| \to 0$ cuando $s \to 0$. Comúnmente, se da la exactitud $\varepsilon > 0$, con la cual debe hallarse la solución aproximada; en este caso, se plantea la condición

$$\|\overset{s}{v} - y\| \leqslant \varepsilon\,\|u_0 - y\|. \tag{39}$$

Si las iteraciones convergen con velocidad de una progresión geométrica, es decir, si $\|\overset{s}{v} - y\| \leqslant \rho\,\|\overset{s-1}{v} - y\| \leqslant \rho^s\,\|u_0 - y\|$, $0 < \rho < 1$, la condición (39) se cumplirá, si $\rho^s < \varepsilon$. De aquí se deduce que para disminuir el error inicial $\|u_0 - y\|$ en $\frac{1}{\varepsilon}$ veces, es suficiente hacer $s_0 \geqslant \ln\frac{1}{\varepsilon}\Big/\ln\frac{1}{\rho}$ iteraciones.

El método de iteración simple converge con velocidad de una progresión geométrica en la norma $\|\cdot\|_2$ (en media) en el caso en que $\bar{G} = (0 \leqslant x_\alpha \leqslant 1,\ \alpha = 1,\ 2)$ es un cuadrado y $h_1 = h_2 = h$; la razón $\rho = 1 - 2\ \operatorname{sen}^2\frac{\pi h}{2} < 1$ $\left(\text{para } h < \frac{1}{2}\right)$ depende del paso h de la malla. Para h pequeñas, se tiene que $\ln\frac{1}{\rho} \approx \frac{\pi^2h^2}{2}$ y, por lo tanto, $s_0 \approx \frac{2}{\pi^2h^2}\ln\frac{1}{\varepsilon}$, es decir, el número de iteraciones es proporcional al número de nudos $N = \frac{1}{h^2}$ de la malla.

Como para el cálculo de una iteración, mediante las fórmulas (35), (36), se efectúan $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ operaciones, para obtener la solución del problema (9)—(11) con exactitud de ε, hay que efectuar $O\left(\frac{1}{h^4}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$ operaciones aritméticas. Obsérvese que el error en la determinación de la solución del problema inicial es la suma del error $O(h^2)$ del propio esquema de diferencias (9) y el error $O(\varepsilon)$ del método iterativo para la resolución de (9). Para que ambos errores sean de un mismo orden, es natural tomar $\varepsilon = O(h^2)$. De esta forma, para el método de iteración simple debe ser

$$s_0 = O\left(\frac{1}{h^2}\ln\frac{1}{h}\right).$$

En la actualidad, hay métodos que aseguran una exactitud de ε:

a) para el rectángulo, con un número de iteraciones $s_0 \approx \approx \ln\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}$ y un volumen total de trabajo $O\left(\frac{1}{h^2}\ln\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$;

b) para regiones no rectangulares, con $s_0 \approx \frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}$ y un volumen total de trabajo $O\left(\frac{1}{h^3}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Estos son los métodos de direcciones variables, que estudiaremos en el § 4, p. 3.

La comparación con éstos muestra que el método de iteración simple es demasiado laborioso. Por esto, a pesar de su sencillez, casi no se aplica en la actualidad para resolver los problemas en diferencias para las ecuaciones elípticas.

§ 4. METODOS DE DIFERENCIAS DE RESOLUCION DE PROBLEMAS CON VARIAS VARIABLES ESPACIALES

1. Esquemas multidimensionales. En el § 3, hemos considerado los esquemas de diferencias para la resolución del problema de Dirichlet en el caso de dos dimensiones, (x_1, x_2). Al escribir los esquemas de diferencias para la ecuación de la conduccion del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f, \tag{1}$$

el primer paso es aproximar el operador de Laplace. Sea

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y, \qquad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \qquad \alpha = 1,\ 2, \tag{2}$$

el operador de cinco puntos en ω_h con pasos h_1 y h_2.

En analogía con el § 2, p. 2, tomaremos los esquemas de dos capas para (1) en la forma

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda\left(\sigma y^{j+1} + (1-\sigma)\, y^j\right) + \varphi, \tag{3}$$

$$y^{j+1} = y^{j+1}_{i_1, i_2} = y\left(i_1 h_1,\ i_2 h_2,\ t_{j+1}\right).$$

Sea $\bar{G}$ una región en el plano (x_1, x_2), limitada por la curva Γ. Introduzcamos en $\bar{G} = G + \Gamma$ la malla $\bar{\omega}_h$, descrita en el § 3. Estudiaremos el problema

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, t),\ x \in G,\ 0 < t \leqslant T, \\ &u(x, 0) = u_0(x),\ u|_\Gamma = \mu(x, t). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Lo pondremos en correspondencia el esquema de diferencias (3), con las condiciones de contorno

$$y|_{\gamma_h} = \mu, \quad y(x, 0) = u_0(x). \tag{5}$$

En analogía con el § 2, se establece que el esquema (3) es estable para

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{h^2}{8\tau} \qquad (\text{si } h_1 = h_2 = h).$$

De aquí se deduce que el esquema explícito $(\sigma = 0)$

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda y^j + \varphi^{j+1}, \text{ o bien } y^{j+1} = y^j + \tau\left(\Lambda y^j + \varphi^{j+1}\right), \tag{6}$$

es condicionalmente estable para $\tau \leqslant \frac{h^2}{4}$ (en el caso unidimensional, para $\tau \leqslant h^2/2$, véase el § 2). Los esquemas implícitos son incondicionalmente estables para $\sigma \geqslant 1/2$. En el caso de tres dimensiones, cuando $x = (x_1, x_2, x_3)$, en (3) hay que poner

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y + \Lambda_3 y, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1,\ 2,\ 3.$$

La condición de estabilidad tiene la forma

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} \qquad (\text{para } h_1 = h_2 = h_3 = h).$$

El esquema explícito ($\sigma = 0$) es estable para $\tau \leqslant h^2/6$. El orden de aproximación $\psi = (\Lambda u + \varphi - u_{\bar{t}}) - \left(Lu + f - \frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2}$ depende de σ: $\psi = O(|h|^2 + \tau^2)$ para $\sigma = 0{,}5$, $\psi = O(|h|^2 + \tau)$ para $\sigma \neq 0{,}5 \left(|h|^2 = \sum_{\alpha=1}^{p} h_\alpha^2,\ p = 2,\ 3,\right)$, para cualquier número de dimensiones.

Las condiciones de contorno en γ_h se plantean igual que en el § 3 para el problema de Dirichlet. En los nudos irregulares ω_h^*, el operador Λ ($\Lambda \sim \Delta$) se escribe para una malla irregular. Para el esquema con adelanto ($\sigma = 1$), es válido el principio del valor máximo. Este converge uniformemente con velocidad $O(|h|^2 + \tau)$.

No presenta dificultad alguna escribir (en analogía con los parágrafos 2 y 3) los esquemas de orden mayor $O(|h|^4 + \tau^2)$ de aproximación; por ejemplo, para $p = 2$ ($x = (x_1, x_2)$), el esquema de exactitud $O(|h|^4 + \tau^2)$ tiene la forma

$$y_{\bar{t}} = \Lambda_1 (\sigma_1 y + (1 - \sigma_1) \check{y}) + \Lambda_2 (\sigma_2 y + (1 - \sigma_2) \check{y}) \quad (f = 0),$$

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{h_\alpha^2}{12\tau}, \quad \alpha = 1,\ 2, \quad (G \text{ es un rectángulo}).$$

En el caso de ecuaciones con coeficientes variables, para obtener los esquemas se puede utilizar el método del balance en la malla ω_h. Sea dada, por ejemplo, la ecuación de la conducción del calor

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \quad x = (x_1, \ldots, x_p), \\ L &= L_1 + L_2 + \ldots + L_p, \\ L_\alpha u &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha (x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \quad \alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ p. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Sea $p = 2$. Tomemos el volumen $\left(\left(i_1 - \frac{1}{2}\right) h_1 \leqslant x_1 \leqslant \right.$ $\left.\leqslant \left(i_1 + \frac{1}{2}\right) h_1, \left(i_2 - \frac{1}{2}\right) h_2 \leqslant x_2 \leqslant \left(i_2 + \frac{1}{2}\right) h_2,\ t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}\right)$

y escribamos, para éste, la ecuación del balance del calor:

$$\iint_g (u^{j+1} - u^j)\, dx_1\, dx_2 = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_C (W_1\, dx_2 + W_2\, dx_1) + \\ + \iint_g \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x, t)\, dx_1\, dx_2,$$

donde $g = \left(\left(i_1 - \frac{1}{2}\right) h_1 \leqslant x_1 \leqslant \left(i_1 + \frac{1}{2}\right) h_1, \ \left(i_2 - \frac{1}{2}\right) h_2 \leqslant \leqslant x_2 \leqslant \left(i_2 + \frac{1}{2}\right) h_2\right)$ es un rectángulo; C, su frontera; $W_\alpha = -k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$, el flujo térmico en la dirección del eje Ox_α. Sustituyendo las integrales y los flujos por expresiones de diferencias, en forma análoga al p. 8 del § 2, se obtiene un sistema del tipo

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda(t^{j+1/2})(\sigma y^{j+1} + (1 - \sigma) y^j) + \varphi^{j+1}, \tag{8}$$

o bien

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \sigma(\Lambda y)^{j+1} + (1 - \sigma)(\Lambda y)^j + \varphi^{j+1}, \tag{9}$$

donde

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_\alpha y = (a_\alpha, \ y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \tag{10}$$

es decir, Λ_α es el análogo del operador de diferencias $\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x$, que aproxima a $Lu = (ku')'$ (véase el § 2, p. 7). El coeficiente a_α se determina de las expresiones del tipo (61), § 2, por ejemplo:

$$a_1 = (a_1)_{i_1, i_2} = k_1\left(\left(i_1 - \frac{1}{2}\right) h_1, \ i_2 h_2, \ t\right),$$

$$a_2 = (a_2)_{i_1, i_2} = k_2\left(i_1 h_1, \ \left(i_2 - \frac{1}{2}\right) h_2, \ t\right), \text{ etc.}$$

Para $\varphi = \varphi^{j+1}$, se puede tomar la fórmula $\varphi^{j+1} = f(i_1 h_1, i_2 h_2, t_{j+1/2})$. Si los coeficientes k_α tienen discontinuidades para $x_\alpha = \text{const}$, $\alpha = 1, 2$, la expresión más sencilla para a_α tiene la forma

$$a_1 = \frac{1}{4}[k_1(i_1 h_1 - 0, \ i_2 h_2 - 0, \ t) + k_1(i_1 h_1 - 0, \ i_2 h_2 + 0, \ t) + \\ + k_1(i_1 h_1 + 0, \ i_2 h_2 + 0, \ t) + k_1(i_1 h_1 + 0, \ i_2 h_2 - 0, \ t)]$$

y análogamente para a_2.

Para los esquemas obtenidos (8), son válidos los resultados del § 2, p. 8.

2. Esquemas económicos. En la resolución de las ecuaciones multidimensionales por el método de las mallas, tiene una gran importancia el volumen del trabajo del cálculo, es decir, el número de operaciones aritméticas necesarias para la resolución del problema con la exactitud exigida. Analicemos, desde este punto de vista, los esquemas obtenidos en el punto anterior.

Sea G el cuadrado $(0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1)$, $\omega_h = \{(i_1h,\ i_2h),\ i_1,\ i_2 = 0,\ 1,\ \ldots,\ N\}$, una malla de paso h. Esta tiene $(N-1)^2 = O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ nudos interiores. Consideremos el esquema explícito (6) y el implícito (3) para $\sigma = 1$. Ambos tienen el mismo orden de exactitud. El número Q de operaciones necesarias para determinar y^{j+1} en todos los nudos de ω_h, en la nueva capa $t = t_{j+1}$, es proporcional al número $(N-1)^2$ de nudos de la malla ω_h, es decir,

$$Q_{ex} = O\left(\frac{1}{h^2}\right).$$

En el caso del esquema implícito (3) para $\sigma = 1$, para determinar y^{j+1} hay que resolver un sistema de $(N-1)^2$ ecuaciones. Esto exige no menos de $Q_{imp} = O\left(\frac{1}{h^4}\right)$ operaciones, es decir, mucho más que para el esquema explícito..

Por otro lado, el esquema implícito $(\sigma = 1)$ es estable para todo τ y h, mientras que el explícito es estable sólo para $\tau \leqslant \frac{1}{4} h^2$.

Surge así la pregunta: ¿no se pueden hallar esquemas que combinen las mejores cualidades de los esquemas explícito $\left(\text{volumen del trabajo } Q = O\left(\frac{1}{h^2}\right)\right)$ e implícito (estabilidad incondicional)?

Estos esquemas son llamados económicos.

En los últimos años, se han propuesto muchos esquemas económicos para diferentes problemas de la física matemática[1]).

[1]) Véase D. W. Peaceman, H. H. Rachford, *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations*, J. Industr. Math. Soc., t. 3, № 1, págs. 28—41 (1955); J. Douglas, *On numerical integration of $u_{xx} + u_{yy} = u_t$ implicit methods*, J. Industr. Math. Soc., t. 3, págs. 42—65 (1955); N. N. Yanenko, *Sobre un método de diferencias del cálculo de la ecuación multidimensional de la conducción del calor*, Dokl. AN URSS, t. 125, № 6,

Estos esquemas permitieron hallar la solución numérica de muchos problemas muy complejos de la física y la técnica, con respecto a los cuales hace pocos años se dudaba de la posibilidad de su resolución aproximada, inclusive utilizando las máquinas computadoras electrónicas más perfeccionadas.

En el caso de una variable espacial, como vimos en el § 2, los esquemas implícitos conducen al sistema de ecuaciones (105), las cuales se resuelven por el método del deslizamiento. Aquí, para hallar y^{j+1}, son necesarias $O\left(\frac{1}{h}\right)$ operaciones. Tomemos la malla $\bar{\omega}_h$, con paso $h = 1/N$, en el cuadrado G $(0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 1)$. La malla se puede representar como el conjunto de nudos situados en las "filas" $i_2 = 0, 1, \ldots, N$, o como el conjunto de nudos que se hallan en las "columnas" $i_1 = 0, 1, 2, \ldots, N$. En total, hay $N+1$ fila y $N+1$ columna. El número de nudos en cada fila (columna) es igual a $N+1$.

Si en cada fila (columna) se resuelve un problema del tipo (105) del § 2, por el método del deslizamiento, para i_2 (i_1) fijo, para hallar la solución en todas las filas (columnas), es decir, en todos los nudos de la malla, es necesario un número $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ de operaciones, proporcional al número de nudos de $\bar{\omega}_h$. La idea fundamental de los métodos económicos consiste, precisamente, en la resolución sucesiva de problemas unidimensionales del tipo (105) del § 2 a lo largo de las filas y de las columnas.

Esta idea se expresa en su forma más marcada por el esquema longitudinal-transversal (método implícito de direcciones variables):

$$\frac{y^{j+1/2} - y^j}{0{,}5\tau} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^j + f^{j+1/2}, \tag{11}$$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{0{,}5\tau} = \Lambda_2 y^{j+1} + \Lambda_1 y^{j+1/2} + f^{j+1/2}. \tag{12}$$

El paso de la capa j a la $j+1$ se efectúa en dos etapas, con pasos $0{,}5\tau$: primero se resuelve la ecuación (11), implícita en la dirección de x_1 y explícita con respecto a x_2 y después, la ecuación (12),

---

págs. 1207—1210 (1959); E. G. Diákonov, *Esquemas de diferencias con operador separable para los problemas no estacionarios multidimensionales*, Rev. de cálculo numérico y de Física matem., t. 2, № 4 (1962); A. A. Samarsky, *Sobre un método económico de diferencias de resolución de la ecuación parabólica multidimensional en una región arbitraria*, Rev. de cálculo numérico y Física matem., t. 2, № 5 (1962).

explícita con respecto a x_1 e implícita en x_2. El valor $y^{j+1/2}$ es intermediario.

Formulemos las condiciones de contorno e iniciales para el esquema (11)—(12), en el caso en que $G = \{0 \leqslant x_1, x_2 \leqslant 1\}$ es un cuadrado, y $\bar{\omega}_h = \{(i_1 h_1, i_2 h_2)\}$, una malla con pasos h_1, h_2. Si las condiciones de contorno (4) no dependen de t, es decir, $\mu = \mu(x)$, se hace $y^{j+1/2}|_{\gamma_h} = y^{j+1}|_{\gamma_h} = \mu(x)|_{\gamma_h}$. Si, en cambio, $\mu = \mu(x, t)$ depende de t, para el valor intermedio $y^{j+1/2}$ las condiciones de contorno para $i_1 = 0$, N_1 se dan por la fórmula

$$y^{j+1/2} = \frac{1}{2}(\mu^{j+1} + \mu^j) - \frac{1}{4}\tau\Lambda_2(\mu^{j+1} - \mu^j) = \bar{\mu}, \quad \text{para} \quad i_1 = 0, \ N_1; \tag{13}$$

para y^{j+1} se plantean las condiciones habituales

$$y^{j+1} = \mu^{j+1} \quad \text{para} \quad i_2 = 0, \quad N_2. \tag{14}$$

Agregando aquí la condición inicial

$$y^0 = u_0(x) \quad \text{para} \quad j = 0, \tag{15}$$

se obtiene el problema de diferencias (11)—(15), que corresponde al problema (4).

El esquema longitudinal-transversal (11)—(12) es incondicionalmente estable (para todo τ y h) y tiene una exactitud de $O(\tau^2 + h^2)$.

Sustituyamos en (11), (12) las expresiones para $\Lambda_1 y$ y $\Lambda_2 y$:

$$\Lambda_1 y = (\Lambda_1 y)_{i_1 i_2} = \frac{1}{h_1^2}(y_{i_1-1} - 2y_{i_1} + y_{i_1+1}),$$

$$\Lambda_2 y = (\Lambda_2 y)_{i_1 i_2} = \frac{1}{h_2^2}(y_{i_2-1} - 2y_{i_2} + y_{i_2+1})$$

(escribimos sólo el índice (i_1 ó i_2) que varía). Entonces, para $y^{j+1/2} = \bar{y}$ e $y^{j+1} = y$ se obtienen los problemas de contorno

$$\left.\begin{array}{c} 0{,}5\gamma_1 y_{i_1-1}^{j+1/2} - (1+\gamma_1) y_{i_1}^{j+1/2} + 0{,}5\gamma_1 y_{i_1+1}^{j+1/2} = -F_{i_1}^{j+1/2}, \\ i_1 = 1, 2, \ldots, N_1 - 1 \ (0 < i_2 < N_2), \\ y_{0,i_2}^{j+1/2} = \bar{\mu}|_{x_1=0}, \ y_{N_1,i_2}^{j+1/2} = \bar{\mu}|_{x_1=1}, \ \gamma_1 = \dfrac{\tau}{h_1^2}, \\ F_{i_1}^{j+1/2} = 0{,}5\gamma_1 (y_{i_2-1}^j + y_{i_2+1}^j) + (1-\gamma_1) y_{i_2}^j + 0{,}5\tau f^{j+1/2}; \end{array}\right\} \tag{16}$$

y

$$\left.\begin{aligned} &0{,}5\gamma_2 y^{j+1}_{i_2-1} - (1+\gamma_2)\,y^{j+1}_{i_2} + 0{,}5\gamma_2 y^{j+1}_{i_2+1} = -F^{j+1}_{i_2},\\ &i_2 = 1, 2, \ldots, N_2 - 1 \quad (0 < i_1 < N_1),\\ &y^{j+1}_{i_1,0} = \mu^{j+1}|_{x_2=0},\ y^{j+1}_{i_1,N_2} = \mu^{j+1}|_{x_2=1},\ \gamma_2 = \tau/h^2,\\ &F^{j+1} = 0{,}5\gamma_2\left(y^{j+1/2}_{i_1-1} + y^{j+1/2}_{i_1+1}\right) + (1-\gamma_2)\,y^{j+1/2}_{i_1} + 0{,}5\tau\bar{f}^{j+1/2}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Aquí $\bar{\mu}$ se determina por la fórmula (13). Supongamos que y^j y, en consecuencia $F^{j+1/2}$, son conocidos. Fijemos $i_2 = 1$ y resolvamos, en esta fila, el problema de contorno (16), por las fórmulas del deslizamiento. Haciendo luego $i_2 = 2, \ldots, N_2 - 1$, se halla sucesivamente $y^{j+1/2}$ en todos los nudos de ω_h. Después de esto, se calcula F^{j+1} y se resuelven los problemas de contorno (17) a lo largo de las columnas $i_1 = 1, 2, \ldots, N_1 - 1$. Como resultado, se obtiene el valor y^{j+1} en la nueva capa. Al pasar de la capa $j + 1$ a la $j + 2$, se repite el proceso del cálculo.

De lo expuesto más arriba, queda claro que, al pasar de la capa j a la $j + 1$, se efectúan $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ operaciones aritméticas Para hallar y^{j_0}, para $t_0 = j_0\tau$, a partir de las condiciones iniciales se necesitan, evidentemente, $O\left(\frac{1}{d^2}\right) j_0 = O\left(\frac{1}{h^2\tau}\right)$ operaciones, es decir, el número de operaciones es proporcional al número de nudos utilizados de la malla de espacio-tiempo $\omega_{h\tau} = \{(i_1h_1, i_2h_2, j\tau)\}$.

En el caso de la ecuación (7) con coeficientes variables, en (11)—(12) hay que poner, de acuerdo con (67), § 2, las expresiones $\Lambda_\alpha y = (a_\alpha(x, t_{j+0,5})\, y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, $L_\alpha u - \Lambda_\alpha u = O(h_\alpha^2)$. Los operadores Λ_1 y Λ_2 actúan sólo a lo largo de las filas y de las columnas respectivamente. Por esto, se puede utilizar el esquema (11)—(12) también para una región arbitraria, haciendo, por ejemplo, $\bar{\mu} = 0{,}5(\mu^j + \mu^{j+1})$. Si $G = G_1$ es una región formada por rectángulos, para

$$\bar{\mu} = 0{,}5(\mu^j + \mu^{j+1}) - 0{,}25\tau L_2(\mu^{j+1} - \mu^j)$$

el método longitudinal-transversal tiene una exactitud de $O(\tau^2 + |h|^2)$.

El esquema (11)—(12) no se puede generalizar formalmente al caso de tres variables espaciales x_1, x_2, x_3. Un esquema así es inestable.

Un método universal, aplicable a la resolución de la ecuación de la conducción del calor con coeficientes variables, y aun discontinuos, en una región arbitraria G de cualquier dimensión, es el método unidimensional local. Este se basa en el concepto de

aproximación sumaria de un esquema. Sea dada la ecuación (7). Buscaremos su solución aproximada v^{j+1} para $t = t_{j+1}$ sucesivamente (para $\alpha = 1, 2, \ldots, p$), resolviendo las ecuaciones unidimensionales de la conducción del calor

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha, \quad t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}, \quad \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f, \ \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{18}$$

con las condiciones $v^j_{(\alpha)} = v^{j+1}_{(\alpha-1)}$, $\alpha = 2, \ldots, p$, $v^j_{(1)} = v^j$ y las condiciones de contorno naturales. La solución de este problema, que escribiremos convencionalmente en la forma $L_1 \to L_2 \to \ldots \to L_p$, es $v^{j+1} = v^{j+1}_{(p)}$. Conociendo $v^0 = u_0(x)$, se halla v^{j+1}.

Cada ecuación, de número α, la sustituimos por un esquema de dos capas y seis puntos, con densidad σ_α $\left(\text{en este caso, será } \frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} \approx \frac{v^{j+1}_{(\alpha)} - v^j_{(\alpha)}}{\tau},\ L_\alpha \sim \Lambda_\alpha,\ f_\alpha \sim \varphi_\alpha\right)$, del tipo

$$\frac{v^{j+1}_{(\alpha)} - v^j_{(\alpha)}}{\tau} = \Lambda_\alpha [\sigma_\alpha v^{j+1}_{(\alpha)} + (1 - \sigma_\alpha) v^j_{(\alpha)}] + \varphi_\alpha.$$

Teniendo en cuenta que $v^j_{(\alpha)} = v^{j+1}_{(\alpha-1)}$, sustituyendo v por y y omitiendo el subíndice $j + 1$, se obtiene una sucesión de esquemas para las ecuaciones unidimensionales de la conducción del calor (esquemas unidimensionales), que llamaremos esquema unidimensional local y lo escribiremos convencionalmente en la forma $\Lambda_1^{(\sigma_1)} \to \Lambda_2^{(\sigma_2)} \to \ldots \to \Lambda_p^{(\sigma_p)}$. Escribamos el sistema local homogéneo para el caso $\sigma_\alpha = 1$ $(\Lambda_1^{(1)} \to \Lambda_2^{(1)} \to \ldots \to \Lambda_p^{(1)})$:

$$\frac{y_{(\alpha)} - y_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_\alpha y_{(\alpha)} + \varphi_\alpha, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \tag{19}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad y_{(0)} = y^j, \quad y_{(p)} = y^{j+1}.$$

Aquí es $\Lambda_\alpha y = (a_\alpha (x, t^*)\, y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}$, $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha (x, t^*)$, donde t^* es un valor cualquiera de t en el segmento $t_j \leqslant t \leqslant t_{j+1}$, por ejemplo, $t^* = t_{j+1}$. Los segundos miembros φ_α se escogen de forma que sea $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_p = f(x, t^*) + O(|h|^2 + \tau)$, por ejemplo, $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{p-1} = 0$, $\varphi_p = f$.

Formulemos las condiciones de contorno para $y_{(\alpha)}$. Sea G una región p-dimensional en el espacio $x = (x_1, \ldots, x_p)$ y Γ, su frontera. Construyamos, en forma análoga al § 3, p. 2, la malla

$\bar{\omega}_h$ en $G + \Gamma$. Tomemos un punto arbitrario $x \in \overset{\circ}{\omega}_h$ y tracemos por éste la recta C_α, paralela al eje Ox_α. Consideremos el caso más simple, cuando C_α corta a Γ en dos puntos, P_α^+ y P_α^-. El conjunto de todos los puntos P_α^- y P_α^+ se denotará por γ_h^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$. Si $G = G_0 = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ es un rectángulo, entonces γ_h^α está formado por los nudos $(i_1h_1; i_2h_2)$, que se hallan en los lados $x_\alpha = 0$ $(i_\alpha = 0)$ y $x_\alpha = l_\alpha$ $(i_\alpha = N_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$. Las condiciones de contorno para $y_{(\alpha)}$ se dan, evidentemente, sólo en $\gamma_h^{(\alpha)}$:

$$y_{(\alpha)} = \mu(x, t^*) \quad \text{para} \quad x \in \gamma_h^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p. \tag{20}$$

En el momento inicial $t = 0$, se da la condición

$$y(x, 0) = u_0(x). \tag{21}$$

Las condiciones (19)—(21) determinan unívocamente y^j para todo $j = 1, 2, \ldots$ y $x \in \omega_h$. Para hallar $y_{(\alpha)}$, se obtiene la ecuación $y_{(\alpha)} - \tau\Lambda y_{(\alpha)} = F_\alpha = y_{(\alpha-1)} + \tau\varphi_\alpha$, con las condiciones de contorno (20). Este problema de diferencias se resuelve por el método del deslizamiento, a lo largo de las filas o de las columnas.

El esquema (19) aproxima la ecuación (7) en sentido sumario: el error de aproximación ψ para el esquema unidimensional local es la suma de los errores de aproximación ψ_α en la solución $u = u(x, t)$ para los esquemas unidimensionales (19) de número α:

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha = O(|h|^2 + \tau), \text{ aunque todos los } \psi_\alpha = O(1). \tag{22}$$

El esquema (19) es incondicionalmente estable y converge uniformemente:

$$\max_{\omega_h} |y^j - u^j| = O(|h|^2 + \tau). \tag{23}$$

En el caso de dos dimensiones ($p = 2$), el esquema (19) tiene la forma

$$\frac{1}{\tau}(y_{(1)} - y^j) = \Lambda_1 y_{(1)} + \varphi_1, \quad \frac{1}{\tau}(y^{j+1} - y_{(1)}) = \Lambda_2 y^{j+1} + \varphi_2,$$

puesto que $y_{(0)} = y^j$, $y_{(2)} = y^{j+1}$.

En el esquema (19), no todas las direcciones son iguales. El sistema simetrizado unidimensional local

$$0{,}5\Lambda_1^{(1)} \to 0{,}5\Lambda_2^{(1)} \to \ldots \to 0{,}5\Lambda_p^{(1)} \to 0{,}5\Lambda_p^{(1)} \to \ldots$$
$$\ldots \to 0{,}5\Lambda_2^{(1)} \to 0{,}5\Lambda_1^{(1)},$$

como demuestran los experimentos numéricos, tiene mayor exactitud, en comparación con el esquema (19) con paso $0{,}5\tau$.

Se pueden escribir varios esquemas simétricos con segundo orden de exactitud en τ. Resulta ser que el esquema (11)—(12) también es un esquema simétrico unidimensional local del tipo

$$0{,}5\Lambda_2^{(0)} \to 0{,}5\Lambda_1^{(1)} \to 0{,}5\Lambda_1^{(0)} \to 0{,}5\Lambda_2^{(1)},$$

para

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0{,}5\bar{f}, \quad \varphi_3 = 0{,}5\bar{f}, \quad \varphi_4 = 0.$$

Esto puede comprobarse si se eliminan $y_{(1)}$ e $y_{(3)}$ (sumando las ecuaciones primera y segunda y la tercera y cuarta) y se denota $y_{(2)} = y^{j+1/2}$.

Escribamos uno de los esquemas simétricos unidimensionales locales con $\psi = O(|h|^2 + \tau^2)$ para tres dimensiones ($p = 3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$):

$$0{,}5\Lambda_1^{(0)} + 0{,}5\Lambda_2^{(0,5)} \to \Lambda_3^{(0,5)} \to 0{,}5\Lambda_2^{(0,5)} \to 0{,}5\Lambda_1^{(1)}. \tag{24}$$

Este esquema, estudiado por N. V. Friázinov, es una generalización del esquema (11)—(12) al caso tridimensional.

No es difícil escribir un sistema unidimensional local para la ecuación cuasilineal

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + f(u). \tag{25}$$

Es suficiente sustituir cada sistema unidimensional (19) por cualquiera de los esquemas estudiados en el § 2, p. 12, para las ecuaciones unidimensionales:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + f_\alpha(u), \quad \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha(u) = f(u). \tag{26}$$

Así, por ejemplo, para el caso bidimensional $p = 2$, es suficiente en (19), sustituir $\Lambda_1 y_{(1)}$ y $\Lambda_2 y^{j+1}$ por las expresiones ($y^{j+1} = y_{(2)}$ para $p = 2$)

$$\Lambda_1 y_{(1)} = (a_1(y_{(1)})\, y_{(1)\bar{x}_1})_{\hat{x}_1}, \quad \Lambda_2 y^{j+1} = \left(a_2\left(y^{j+1}\right) y^{j+1}_{\bar{x}_2}\right)_{\hat{x}_2}, \tag{27}$$

$$a_1(y) = k_1\left(\frac{y_{i_1-1} + y}{2}\right), \quad a_2(y) = k_2\left(\frac{y_{i_2-1} + y}{2}\right)$$

y hacer $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = f(y_{(1)})$.

En una malla uniforme, $\Lambda_\alpha y$ tiene, evidentemente, la forma ($\alpha = 1, 2$)

$$\Lambda_\alpha y = \frac{1}{h_\alpha^2}\left[(a_\alpha(y))_{i_\alpha+1}(y_{i_\alpha+1} - y) - a_\alpha(y)(y - y_{i_\alpha-1})\right]. \tag{28}$$

Para la determinación de $y_{(1)}$ e y^{j+1}, se obtienen problemas no lineales de tres puntos, los cuales se resuelven, en forma análoga al p. 12, § 2, por el método iterativo, con utilización de las fórmulas de deslizamiento para cada iteración. Si se hace en (27) $a_1 = a_1(y^j)$ y $a_2 = a_2(y_{(1)})$, se obtienen problemas lineales de contorno para la determinación de $y_{(1)}$ e y^{j+1}, los cuales se resuelven directamente mediante el deslizamiento por las filas y por las columnas respectivamente.

Expondremos dos ejemplos.

Ejemplo 1. Cálculo de una onda térmica bidimensional. Consideremos la ecuación bidimensional de la conducción del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(u)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(u)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right),$$

$$k_\alpha(u) = \varkappa_\alpha u^{\sigma_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{29}$$

con parámetros $\sigma_1 = 4$, $\varkappa_1 = 4$, $\sigma_2 = 2$, $\varkappa_2 = 0{,}25$ y utilicemos, para el cálculo, la solución exacta

$$u(x_1, x_2, t) = \begin{cases} 0{,}5\sqrt{-1 + \sqrt{1 + 16(t - x_1 - 2x_2)}} \\ \qquad\qquad \text{para } t \geqslant x_1 + 2x_2, \\ 0 \qquad\qquad \text{para } t \leqslant x_1 + 2x_2. \end{cases} \tag{30}$$

La malla es grosera: $h_1 = h_2 = 1$; el número de nudos es $N_1 \cdot N_2 = 30 \cdot 20 = 600$. De la solución se tomaron los valores iniciales, es decir, $u(x_1, x_2, 0) \equiv 0$ y las condiciones de contorno en las rectas $x_1 = 0$, $x_1 = 30$, $x_2 = 0$ y $x_2 = 20$.

Los cálculos se efectuaron por el esquema unidimensional local (19) con los operadores Λ_1 y Λ_2, determinados por las fórmulas (27): a) con paso $\tau = 0{,}2$; b) con paso $\tau = 1{,}0$; c) con paso $\tau = 2{,}0$. Ciertos resultados, para $t = 30$, se dibujaron en la fig. 92, donde las cruces indican los resultados de la variante c); los puntos, los de la variante a); las líneas continuas representan la solución analítica[1]).

Ejemplo 2. Cálculo del problema sobre el cambio de fase (problema de Stephan). Supongamos que se tienen dos fases 1,2, con coeficientes de la capacidad calorífica $c_1(u)$, $c_2(u)$ y de conducti-

[1]) Véase la referencia de la nota al pie de la pág. 670.

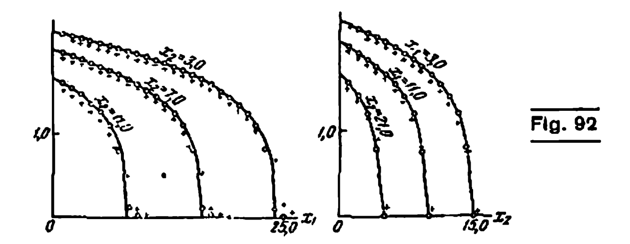


Fig. 92

vidad térmica $k_1(u)$, $k_2(u)$. En cada fase, la temperatura $u(x, t)$ satisface a la ecuación de la conducción del calor

$$c_s(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_s(u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + f(x, t), \quad s = 1, 2, \tag{31}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_p), \quad p = 1, 2, 3,$$

donde $f(x, t)$ es la densidad de las fuentes térmicas. En la frontera de separación de las fases, la temperatura $u(x, t) = u^*$ es constante e igual a la temperatura u^* de su cambio de fase; los flujos térmicos son discontinuos y su diferencia es igual a λv, siendo λ el calor del cambio de fase y v, la velocidad del frente de frontera de las fases. En el caso unidimensional, las condiciones en la frontera $x = \xi(t)$ de separación de las fases tienen la forma

$$\begin{gathered} u(\xi + 0, t) = u(\xi - 0, t) = u^*, \\ k_1 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\xi+0} - k_2 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\xi-0} = \lambda \frac{d\xi}{dt}, \end{gathered} \tag{32}$$

si en la fase 1 es $u < u^*$ y en la 2, $u > u^*$.

Introduciendo la función δ de Dirac, escribamos la ecuación (31) en la forma

$$(c(u) + \lambda\delta(u - u^*))\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + f, \tag{33}$$

$$c = \begin{cases} c_1, & u < u^*, \\ c_2, & u > u^*, \end{cases} \qquad k = \begin{cases} k_1, & u < u^* \\ k_2, & u > u^*. \end{cases}$$

Las condiciones en la frontera de las fases (en particular, las condiciones (32) para $p = 1$), se deducen de la ecuación (33).

Para resolver el problema de Stephan, se aplica el método de la "suavización": la función δ se sustituye, aproximadamente, por la función imagen $\delta(u - u^*, \Delta)$, diferente de cero sólo en el intervalo $(u^* - \Delta, u^* + \Delta)$ y que satisface a la condición de normalización

$$\int_{u^*-\Delta}^{u^*+\Delta} \delta(u - u^*, \Delta)\, du = 1.$$

Introduciendo la capacidad calorífica efectiva

$$\tilde{c}(u) = c(u) + \lambda\delta(u - u^*, \Delta)$$

y el coeficiente efectivo $\tilde{k}(u)$, que coincide con $k_1(u)$ para $u < u^* - \Delta$ y con $k_2(u)$ para $u > u^* + \Delta$, se obtiene, para la determinación de u, la ecuación cuasilineal de la conducción del calor

$$\tilde{c}(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\tilde{k}(u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + f \qquad (34)$$

con las condiciones de contorno correspondientes en la frontera Γ de la región G, en la cual se busca la solución.

Como la "disipación" se efectúa con respecto a la temperatura, ésta es aplicable para un número cualquiera de dimensiones y de fases.

Para la solución de la ecuación (34), se aplica el esquema unidimensional local (19), (27).

Obsérvese que $\delta(u - u^*, \Delta)$ se elige de modo que $\tilde{c}(u)$ tenga, en las proximidades de $u = u^*$, la forma más sencilla posible: "escalones", parábolas, etc.

Fueron obtenidas las soluciones numéricas de los siguientes problemas, que poseen soluciones analíticas exactas[1]):

1) problema con frente plano oblicuo (fig. 93);

2) problema con simetría axial, en el cual la frontera de las fases es una circunferencia (fig. 94).

La resolución de estos problemas se efectuó en el sistema de coordenadas rectangulares. Los resultados del cálculo se muestran en las figs. 93 y 94. Las líneas continuas son las fronteras de separación de las fases, las cruces, los puntos calculados, en los cuales $u = u^*$.

---

[1]) Véase A. A. Samarsky, B. D. Moiséienko, *Esquema económico de cálculo «de parte a parte» para el problema multidimensional de Stephan*, Rev. de cálculo numérico y Física matem., t. 5, № 5 (1965); véase también B. M. Budak, E. N. Soloviova, A. B. Usponski, *Método de diferencias con suavización de los coeficientes para la resolución del problema de Stephan*, ibid.

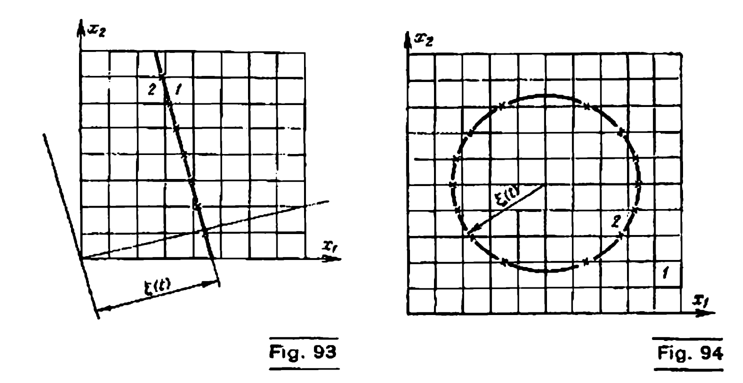


Fig. 93

Fig. 94

3. Métodos iterativos de direcciones variables para la resolución del problema en diferencias de Dirichlet. La solución de la ecuación de la conducción del calor $\partial u/\partial t = \Delta u$, con condiciones de contorno homogéneas, tiende a cero cuando $t \to \infty$ (véase el cap. III y el VI) y, por consiguiente, la solución del problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x), \quad x \in G, \quad t > 0, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x), \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

con segundo miembro y valores de contorno que no dependen de t (con inhomogeneidades estacionarias) tiende, cuando $t \to \infty$, a la solución del problema de Dirichlet

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in G, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x). \tag{35}$$

Esta misma propiedad la poseen también las soluciones de los problemas en diferencias (33), que corresponden a la ecuación de la conducción del calor. Por esto, los esquemas de diferencias para la ecuación de la conducción del calor se utilizan como métodos iterativos para la resolución aproximada del problema en diferencias de Dirichlet

$$\Lambda v = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad v|_{\gamma_h} = \mu(x), \tag{36}$$

estudiado en el § 3.

El método de iteración simple del § 3, p. 5, es el esquema explícito (6) para la ecuación de la conducción del calor (1) (para $f = f(x)$), con paso fijo $\tau = 0{,}25h^2$ (en el caso en que $G = G_0$ es un rectángulo y $h_1 = h_2 = h$). Aquí y^j es la iteración del número j, e $y(x, 0) = u_0(x)$, la aproximación inicial. En el § 3 fue demostrado, que el número de iteraciones es $s_0 = s_0(\varepsilon) =$

$= O\left(\frac{1}{h^2}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$. El esquema longitudinal-transversal (11)—(12) (esquema de direcciones variables), exige un número mucho menor de iteraciones. Sustituyendo en (11)—(12) $0{,}5\tau$ por τ, j por s (cfr. § 3, p. 5), se obtiene el esquema iterativo para el problema (36):

$$y^{s+1/2} - \tau\Lambda_1 y^{s+1/2} = F^s, \quad y^{s+1/2}|_{\gamma_h} = \mu(x),$$

$$y^{s+1} - \tau\Lambda_2 y^{s+1} = F^{s+1/2}, \quad y^{s+1}|_{\gamma_h} = \mu(x), \tag{37}$$

$$F^s = y^s + \tau\Lambda_2 y^s + \tau f, \quad F^{s+1/2} = y^{s+1/2} + \tau\Lambda_1 y^{s+1/2} + \tau f, \quad y^0 = y_0(x). \tag{38}$$

Aquí s es el número de la iteración ($s = 0, 1, 2, \ldots, s_0$) e $y^{s+1/2}$ es el valor intermedio (subiteración). Como $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, para hallar $y^{s+1/2}$ se aplica el deslizamiento por las filas y para y^{s+1}, por las columnas. El parámetro τ, en general, depende del número de la iteración ($\tau = \tau_{s+1}$) y se escoge de modo que el número de iteraciones $s_0 = s_0(\varepsilon)$ sea mínimo. Si $G = G_0$ ($0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha$) es un rectángulo, para acelerar la convergencia por el esquema (37), con $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$, se utiliza un conjunto cíclico de parámetros $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n_0}$, por ejemplo, $\tau_{s+1} = q\tau_s$, $\tau_{s+kn_0} = \tau_s$, $s = 1, 2, \ldots, n_0$, $k = 1, 2, \ldots, k_0$, $0 < q < 1$. Por el esquema (37) se repite k_0 veces el ciclo de n_0 iteraciones, con parámetros $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n_0}$, eligiéndose los parámetros τ_1, q, n_0, k_0 de la condición de que $s_0 = n_0 k_0$ sea mínimo. Aquí resulta ser que $s_0 = n_0 k_0 = O\left(\ln\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$[1].

Para el esquema de exactitud $O(|h|^4)$ para $p = 2, 3$, también se puede indicar un conjunto de parámetros τ_1, q, n_0, k_0, para el cual se tiene que $s_0 = O\left(\ln\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$. La elección de los parámetros óptimos $\tau_1, \ldots, \tau_{n_0}$, para los cuales s_0 tiene un valor mínimo, es un problema difícil. Este está resuelto sólo para $p = 2$, $G = G_0$. Para regiones de forma más compleja, se utiliza el esquema (37), con parámetro τ constante. Si, por ejemplo, $G = G_1$ es una región formada por rectángulos de lados paralelos

---

[1]) Véase D. W. Peaceman H. H. Rachford, *On the numerical Solution of parabolic and elliptic differential equation*, J. Soc. Industr. and Appl. Math., t. 3, № 1, págs. 28—41 (1955); E. G. Diákonov, *Sobre ciertos métodos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones en diferencias, que surgen al resolver, por el método de las mallas, las ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico*. En la colección «Métodos de cálculo y Programación», III, ed. de la MGU (Universidad Estatal de Moscú), 1965.

a los ejes coordenados, τ se escoge de la condición del mínimo de la función[1])

$$\chi(\tau)=\frac{(1-\varkappa_1)(1-\varkappa_2)}{(1+\varkappa_1)(1+\varkappa_2)}, \tag{39}$$

$$\varkappa_\alpha=\frac{2\tau\delta_\alpha}{1+\tau^2\delta_\alpha\Delta_\alpha},\quad \delta_\alpha=\frac{8}{D_\alpha^2},\quad \Delta_\alpha=\frac{4}{h_\alpha^2},\quad \alpha=1,2,$$

donde D_α es el diámetro de la región G_t con respecto al eje Ox_α. Se puede indicar un valor más grosero

$$\tau=\frac{hD}{4\sqrt{2}},\ \text{donde}\ h=\min(h_1, h_2),\ D=\max(D_1, D_2). \tag{40}$$

Aquí se tiene que $s_0 \geqslant O\left(\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$, puesto que $\rho=\frac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi=\frac{h\sqrt{2}}{D}$. Si la malla $\bar\omega_h$ es irregular, en (90) hay que hacer

$$h=\min_{\alpha,\,\bar\omega_h}\sqrt{h_\alpha h_{\alpha,\,i_\alpha+1}}.$$

El método (37), con parámetro constante τ, es aplicable también al caso de regiones de forma más compleja, así como también a las ecuaciones elípticas con coeficientes variables.

El esquema longitudinal-transversal (37)—(38) es aplicable sólo a dos dimensiones. Es equivalente a éste, en cuanto al número de iteraciones, el sistema de cálculo corriente, aplicable a cualquier número de dimensiones y a regiones de forma arbitraria. Este se puede escribir en la forma (37)—(38), si se hace, formalmente:

$$\Lambda_1 y=-\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{1}{h_\alpha}y_{\bar x_\alpha},\quad \Lambda_2 y=\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{1}{h_\alpha}y_{x_\alpha}, \tag{41}$$

donde

$$y_{\bar x_\alpha}=\frac{y-y_{i_\alpha-1}}{h_\alpha},\quad y_{x_\alpha}=\frac{y_{i_\alpha+1}-y}{h_\alpha}.$$

El parámetro τ, para $p=2$, se expresa mediante la fórmula (40). Para determinar $y^{s+1/2}$ o y^{s+1}, en el caso de dos dimensiones, tenemos las fórmulas

$$y^{s+1/2}=A\{\gamma_1 y_{i_1-1}^{s+1/2}+\gamma_2 y_{i_2-1}^{s+1/2}+F^s\},\quad y^{s+1/2}|_{\gamma_h}=\mu(x),\quad \gamma_1=\frac{\tau}{h_1^2}, \tag{42}$$

[1]) Véase A. A. Samarsky, *Ciertos problemas de la teoría de los esquemas de diferencias*, Rev. de cálculo numérico y Física matem., t. 6, № 4 (1966).

$$y^{s+1}=A\{\gamma_1 y^{s+1}_{i_1+1}+\gamma_2 y^{s+1}_{i_2+1}+F^{s+1/2}\},\ y^{s+1}|_{\gamma_h}=\mu(x),\ \gamma_2=\frac{\tau}{h_2^2}, \tag{43}$$

donde F^s y $F^{s+1/2}$ se dan por las fórmulas (38), (41), $A=1/(1+\gamma_1+\gamma_2)$.

Sea $G=G_0=(0\leqslant x_1\leqslant l_1,\ 0\leqslant x_2\leqslant l_2)$. El cálculo de $y^{s+1/2}$ comienza a partir del ángulo inferior izquierdo (0, 0) y se efectúa o bien por las filas, o bien por las columnas. El cálculo de y^{s+1} comienza a partir del ángulo superior derecho (l_1, l_2) y se efectúa por las filas o por las columnas. En efecto, el valor en el nudo (h_1, h_2) se halla directamente por la fórmula (42), puesto que $y^{s+1/2}(h_1, 0)=\mu(h_1, 0)$ e $y^{s+1/2}(0, h_2)=\mu(0, h_2)$ son conocidos. Conociendo $y^{s+1/2}(h_1, h_2)$, se puede hallar $y^{s+1/2}(h_1, 2h_2)$, o bien $y^{s+1/2}(2h_1, h_2)$, etc. De este modo, $y^{s+1/2}$ e y^{s+1} se hallan en todos los nudos $x\in\omega_h$, a partir de las fórmulas de recurrencia (42), (43) efectuando un número de operaciones proporcional a la cantidad de nudos. El número de iteraciones es una magnitud de orden $O\left(\frac{1}{h}\ln\frac{1}{h}\right)$. Esta apreciación se mantiene válida también para $p>2$ dimensiones, si $\tau=\frac{hD}{2p\sqrt{2}}$.

Consideremos el problema de Dirichlet para la ecuación elíptica con coeficientes constantes

$$Lu=\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)=-f(x),\ x\in G,\ u|_\Gamma=\mu(x),$$

donde

$$0<c_1\leqslant k_\alpha(x)\leqslant c_2.$$

Le pondremos en correspondencia el problema en diferencias

$$\tilde{\Lambda}v=\sum_{\alpha=1}^{p}\tilde{\Lambda}_\alpha v=-f(x),\ x\in\omega_h,\ v|_{\gamma_h}=\mu(x),\ \tilde{\Lambda}_\alpha v=(a_\alpha(x)v_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}.$$

Para la resolución de este problema, se puede utilizar el esquema de dos parámetros

$$y^{s+1/2}-\tau\Lambda_1 y^{s+1/2}=F^s,\ y^{s+1}-\tau\Lambda_2 y^{s+1}=y^{s+1/2},$$

$$F^s=y^s-\tau\Lambda y^s+\tau^2\Lambda_1\Lambda_2 y^s+\omega\tilde{\Lambda}y^s+\omega f,\ \Lambda y=\sum_{\alpha=1}^{p}y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha},$$

donde Λ_1 y Λ_2 se determinan según las fórmulas (41). Si $G=G_1\omega_h$ es uniforme con respecto a x_α, entonces $\tau=2/\sqrt{\delta\Delta}$, $\omega=2c_1\tau(1+\sqrt{\eta})\Big/\left(1+\frac{c_1}{c_2}\sqrt{\eta}\right)$,

$\eta=\frac{\delta}{\Delta}$, $\delta=8\sum\limits_{\alpha=1}^{p}\frac{1}{D_\alpha^2}$, $\Delta=4\sum\limits_{\alpha=1}^{p}\frac{1}{h_\alpha^2}$. Este esquema es aplicable también a una región G más compleja, si la malla no es muy pequeña en las proximidades de la frontera ($h_\alpha\gg qh_0$, $q>0$ no depende de h_0, $\delta\approx 4p/D^2$, $\Delta\approx 4p/h_0^2$, para τ y ω véase más arriba). En este caso, será $\tilde{\Lambda}_\alpha v=(a_\alpha v_{\bar{x}_\alpha})_{\hat{x}_\alpha}$, y en (41) hay que cambiar h_α por $\hbar_\alpha=0{,}5(h_\alpha+h_{\alpha,i_\alpha+1})$.

COMPLEMENTO II

FUNCIONES ESPECIALES

---

1. Introducción. El método de separación de las variables para las ecuaciones en derivadas parciales, conduce al problema de Sturm-Liouville. Para las ecuaciones con coeficientes constantes y condiciones de frontera de primera especie, que fueron estudiadas en los capítulos II, III, V, se obtiene el problema de valores propios, o problema de Sturm-Liouville:

hallar los valores de λ, para los cuales la ecuación homogénea $\Delta v + \lambda v = 0$ tenga soluciones no triviales $v(P) \not\equiv 0$ (funciones propias) en la región T, con la condición homogénea $v|_{\Sigma} = 0$ en la frontera Σ.

Si T es el segmento $0 \leqslant x \leqslant l$, el rectángulo $(0 \leqslant x \leqslant l_1, 0 \leqslant y \leqslant l_2)$ o el paralelepípedo $(0 \leqslant x \leqslant l_1, 0 \leqslant y \leqslant l_2, 0 \leqslant \leqslant z \leqslant l_3)$, las funciones propias $v_n(P)$ se expresan mediante las funciones trigonométricas.

Si T es un círculo, un cilindro o una esfera, para la determinación de las funciones propias se introducen nuevas funciones especiales: las funciones cilíndricas y esféricas.

Consideremos casos aislados.

1. *Círculo* $0 \leqslant r \leqslant r_0$. En las coordenadas polares (r, φ), será

$$\Delta_2 v + \lambda v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0, \qquad 0 < r < r_0,$$

$$v|_{r=r_0} = 0, \qquad v \not\equiv 0. \tag{1}$$

Buscaremos la función v en la forma $v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Sustituyamos $v = R\Phi$ en la ecuación y separemos las variables:

$$\frac{r(rR')' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu, \quad \text{donde} \quad \mu = \text{const.}$$

De aquí se deduce que

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0,$$

$$\frac{1}{r}(rR')' + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0, \quad R(r_0) = 0.$$

En virtud de la uniformidad de la solución, $\Phi(\varphi)$ debe ser una función periódica, es decir, $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Esta condición nos da $\mu = n^2$, donde n es un entero. Haciendo $x = \sqrt{\lambda}\, r$, se obtiene la ecuación de las funciones cilíndricas, o ecuación de Bessel de n-ésimo orden:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0,$$

$$\text{o bien} \quad y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \tag{2}$$

siendo $R(r) = y(\sqrt{\lambda}r)$. Para $n = 0$, se obtiene la ecuación de Bessel de orden nulo

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + y = 0, \quad \text{o bien} \quad y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0,$$

que corresponde al caso de las soluciones del problema (1) que poseen simetría axial.

Las soluciones de la ecuación (2) son llamadas funciones cilíndricas. A la ecuación (2) conducen también los problemas para la ecuación de Laplace y la ecuación ondulatoria, en el caso en que la región T sea un cilindro circular.

2. *Esfera* $0 \leqslant r \leqslant r_0$. Consideremos el problema de Sturm-Liouville

$$\Delta v + \lambda v = 0, \quad 0 < r < r_0, \quad v|_{r=r_0} = 0. \tag{3}$$

En coordenadas esféricas, será

$$\Delta v = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}v,$$

$$\Delta_{\theta,\varphi}v = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}. \tag{4}$$

Hagamos $v = R(r)\,w(\theta, \varphi)$ y efectuemos la separación de las variables:

$$\frac{(r^2R')' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Delta_{\theta,\varphi}w}{w} = \mu,$$

de donde se deduce que

$$\Delta_{\theta,\varphi} w + \mu w = 0, \qquad (5)$$

$$\frac{1}{r^2}(r^2 R')' + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right) R = 0, \quad R(r_0) = 0. \qquad (6)$$

La sustitución $x = \sqrt{\lambda} r$, $y = R/\sqrt{x}$ reduce (6) a la ecuación de Bessel

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0, \quad \nu^2 = \mu - \frac{1}{4}.$$

Para la función $w(\theta, \varphi)$, definida en la esfera, hemos obtenido la ecuación (5), la cual, para $\mu = n(n+1)$, tiene solución acotada (funciones esféricas). De esta manera, al separar las variables para el operador de Laplace en el sistema de coordenadas esféricas, se obtienen funciones esféricas. En el caso particular, en el que $w = w(\theta)$ no depende de φ, la ecuación (5) toma la forma

$$\frac{d}{ds}\left((1 - s^2)\frac{dw}{ds}\right) + \mu w = 0, \text{ donde } s = \cos\theta, \ -1 \leqslant s \leqslant 1. \qquad (7)$$

Esta es la ecuación de Legendre, que tiene, para $\mu = n(n+1)$, solución acotada (polinomios de Legendre). Las funciones esféricas se expresan mediante los polinomios de Legendre y las funciones trigonométricas.

En la mecánica cuántica se encuentran con frecuencia los polinomios de Chebishov—Hermite y Chebishov—Laguerre.

2. Ecuación general de la teoría de las funciones especiales. Las ecuaciones para las funciones especiales más sencillas se pueden escribir en la forma

$$Ly + \lambda\rho(x) y = 0, \quad a < x < b, \quad \rho(x) > 0, \qquad (8)$$

$$Ly = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x) y, \quad k(x) \geqslant 0, \quad q(x) \geqslant 0.$$

El problema de contorno más simple $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(l) = 0$, que corresponde a $a = 0$, $b = l$, $q = 0$, $k = \rho = \text{const}$, determina las funciones trigonométricas. Consideremos las ecuaciones para otras funciones especiales.

1) La ecuación de Bessel (2), o bien $(xy')' + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0$, corresponde a $k(x) = x$, $\rho(x) = x$, $q(x) = \frac{n^2}{x}$, $a = 0$, $b = r_0$.

2) Para $k(x) = 1 - x^2$, $\rho = 1$, $q = 0$, $a = -1$, $b = 1$, se obtiene la ecuación de Legendre

$$[(1 - x^2)\, y']' + \lambda y = 0. \tag{9}$$

3) La ecuación de las funciones adjuntas de Legendre

$$[(1 - x^2)\, y']' - \frac{m^2}{1 - x^2}\, y + \lambda y = 0 \tag{10}$$

corresponde a $k(x) = 1 - x^2$, $q(x) = \frac{m^2}{1 - x^2}$, $\rho = 1$, $a = -1$, $b = 1$.

4) La ecuación de Chebishov—Hermite

$$(e^{-x^2} y')' + \lambda e^{-x^2} y = 0, \text{ o bien } y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{11}$$

corresponde a $k(x) = e^{-x^2}$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, $a = -\infty$, $b = \infty$.

5) La ecuación de Chebishov—Laguerre

$$(xe^{-x} y')' + \lambda e^{-x} y = 0, \text{ o bien } y'' + (1 - x)\, y' + \lambda y = 0 \tag{12}$$

corresponde a $k(x) = xe^{-x}$, $q = 0$, $\rho = e^{-x}$, $a = 0$, $b = \infty$.

La particularidad característica de las ecuaciones indicadas, es la anulación del coeficiente $k(x)$ por lo menos en uno de los extremos del intervalo (a, b). Esta propiedad de $k(x)$, como se demostrará más abajo, juega un papel importante para el planteamiento de los problemas de contorno para la ecuación (8).

Estudiemos el comportamiento de las soluciones de esta ecuación en las proximidades del punto singular, en el cual $k(x)$ se anula.

3. Comportamiento de las soluciones en un entorno de $x = a$, *si $k(a) = 0$*. Supondremos que: 1) $k(x) > 0$ para $a < x < b$; 2) $k(x) = (x - a)\,\varphi(x)$, donde $\varphi(x)$ es una función continua y $\varphi(a) \neq 0$, es decir, $k(x)$ tiene en el punto $x = a$ un cero de primer orden.

Si en la ecuación (8) se sustituye $q(x) - \lambda\rho(x)$ por la función $q(x)$, todos los resultados obtenidos más abajo para la ecuación

$$Ly = (k(x)\, y')' - q(x)\, y = 0,\ a < x < b,\ k(x) = (x - a)\,\varphi(x), \tag{8'}$$

mantendrán su validez también para la (8).

Lema 1. Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación (8'), donde $k(x) = (x - a)\,\varphi(x)$, $\varphi(a) \neq 0$. Si $y_1(x)$ tiene límite finito para $x \to a$ ($y_1(a) \neq \infty$), entonces $y_2(x)$ se vuelve infinito para $x = a$.

Obsérvese que $y_2(x)$ se puede representar, mediante la solución linealmente independiente $y_1(x)$, en forma de cuadratura.

En efecto, tenemos que $y_2 Ly_1 - y_1 Ly_2 = [k(y_2 y_1' - y_1 y_2')]' = 0$. De aquí se obtiene que el wronskiano de las funciones y_1 e y_2 es igual a $y_1 y_2' - y_2 y_1' = C/k(x)$, donde $C \neq 0$, puesto que, por hipótesis, y_1 e y_2 son linealmente independientes. Después de dividir entre y_1^2, se obtiene $(y_2/y_1)' = C/ky_1^2$. La integración de esta ecuación desde x_0 hasta x nos da

$$y_2(x) = y_1(x)\left[\int_{x_0}^{x} \frac{C\,d\alpha}{k(\alpha)\,y_1^2(\alpha)} + C_1\right], \qquad a < x \leqslant x_0,$$

donde C_1 es la constante de integración, que depende de la elección de x_0.

La función $y_1(x)$ es finita para $x = a$ y se puede representar en la forma $y_1(x) = (x-a)^n z_1(x)$, donde $n \geqslant 0$, $z_1(x)$ es una función continua y $z_1(a) \neq 0$. Escojamos x_0 de forma que sea $z_1(x) \neq 0$ para $a < x \leqslant x_0$; entonces será

$$y_2(x) = (x-a)^n z_1(x)\left\{C_1 - \int_{x}^{x_0} \frac{C\,d\alpha}{(\alpha - a)^{2n+1}\,\varphi(\alpha)\,z_1^2(\alpha)}\right\},$$
$$a < x \leqslant x_0.$$

Apliquemos el teorema del valor medio para la integral

$$y_2(x) = (x-a)^n z_1(x)\left\{C_1 - A\int_{x}^{x_0} \frac{d\alpha}{(\alpha - a)^{2n+1}}\right\},$$

$$A = \frac{C}{\varphi(\bar{x})\,z_1^2(\bar{x})}, \qquad x \leqslant \bar{x} \leqslant x_0.$$

Después de calcular la integral, se obtiene:

$$y_2(x) = \begin{cases} (x-a)^n z_1(x)\left[C_1 + A\dfrac{(x_0-a)^{-2n} - (x-a)^{-2n}}{2n}\right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{para } n > 0, \\ y_1(x)\left[C_1 - A\ln\dfrac{x_0-a}{x-a}\right] \qquad \text{para } n = 0. \end{cases} \tag{13}$$

De esta forma, en ambos casos será $\lim\limits_{x \to a} y_2(x) = \pm\infty$, lo cual demuestra el lema 1. En particular, de (13) se sigue que

$$\lim_{x \to a}(x-a)^n y_2(x) = \text{const} \quad \text{para} \quad n > 0,$$

$$\lim_{x \to a}\frac{y_2(x)}{\ln(x-a)} = \text{const} \quad \text{para} \quad n = 0.$$

Queda así demostrado el

Lema 2. Supongamos que se cumplen las condiciones del lema 1. Si $y_1(a) \neq 0$, entonces $y_2(x)$ tiene una singularidad logarítmica en $x = a$, es decir,

$$y_2(x) \sim \ln(x - a) \quad \text{para} \quad y_1(a) \neq 0.$$

Si $y_1(x)$ tiene un cero de n-ésimo orden para $x = a$, $y_1(x) = (x - a)^n z_1(x)$, $z_1(a) \neq 0$, $n > 0$, entonces $y_2(x)$ tiene en $x = a$ un polo de orden n:

$$y_2(x) \sim (x - a)^{-n}, \quad \text{si} \quad y_1(x) \sim (x - a)^n.$$

Lema 3. Supongamos que $k(x) = (x - a)\varphi(x)$, $\varphi(a) \neq 0$ y que el coeficiente $q(x)$ está acotado o tiende a ∞ cuando $x \to a$. Entonces, para la solución $y_1(x)$ acotada en el punto $x = a$ ($\lim\limits_{x \to a} y_1(x) = y_1(a)$, $|y_1(a)| < \infty$) de la ecuación (8'), se cumple la condición

$$\lim_{x \to a} k(x) y_1'(x) = 0. \tag{14}$$

1. Supongamos que $q(x)$ está acotada cuando $x \to a$. Fijemos cierto valor x_1, $a < x_1 < b$ e integremos (8') desde x hasta x_1, $a < x < x_1$:

$$k(x) y_1'(x) = k(x_1) y_1'(x_1) - \int_x^{x_1} q(\alpha) y_1(\alpha)\, d\alpha = Q(x). \tag{15}$$

De aquí se deduce que $Q(x)$ es una función continua en el segmento $a \leqslant x \leqslant x_1$. Pasando al límite cuando $x \to a$, se aprecia que existe el límite $C = \lim\limits_{x \to a} k(x) y_1'(x)$, $C = Q(a)$. Mostremos que $C = 0$. Para esto, expresemos $y_1(x)$ mediante $Q(x)$:

$$y_1(x) = y_1(x_2) - \int_x^{x_2} [Q(\alpha)/k(\alpha)]\, d\alpha = y_1(x_2) -$$
$$- \int_x^{x_2} [Q(\alpha)/(\alpha - a)\varphi(\alpha)]\, d\alpha, \quad a < x \leqslant x_2, \tag{16}$$

donde $a < x \leqslant x_2 \leqslant x_1$. De aquí se observa que $y_1(x)$ puede estar acotada en el punto $x = a$ sólo con la condición $Q(a) = C = 0$.

2. Supongamos que $q(x)$ no está acotada para $x \to a$:

$$q(x) \to \infty \quad \text{para} \quad x \to a.$$

Entonces, será $q(x) > 0$ en cierto intervalo $a < x \leqslant x_1$. En este intervalo, la función $y_1(x)$ es monótona[1]) y, por esto, conserva su signo en cierto intervalo $a < x \leqslant x_2$, $x_2 \leqslant x_1$ y tiene límite $y_1(a)$ cuando $x \to a$. Por esto, $Q(x)$ es una función monótona en el intervalo $a < x \leqslant x_2$, que tiene límite finito o infinito cuando $x \to a$.

De la fórmula (15) se deduce, como antes, que $y_1(x) \to \infty$, si $Q(a) \neq 0$. El lema 3 queda demostrado.

4. Planteamiento de los problemas de contorno. Los lemas demostrados conducen a la siguiente conclusión con respecto al planteamiento de los problemas de contorno para las ecuaciones

$$Ly + \lambda\rho y = 0 \quad \text{y} \quad Ly = 0 \tag{17}$$

en el intervalo (a, b), si $k(x)$ se anula en uno o en ambos extremos de éste. Si $k(a) = 0$, para $x = a$ impondremos la acotación de la función propia $(|y(a)| < \infty)$. Aquí no se pide que ésta tome un valor dado.

La solución general de las ecuaciones (17) es $y = Ay_1(x) + By_2(x)$, donde y_1 e y_2 son funciones arbitrarias linealmente independientes de la ecuación (17), A y B, constantes arbitrarias. Si $y_1(x)$ está acotada para $x = a$, entonces $y_2(x)$ se hace infinita cuando $x \to a$ (lema 1). Por esto, de la condición

$$|y(a)| < \infty \tag{18}$$

se deduce de inmediato que $B = 0$. Llamaremos a (18) condición natural de acotación, por cuanto ésta es consecuencia de la estructura del operador L.

Se llega así al siguiente problema de contorno:

hallar los valores propios y las funciones propias $y(x) \not\equiv 0$ de la ecuación

$$(ky')' - qy + \lambda\rho y = 0, \qquad a < x < b, \tag{19}$$

donde $k(x) > 0$ para $x > a$ y $k(a) = 0$, con la condición natural de acotación en el punto $x = a$

$$|y(b)| < \infty \tag{18}$$

---

[1]) En efecto, haciendo $\xi = \int_x^{x_1} d\alpha/k(\alpha)$, se puede escribir la ecuación $Ly = 0$ en la forma $y''_{\xi\xi} - kqy = 0$, $k > 0$, $q > 0$. De aquí se deduce que y no puede tener valores máximos positivos (mínimos negativos) dentro del intervalo $a < x < x_1$, puesto que en el punto correspondiente sería $y'' \leqslant 0$ $(y'' \geqslant 0)$ e $y > 0$ $(y < 0)$, lo cual es imposible.

y la condición habitual, por ejemplo, de primera especie

$$y(b) = 0 \quad \text{en el extremo} \quad x = b. \tag{20}$$

Si $k(a) = 0$ y $k(b) = 0$ (por ejemplo, para la ecuación de Legendre), se plantea en ambos extremos del intervalo (a, b) la condición de acotación ($|y(a)| < \infty$, $|y(b)| < \infty$).

Si el intervalo (a, b) es infinito, como, por ejemplo, $a = -\infty$, $b = \infty$ para la ecuación de Chebishov—Hermite o $a = 0$, $b = \infty$ para la ecuación de Chebishov—Laguerre, en este caso para $a = -\infty$ o para $b = \infty$ la condición de acotación (18) se sustituye por la imposición más débil: la solución no debe crecer en el infinito más rápidamente que una potencia finita de x.

Formulemos las propiedades generales de las funciones propias y de los valores propios del problema de contorno (18)—(20) planteado.

1. Existe un conjunto infinito de valores propios $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots$, a los cuales les corresponden las funciones propias $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, ...

2. Para $q \geqslant 0$, todos los valores propios no son negativos:

$$\lambda_n \geqslant 0.$$

3. Las funciones propias $y_n(x)$ e $y_m(x)$, que corresponden a distintos valores propios λ_n y λ_m, son ortogonales entre sí, con densidad $\rho(x)$:

$$(y_n, y_m) = \int_a^b y_n(x)\, y_m(x)\, \rho(x)\, dx = 0.$$

4. Tiene lugar el teorema del desarrollo: la función $f(x)$ se desarrolla en una serie que converge absoluta y uniformemente en las funciones propias $y_n(x)$ del problema dado:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \qquad f_n = \frac{(f, y_n)}{(y_n, y_n)},$$

si: 1) $f(x)$ tiene derivada primera continua y derivada segunda continua a trozos para $a < x < b$;
2) $f(x)$ satisface a las condiciones de frontera del problema; además, si $k(a) = 0$, entonces

$$|f(a)| < \infty \quad \text{para} \quad 0 \leqslant q(a) < \infty,$$
$$f(a) = 0 \quad \text{para} \quad q(x) \xrightarrow[x \to a]{} \infty.$$

Las propiedades 2 y 3 se demuestran igual que en el cap. II, § 3, mediante las fórmulas de Green. Aquí se aplica la acotación de la función $y_n(x)$ en el punto $x = a$, así como también la igualdad $\lim_{x \to a} k(x)\, y_n'(x) = 0$, que se sigue del lema 3, en virtud

de lo cual los términos de la fórmula de Green que corresponden a $x = a$ se anulan. La demostración de las propiedades 1 y 4 se efectúa habitualmente mediante la teoría de las ecuaciones integrales. Para que 1 y 4 tengan lugar, es suficiente que $k(x)$ sea continua y $q(x)$, o bien continua, o bien tenga la forma $q_1(x)/(x-a)$, siendo $q_1(x)$ una función continua. Para las clases de funciones especiales que se estudian más abajo, estas condiciones se cumplen.

El problema de contorno (10)—(20) es equivalente a la ecuación integral

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

donde $K(x, \xi) = G(x, \xi)\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}$, $\varphi(x) = \sqrt{\rho(x)}\,y(x)$, y $G(x, \xi)$ es la función de Green para el operador L. En el caso en que $k(a)=0$, $k(b)\neq 0$, $y(b)=0$, la función de Green se define como sigue:

1. $G(x, \xi)$ es una función continua en x para ξ fijo, $a \leqslant \xi \leqslant b$.
2. La derivada primera $\dfrac{dG}{dx}$ sufre un salto para $x=\xi$:

$$k(x)\frac{dG}{dx}(x, \xi)\Big|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = k(\xi)\,[G'(\xi+0, \xi) - G'(\xi-0, \xi)] = -1.$$

3. $L_x G(x, \xi)=0$ en todos los puntos $a<x<b$, a excepción del $x=\xi$.
4. $G(x, \xi)$ satisface a las condiciones de frontera

$$|G(a, \xi)| < \infty, \quad G(b, \xi)=0.$$

De la definición de $G(x, \xi)$ se deduce que $G(x, \xi)>0$ para $x, \xi \in (a, b)$, $G(x, \xi)=G(\xi, x)$ (simetría).

Pasemos al estudio de funciones especiales concretas: las funciones cilíndricas y las esféricas, así como también los polinomios de Chebishov—Hermite y Chebishov—Laguerre.

I PARTE

FUNCIONES CILINDRICAS

§ 1. FUNCIONES CILINDRICAS

En la resolución de muchos problemas de la física matemática, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \\ &\text{o bien} \\ &\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

llamada *ecuación de las funciones cilíndricas de n-ésimo orden*. Esta ecuación se llama con frecuencia también *ecuación de Bessel de n-ésimo orden*.

Los problemas característicos (véanse los capítulos V, VI y VII) que conducen a las funciones cilíndricas, son los problemas de contorno para la ecuación

$$\Delta u + k^2 u = 0 \tag{2}$$

fuera o dentro de un círculo (fuera o dentro de un cilindro, en el caso de tres variables independientes). Introduciendo las coordenadas polares, se transforma la ecuación (2) a la siguiente:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0. \tag{3}$$

Haciendo $u = R\Phi$ y separando las variables en (3), se obtiene:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right)R = 0$$

y

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0.$$

La condición de periodicidad para $\Phi(\varphi)$ nos da $\lambda = n^2$, donde n es un entero. Haciendo luego $x = kr$, se obtiene la ecuación de las funciones cilíndricas

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad R(r) = y(kr),$$

o bien

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0.$$

En el caso de las soluciones de la ecuación ondulatoria (2) que poseen simetría radial (cilíndrica), se obtiene la ecuación de Bessel de orden nulo

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + y = 0, \quad \text{o bien} \quad y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0.$$

1. Series de potencias. La ecuación de Bessel de ν-ésimo orden

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0, \tag{1}$$

o bien

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \qquad (1')$$

(ν es un número real o complejo arbitrario, cuya parte real se puede considerar no negativa), tiene el punto singular $x = 0$. Por esto, la solución $y(x)$ debe buscarse en forma de la serie de potencias[1])

$$y(x) = x^{\sigma}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots), \qquad (4)$$

que comienza a partir de x^{σ}, donde σ es el exponente característico, que hay que determinar. Sustituyendo la serie (4) en la ecuación (1') e igualando a cero los coeficientes de x^{σ}, $x^{\sigma+1}$, ..., $x^{\sigma+k}$, se obtiene la ecuación para la determinación de σ y el sistema de ecuaciones para hallar los coeficientes a_k:

$$\left.\begin{array}{r} a_0(\sigma^2 - \nu^2) = 0, \\ a_1[(\sigma + 1)^2 - \nu^2] = 0, \\ a_2[(\sigma + 2)^2 - \nu^2] + a_0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k[(\sigma + k)^2 - \nu^2] + a_{k-2} = 0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

$$(k = 2, 3, \ldots).$$

Como se puede suponer que $a_0 \neq 0$, de la primera ecuación (5) se deduce que

$$\sigma^2 - \nu^2 = 0, \quad \text{o bien} \quad \sigma = \pm\nu. \qquad (6)$$

Escribamos la ecuación k-ésima de (5), para $k > 1$, en la forma

$$(\sigma + k + \nu)(\sigma + k - \nu) a_k + a_{k-2} = 0. \qquad (7)$$

Dejemos, por ahora, de lado el caso en que $\sigma + \nu$ ó $\sigma - \nu$ (y — 2ν ó 2ν respectivamente) son iguales a un entero negativo.

Entonces, de la segunda ecuación de (5) tendremos, en virtud de (6):

$$a_1 = 0. \qquad (8)$$

La ecuación (7) nos da la fórmula de recurrencia para la determinación de a_k mediante a_{k-2}:

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(\sigma + k + \nu)(\sigma + k - \nu)}. \qquad (9)$$

---

[1]) Véase V. V. Stepanov, *Curso de Ecuaciones Diferenciales*, 1959; L. E. Elsgoltz, *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*, ed. «Mir», Moscú, 1969.

De aquí y de (8) se concluye que todos los coeficientes impares son iguales a cero. Si ν es real, entonces para $\sigma = -\nu$ la solución se hace infinita en el punto $x = 0$.

Detengámonos en el caso $\sigma = \nu$. A partir de (9) se deduce que cada coeficiente par se puede expresar mediante el precedente:

$$a_{2m} = -a_{2m-2}\frac{1}{2^2 m(m+\nu)}. \tag{10}$$

La aplicación sucesiva de esta fórmula permite hallar la expresión de a_{2m} partiendo de a_0:

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m!\,(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+m)}. \tag{11}$$

Apliquemos la propiedad de la función gamma $\Gamma(s)$[1])

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = \dots = s(s-1)\dots(s-n)\,\Gamma(s-n).$$

Si s es un entero, entonces

$$\Gamma(s+1) = s!$$

El coeficiente a_0 era, hasta ahora, arbitrario. Si $\nu \neq -n$, siendo $n > 0$ un entero, haciendo

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \tag{12}$$

y utilizando la propiedad indicada más arriba de la función gamma, se obtiene:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}. \tag{13}$$

Si, en cambio, es $\sigma = -\nu$, $\nu \neq n$, donde $n > 0$ es un entero, haciendo

$$a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}, \tag{12'}$$

se obtiene:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k-\nu}\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-\nu+1)}. \tag{14}$$

---

[1]) Véase B. M. Budak, S. V. Fomín, *Integrales Múltiples y Series*, ed. «Naúka», 1965 (ó P. Puig Adam, *Cálculo Integral*, Madrid, 1961, pág. 121 — (*N. de la Red.*).

La serie (3), que corresponde a $\sigma = \nu \geqslant 0$, con los coeficientes (12) y (13),

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \qquad (15)$$

se llama *función de Bessel de primera especie de ν-ésimo orden*. La serie

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}, \qquad (16)$$

que corresponde a $\sigma = -\nu$, representa la segunda solución de la ecuación (1), linealmente independiente de la $J_\nu(x)$. Las series (15) y (16), evidentemente, convergen en todo el plano x.

Consideremos ahora el caso en que ν es igual a la mitad de un número entero.

Sea $\nu^2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, donde $n \geqslant 0$ es un entero. Haciendo $\sigma = n + \frac{1}{2}$ en las fórmulas (5), se obtiene:

$$2(n+1)\,a_1 = 0,$$

$$k(k+2n+1)\,a_k + a_{k-2} = 0 \qquad (k > 1),$$

de manera que

$$a_1 = 0,$$

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(k+2n+1)}.$$

Aplicando sucesivamente esta fórmula, se halla:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2.4\ldots(2k)(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2k+1)}.$$

Haciendo aquí $\nu = n + \frac{1}{2}$, se obtiene la fórmula (11).

Haciendo después

$$a_0 = \frac{1}{2^{n+\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)},$$

se obtiene la fórmula (13).

Sea

$$\sigma = -n - \frac{1}{2};$$

entonces, las ecuaciones (5) para a_k toman la forma

$$a_1 \cdot 1(1-2n) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k(k-1-2n)\,a_k + a_{k-2} = 0$$

Igual que antes, todos los coeficientes $a_1, a_3, \ldots, a_{2n-1}$ son iguales a cero, pero para a_{2n+1} se obtiene la ecuación $0 \cdot a_{2n+1} + a_{2n-1} = 0$, la cual se satisface para todo valor de a_{2n+1}. Para $k > n$, el coeficiente a_{2k+1} se determina mediante la igualdad

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^{k-n} a_{2n+1}}{(2n+3)(2n+5)\ldots 2\cdot 4\ldots(2k-2n)}.$$

Haciendo $a_{2n+1} = 0$, $a_0 = \frac{1}{2^{-n-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}$, se obtiene la fórmula (14).

De este modo, para $\nu = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)$ no es necesario ningún cambio en la definición de la función $J_\nu(x)$. Las fórmulas (15) y (16) conservan su validez.

Obsérvese que la fórmula (16) determina a $J_{-\nu}(x)$ sólo para valores fraccionarios de ν, puesto que la determinación de a_0 mediante las fórmulas (12), para $\nu = -n$ enteros negativos, no tiene sentido. Definamos (16), por continuidad, para los valores enteros $\nu = n$. Por cuanto $\Gamma(k-n+1) = \pm\infty$ para $k \leqslant k_0 = n-1$, la suma (16) comienza, de hecho, a partir del valor $k = k_0 + 1 = n$. Cambiando en (16) el subíndice de la suma $k = n + k'$, se obtiene:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{\Gamma(k'+n+1)\Gamma(k'+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+n} =$$

$$= (-1)^n J_n(x),$$

puesto que la suma comienza a partir de $k' = 0$.

Escribamos, como ejemplo, las series para las funciones de Bessel de primera especie de órdenes nulo ($n = 0$) y primero ($n = 1$):

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \ldots$$

Las funciones $J_0(x)$ y $J_1(x)$ se encuentran con mayor frecuencia en las aplicaciones y existen tablas detalladas de éstas[1]). En la pág. 816 se exponen las gráficas de $J_0(x)$ y $J_1(x)$.

[1]) En todas las tablas de las funciones especiales siempre hay tablas de las funciones de Bessel de primera especie (véase, por ejemplo, Janke—Emde—Lösch, *Tafeln Höherer Funktionen*, Stuttgart, 1960, donde $J_0(x)$ y $J_1(x)$ se dan con cinco cifras para valores de x en el intervalo de 0 a 14, 9).

Las funciones $J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ (n es un entero) son, como hemos visto, linealmente dependientes:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Para valores no enteros de ν, las funciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$ son linealmente independientes. En efecto, $J_\nu(x)$ tiene un cero, y $J_{-\nu}(x)$, un polo de orden ν-ésimo, en el punto $x = 0$. De este modo, si ν no es un entero, toda solución $y_\nu(x)$ de la ecuación de Bessel (1) se puede representar en forma de combinación lineal de las funciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$:

$$y_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

Si se busca la solución acotada de la ecuación (1), entonces será $C_2 = 0$ e

$$y_\nu(x) = C_1 J_\nu(x).$$

2. **Fórmulas de recurrencia.** Establezcamos las siguientes relaciones que existen entre las funciones de Bessel de primera especie de distintos órdenes:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \tag{17}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right) = x^\nu J_{\nu-1}(x). \tag{18}$$

Estas fórmulas se verifican por derivación directa de las series de las funciones de Bessel. Mostremos, por ejemplo, la justeza de la relación (17):

$$x^\nu \frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) = x^\nu \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} 2k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu-1)}.$$

En la última suma, k varía desde 1 hasta ∞. Tomemos el nuevo índice de la suma $l = k - 1$, el cual variará desde 0 hasta ∞. Entonces, tendremos:

$$x^\nu \frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right) =$$

$$= -\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{\Gamma(l+1)\,\Gamma[l+(\nu+1)+1]} \left(\frac{x}{2}\right)^{[2l+(\nu+1)]} =$$

$$= -J_{\nu+1}(x).$$

lo cual demuestra la fórmula (17). La justeza de la (18) se demuestra análogamente.

Obsérvense dos casos particulares importantes de las fórmulas de recurrencia. Para $\nu = 0$, de (17) se deduce:

$$J_0'(x) = -J_1(x). \tag{19}$$

Para el caso $\nu = 1$, la fórmula (18) nos da:

$$[xJ_1(x)]' = xJ_0(x), \quad \text{o bien} \quad xJ_1(x) = \int_0^x \xi J_0(\xi)\, d\xi. \tag{20}$$

Establezcamos las fórmulas de recurrencia que relacionan $J_\nu(x)$, $J_{\nu+1}(x)$ y $J_{\nu-1}(x)$. Efectuando la derivación en (17) y (18), se obtiene:

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x} = -J_\nu'(x) = J_{\nu+1}(x), \tag{17'}$$

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x} + J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x). \tag{18'}$$

Sumando y restando (17') y (18'), se hallan las fórmulas de recurrencia

$$\left.\begin{aligned} J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) &= \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) \\ J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) &= -2J_\nu'(x). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Mediante las fórmulas (21) se puede calcular $J_{\nu+1}(x)$, si se conocen $J_\nu(x)$ y $J_{\nu-1}(x)$:

$$J_{\nu+1}(x) = -J_{\nu-1}(x) + \frac{2\nu J_\nu(x)}{x}. \tag{21'}$$

3. Funciones de orden semientero. Hallemos las expresiones para las funciones $J_{\frac{1}{2}}(x)$ y $J_{-\frac{1}{2}}(x)$:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\left(\frac{3}{2} + m\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2m} \tag{22}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2m} \tag{23}$$

Aplicando la propiedad de la función gamma, se halla:

$$\left.\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)&=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2m+1)}{2^{m+1}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),\\ \Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)&=\frac{1\cdot 3\ldots(2m-1)}{2^{m}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

donde

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Sustituyendo (24) en las fórmulas (22) y (23), se obtiene:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m+1},\tag{25}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}.\tag{26}$$

No es difícil observar que la suma en (25) representa el desarrollo de sen x, y en (26), el de cos x, en potencias de x. De este modo, $J_{\frac{1}{2}}(x)$ y $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ se expresan mediante funciones elementales:

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}x,\tag{27}$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x.\tag{26}$$

Consideremos las funciones $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, donde n es un entero. De (21′) se deduce que

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\frac{1}{x}J_{\frac{1}{2}}(x)-J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\cos x+\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{-\operatorname{sen}x+\frac{3}{x}\left[\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\operatorname{sen}(x-\pi)\left(1-\frac{3}{x^2}\right)+\cos(x-\pi)\cdot\frac{3}{x}\right\}.$$

Aplicando sucesivamente la fórmula (21'), se halla:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\operatorname{sen}\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)P_n\left(\frac{1}{x}\right)+\right.$$
$$\left.+\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \qquad (29)$$

donde $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ es un polinomio de n-ésima potencia con respecto a $\frac{1}{x}$ y $Q_n\left(\frac{1}{x}\right)$, uno de potencia $n-1$. Obsérvese que $P_n(0) = 1$, $Q_n(0) = 0$.

4. **Orden asintótico de las funciones cilíndricas.** Las soluciones de la ecuación de Bessel se llaman frecuentemente funciones cilíndricas. En el p. 1 fue definida una de las funciones cilíndricas: la función de Bessel.

La propiedad fundamental de las funciones cilíndricas es su comportamiento cuando $x \to 0$ y $x \to \infty$ (comportamiento asintótico). Más abajo se demostrará que *cualquier función cilíndrica se determina unívocamente por su asintótica cuando $x \to \infty$, más precisamente, por el término principal del desarrollo asintótico.*

Demostremos que cualquier función cilíndrica real se puede representar, para x grandes, en la forma

$$y_\nu(x)=\gamma_\infty\frac{\operatorname{sen}(x+\delta_\infty)}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \qquad (30)$$

donde $\gamma_\infty \neq 0$, δ_∞ son ciertas constantes, y $O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ indica términos de orden no menor que $\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Haciendo

$$y=\frac{v(x)}{\sqrt{x}}, \qquad (31)$$

calculando las derivadas $y' = -0{,}5x^{-3/2}v + x^{-1/2}v'$, $y'' = x^{-1/2}v'' - x^{-3/2}v' + 0{,}75x^{-5/2}v$ y sustituyéndolas en la ecuación de Bessel, se obtiene la ecuación

$$v''+\left(1-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)v=0, \qquad (32)$$

que es un caso particular de la ecuación

$$v'' + (1 + \rho(x))\, v = 0, \tag{33}$$

donde

$$\rho(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{34}$$

Hagamos

$$v = \gamma \operatorname{sen}(x + \delta), \quad v' = \gamma \cos(x + \delta), \tag{35}$$

donde $\gamma(x)$ y $\delta(x)$ son ciertas funciones de x, siendo $\gamma(x) \neq 0$ en ningún punto, pues en caso contrario v y v' se anularían simultáneamente y $v(x)$ sería idénticamente nula. Aplicando (35) y (33), tendremos:

$$v' = \gamma \cos(x + \delta) = \gamma' \operatorname{sen}(x + \delta) + \gamma(\delta' + 1)\cos(x + \delta),$$

$$v'' = \gamma' \cos(x + \delta) - \gamma(\delta' + 1)\operatorname{sen}(x + \delta) = \\ = -(1 + \rho)\,\gamma \operatorname{sen}(x + \delta).$$

De aquí se halla que

$$\delta' = \rho \operatorname{sen}^2(x + \delta) = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \tag{36}$$

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = -\frac{\delta'}{\operatorname{tg}(x + \delta)} = \rho \operatorname{sen}(x + \delta)\cos(x + \delta) = O\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{37}$$

Mostremos que existen los valores límite de γ y δ cuando $x \to \infty$.

Efectivamente,

$$\delta(x) = \delta(a) - \int_x^a \delta'(s)\, ds,$$

de donde, en virtud de (36), se deduce que existe el límite $\lim\limits_{a \to \infty} \delta(a) = \delta_\infty$ y que

$$\delta(x) = \delta_\infty + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{38}$$

Análogamente, de (37) se halla que

$$\gamma(x) = \gamma_\infty\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \tag{39}$$

siendo $\gamma_\infty \neq 0$.

De este modo, toda solución de la ecuación (33) y, por consiguiente, de la (32), tiene, cuando $x \to \infty$, la forma

$$v(x) = \gamma_\infty \operatorname{sen}(x + \delta_\infty) + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{40}$$

Con esto queda establecida la justeza de la fórmula asintótica (30) para cualquier función cilíndrica $y_\nu(x)$.

Demostremos que no pueden existir dos funciones cilíndricas diferentes con igual asintótica. En efecto, sean $\bar{y}_\nu(x)$ e $\bar{\bar{y}}_\nu(x)$ dos funciones cilíndricas diferentes, para las cuales

$$\bar{\gamma}_\infty = \bar{\bar{\gamma}}_\infty, \quad \bar{\delta}_\infty = \bar{\bar{\delta}}_\infty. \tag{41}$$

La diferencia de estas funciones

$$\tilde{y}_\nu(x) = \bar{y}_\nu(x) - \bar{\bar{y}}_\nu(x) \not\equiv 0$$

es también una función cilíndrica, que tiene, en virtud de (41), la asintótica siguiente:

$$\tilde{y}_\nu(x) = O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Sin embargo, esto contradice a la fórmula (30) para cualquier función cilíndrica $\tilde{y}_\nu(x)$.

Por lo tanto, debe ser $\tilde{y}_\nu(x) \equiv 0$ e $\bar{y}_\nu(x) \equiv \bar{\bar{y}}_\nu(x)$.

La solución de la ecuación de Bessel puede ser también la función compleja $Z_\nu(x) = \bar{Z}_\nu(x) + i\bar{\bar{Z}}_\nu(x)$, donde $\bar{Z}_\nu(x)$ y $\bar{\bar{Z}}_\nu(x)$ son funciones cilíndricas reales. De lo expuesto más arriba se deduce que una función cilíndrica compleja también se determina unívocamente por su asintótica cuando $x \to \infty$.

Los valores de las constantes γ_∞ y δ_∞ se determinan mediante investigaciones complementarias, las cuales dan

$$\gamma_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{para todo } \nu.$$

En el § 1, p. 3, para $\nu = n + \frac{1}{2}$ fue obtenida la fórmula (29), de la cual se deduce que

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{42}$$

En el § 4 se dará una deducción de la fórmula asintótica para la función $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \tag{43}$$

donde ν es un número cualquiera no negativo ($\nu \geqslant 0$). La fórmula (43) tiene lugar también para ν arbitrario, de forma que

$$J_{-\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{44}$$

§ 2. PROBLEMAS DE CONTORNO PARA LA ECUACION DE BESSEL

El problema de contorno más sencillo para la ecuación de Bessel en el segmento $[0, r_0]$ está relacionado con el problema de las oscilaciones propias de la membrana circular:

$$\Delta_2 v + \lambda v = 0, \quad \Delta_2 v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}, \tag{1}$$

$$v(r, \varphi)|_{r=r_0} = 0, \quad |v(r, \varphi)| < \infty, \quad v(r, \varphi) \not\equiv 0. \tag{2}$$

Haciendo $v(r, \varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)$ y separando las variables (véase la Introducción), se obtiene:

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\nu}{r^2}\right)R = 0, \quad R(r_0) = 0. \tag{4}$$

La condición de periodicidad para $\Phi(\varphi)$ nos da $\nu = n^2$, siendo n un número entero. De esta manera, la función $R(r)$ se debe determinar de la ecuación de Bessel

$$\mathcal{L}[R] + \lambda r R = 0 \quad \left(\mathcal{L}[R] = \frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \frac{n^2}{r}R\right) \tag{5}$$

con la condición de frontera

$$R(r_0) = 0 \tag{6}$$

y la condición de frontera natural de acotación en el punto $r = 0$

$$|R(0)| < \infty. \tag{7}$$

Haciendo

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{\lambda}\, r, \\ y(x) &= R(r) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0, \quad y(x)\neq 0 \tag{9}$$

con las condiciones complementarias

$$y\,(\sqrt{\lambda}r_0)=0, \tag{10}$$

$$|\,y\,(0)\,|<\infty. \tag{11}$$

De aquí se halla que

$$y\,(x)=AJ_n\,(x). \tag{12}$$

En virtud de la condición de frontera $y\,(r_0\sqrt{\lambda})=0$, se tiene:

$$J_n\,(\mu)=0 \quad (\mu=r_0\sqrt{\lambda}). \tag{13}$$

Esta ecuación trascendente tiene un conjunto infinito de raíces reales $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_m^{(n)}, \ldots$[1]), es decir, la ecuación (1) tiene un conjunto infinito de valores propios:

$$\lambda_m^{(n)}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 \quad (m=1, 2, \ldots), \tag{14}$$

a los cuales les corresponden las funciones propias

$$R\,(r)=AJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right) \tag{15}$$

del problema de contorno (5)—(7).

Del modo de determinación de las funciones propias se observa que cualquier solución no trivial del problema de contorno considerado se da por la fórmula (15).

De la teoría general de las ecuaciones del tipo $\mathcal{L}\,[y]+\lambda\rho y=0$, consideradas más arriba (véase la Introducción), se deduce la ortogonalidad del sistema de funciones propias

$$\left\{J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\right\}$$

con densidad r:

$$\int_0^{r_0} J_n\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n)}}{r_0}r\right)J_n\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0}r\right)r\,dr=0 \quad \text{para } m_1\neq m_2. \tag{16}$$

---

[1]) En la pág. 814 se da la tabla de las raíces de la ecuación $J_0\,(\mu)=0$, en particular, la primer raíz es $\mu_1^{(0)}=2{,}4048$.

Calculemos la norma de las funciones propias $R_1(r) = J_n(\alpha_1 r)$, donde $\alpha_1 = \frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}$. De paso, se obtendrá la condición de ortogonalidad (16). Para esto, tomemos la función $R_2(r) = J_n(\alpha_2 r)$, siendo α_2 un parámetro arbitrario.

Las funciones $R_1(r)$ y $R_2(r)$ satisfacen a las ecuaciones

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_1}{dr}\right) + \left(\alpha_1^2 r - \frac{n^2}{r}\right) R_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_2}{dr}\right) + \left(\alpha_2^2 r - \frac{n^2}{r}\right) R_2 = 0,$$

siendo $R_1(r_0) = 0$; $R_2(r)$ ya no satisface a esta condición de frontera. Restando de la primera ecuación la segunda, multiplicándolas previamente por $R_2(r)$ y $R_1(r)$ respectivamente, e integrando luego con respecto a r desde 0 hasta r_0, tendremos:

$$(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\int_0^{r_0} rR_1(r)\, R_2(r)\, dr + [r(R_2R_1' - R_1R_2')]|_0^{r_0} = 0,$$

de donde se halla:

$$\int_0^{r_0} R_1R_2 r\, dr = -\frac{r_0 J_n(\alpha_2 r_0)\,\alpha_1 J_n'(\alpha_1 r_0) - r_0 J_n(\alpha_1 r_0)\,\alpha_2 J_n'(\alpha_2 r_0)}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} =$$

$$= -\frac{r_0 J_n(\alpha_2 r_0)\,\alpha_1 J_n'(\alpha_1 r_0)}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}. \quad (17)$$

Pasando al límite cuando $\alpha_2 \to \alpha_1$ y resolviendo la indeterminación en el segundo miembro, se obtiene la expresión para el cuadrado de la norma:

$$\| R_1 \|^2 = \| J_n(\alpha_1 r) \|^2 = \int_0^{r_0} rR_1^2(r)\, dr = \frac{r_0^2}{2}[J_n'(\alpha_1 r_0)]^2,$$

o bien

$$\int_0^{r_0} J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) r\, dr = \frac{r_0^2}{2}[J_n'(\mu_m^{(n)})]^2. \quad (18)$$

En particular, el cuadrado de la norma de la función $J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right)$ es igual a

$$\int_0^{r_0} J_0^2\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r\right) r\, dr = \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)}).$$

Si se hace $\alpha_2 = \frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0} \neq \alpha_1 = \frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}$, entonces de la fórmula (17) se obtiene inmediatamente la condición (16) de la ortogonalidad de las funciones de Bessel.

Existen tablas de los ceros $\mu_m^{(0)}$ de la función $J_0(\mu)$ y de los valores correspondientes $J_1(\mu_m^{(0)})$ (véase la pág. 814). Escribamos algunos primeros valores de $\mu_m^{(0)}$: $\mu_1^{(0)} = 2{,}4048$, $\mu_2^{(0)} = 5{,}5201$, $\mu_3^{(0)} = 8{,}6531$, $\mu_4^{(0)} = 11{,}7915$.

De la fórmula asintótica (42) del § 1 se deduce que al aumentar el número m del cero $\mu_m^{(n)}$, la diferencia $\mu_{m+1}^{(n)} - \mu_m^{(n)}$ debe tender a π. Esto se puede notar incluso para los valores expuestos más arriba de $\mu_m^{(0)}$ (por ejemplo, $\mu_3^{(0)} - \mu_2^{(0)} = 3{,}1330$, $\mu_4^{(0)} - \mu_3^{(0)} = 3{,}1384$, $\mu_7^{(0)} - \mu_6^{(0)} = 3{,}1405$, etc.).

En virtud de las propiedades generales de las funciones propias de los problemas de contorno (pág. 709), tiene lugar el teorema del desarrollo:

toda función $f(r)$, derivable dos veces, acotada en $r = 0$ y que se anule para $r = r_0$, se puede desarrollar en la serie que converge absoluta y uniformemente

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right),$$

donde

$$A_m = \frac{\int_0^{r_0} f(r) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r\right) r\, dr}{\|J_n\|^2},$$

$$\|J_n\|^2 = \frac{r_0^2}{2} [J_n'(\mu_m^{(n)})]^2.$$

El segundo problema de contorno para la ecuación de Bessel

$$\mathscr{L}(R) + \lambda r R = 0, \quad R(r) \not\equiv 0,$$
$$R'(r_0) = 0,$$
$$|R(0)| < \infty$$

se resuelve análogamente. Las funciones propias y los valores propios se expresarán también por las fórmulas (15) y (14), donde $\mu_m^{(n)}$ indicará la raíz m-ésima de la ecuación

$$J_n'(\mu) = 0.$$

Las funciones propias del problema son ortogonales entre sí, con densidad r (véase (16)) y el cuadrado de su norma es igual a

$$\int_0^{r_0} J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{r_0}\right) r\,dr = \frac{r_0^2}{2}\left[1 - \frac{n^2}{(\mu_m^{(n)})^2}\right] J_n^2(\mu_m^{(n)}).$$

Análogamente se resuelve también el tercer problema de contorno. En este caso, para la determinación de $\mu_m^{(n)}$ se obtiene una ecuación de la forma

$$J'_n(\mu) = hJ_n(\mu).$$

§ 3. DIFERENTES TIPOS DE FUNCIONES CILINDRICAS

1. Funciones de Hankel. Conjuntamente con las funciones de Bessel de primera especie $J_\nu(x)$, tienen gran importancia práctica otras formas especiales de las soluciones de la ecuación de Bessel. Ante todo, deben citarse aquí las *funciones de Hankel de primera y segunda especie* $H_\nu^{(1)}(x)$ y $H_\nu^{(2)}(x)$, que son soluciones complejas conjugadas de la ecuación de Bessel. Desde el punto de vista de las aplicaciones físicas, la característica fundamental de las funciones de Hankel es el comportamiento asintótico para valores grandes del argumento. Por esto, definiremos dichas funciones como las funciones cilíndricas que poseen la siguiente asintótica:

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + \ldots, \tag{1}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)} + \ldots, \tag{2}$$

donde los puntos suspensivos indican los términos de orden mayor de infinidad con respecto a $\frac{1}{x}$. Las condiciones (1) y (2) determinan unívocamente a $H_\nu^{(1)}$ y $H_\nu^{(2)}$, en virtud del p. 4 del § 1. Separando las partes real e imaginaria, representemos la función de Hankel en la forma

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \tag{3}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x), \tag{4}$$

donde las funciones

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2}[H_\nu^{(1)}(x) + H_\nu^{(2)}(x)], \tag{3'}$$

$$N_\nu(x) = \frac{1}{2i}[H_\nu^{(1)}(x) - H_\nu^{(2)}(x)] \tag{4'}$$

tienen el carácter asintótico

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots, \tag{5}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots, \tag{6}$$

lo cual se deduce de las fórmulas (1) y (2).

Como se demostrará más abajo (véase el p. 4 del § 4), la función $J_\nu(x)$, introducida aquí, es la función de Bessel de primera especie, estudiada en el § 1. La parte imaginaria $N_\nu(x)$ de la función de Hankel se llama *función de Neumann*, o *función cilíndrica de segunda especie de ν-ésimo orden*.

Las fórmulas (3) y (4) establecen la relación entre las funciones de Hankel, Bessel y Neumann, que es análoga a la relación entre la función exponencial de argumento imaginario, el seno y el coseno (fórmula de Euler). Las fórmulas asintóticas (1), (2), (5) y (6) subrayan esta analogía.

Al estudiar las soluciones de la ecuación de las oscilaciones

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}),$$

hemos visto que la amplitud $v(x, y)$ de las oscilaciones permanentes

$$u(x, y, t) = v(x, y)\,e^{i\omega t}$$

satisface a la ecuación ondulatoria

$$v_{xx} + v_{yy} + k^2 v = \Delta v + k^2 v = 0 \quad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}\right).$$

Si la solución de la ecuación ondulatoria posee simetría radial, $v(x, y) = v(r)$, entonces, como se indicó en el § 1, la función $v(kr)$ satisface a la ecuación de Bessel de orden nulo.

De esta manera, las funciones

$$H_0^{(1)}(kr)\,e^{i\omega t}=\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{i(\omega t+kr)}\frac{1}{\sqrt{i}}+\ldots\quad\left(\sqrt{i}=e^{i\frac{\pi}{4}}\right), \tag{7}$$

$$H_0^{(2)}(kr)\,e^{i\omega t}=\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{i(\omega t-kr)}\sqrt{i}+\ldots \tag{8}$$

son soluciones de la ecuación de las oscilaciones, que tienen el carácter de ondas cilíndricas. La función $H_0^{(2)}(kr)\,e^{i\omega t}$ corresponde a las ondas cilíndricas divergentes, y la $H_0^{(1)}(kr)\,e^{i\omega t}$, a las ondas convergentes[1]).

La segunda propiedad importante de las funciones cilíndricas es su comportamiento cuando $x\to 0$. En virtud del lema 1 de la Introducción, las funciones $H_\nu^{1,2}$ y N_ν se hacen infinitas cuando $x\to 0$ (puesto que $J_\nu(0)$ es finita), más exactamente, $H_0^{(1)}(x)$, $H_0^{(2)}(x)$, $N_0(x)\sim\ln\frac{1}{x}$, ya que $J_0(0)=1\neq 0$; $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$, $N_\nu(x)\sim\frac{1}{x^\nu}$ para $\nu>0$, puesto que $J_\nu(x)\sim x^\nu$ cuando $x\to 0$.

Las funciones de Hankel y Neumann de orden nulo son soluciones fundamentales de la ecuación $\Delta_2 v+k^2v=0$, puesto que éstas tienen la singularidad logarítmica necesaria cuando $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ (véase el cap. VII). Daremos (sin demostración) las expresiones exactas de los términos principales del desarrollo de estas funciones en un entorno del punto $x=0$:

$$N_0(x)=-\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{x}+\ \ldots,\qquad H_0^{(1)}(x)=-\frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{x}+\ldots,$$

$$H_0^{(2)}(x)=\frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{x}+\ldots$$

2. Funciones de Hankel y de Neumann. Como fue indicado en el p. 1, toda solución de la ecuación de Bessel de orden no entero ν se expresa mediante las funciones J_ν y $J_{-\nu}$. Establezcamos la relación entre las funciones $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$, N_ν y J_ν, $J_{-\nu}$.

Como toda solución de la ecuación de Bessel, para ν no entero, se puede representar en forma de combinación lineal de las fun-

---

[1]) Si se toma el factor de tiempo $e^{-i\omega t}$, $H_0^{(1)}(kr)\,e^{-i\omega t}$ corresponderá a las ondas divergentes, y $H_0^{(2)}(kr)\,e^{-i\omega t}$, a las convergentes.

ciones $J_\nu(x)$ y $J_{-\nu}(x)$, entonces debe ser

$$H_\nu^{(1)}(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x), \tag{9}$$

donde C_1 y C_2 son constantes que debemos determinar. Para los términos principales de los desarrollos asintóticos, evidentemente, tiene lugar una igualdad análoga:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right) + \\ + C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right). \tag{10}$$

Transformemos el argumento del segundo sumando a la forma $\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+\pi\nu\right] = \\ = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)\cos\pi\nu - \operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\pi\nu.$$

Simplificando ambos miembros de la igualdad (10) entre $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$ y aplicando la fórmula de Euler al primer miembro, se obtiene:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right) = \\ = (C_1 + C_2\cos\pi\nu)\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right) - \\ - C_2\operatorname{sen}\pi\nu\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right),$$

de donde

$$C_1 + C_2\cos\pi\nu = 1, \\ -C_2\operatorname{sen}\pi\nu = i,$$

o bien

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{i\operatorname{sen}\pi\nu}; \\ C_1 &= -\frac{\cos\pi\nu - i\operatorname{sen}\pi\nu}{i\operatorname{sen}\pi\nu} = -C_2 e^{-i\pi\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Sustituyendo (11) en (9), se halla:

$$H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{1}{i \operatorname{sen} \pi\nu} [J_\nu(x) e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)]. \qquad (12)$$

Análogamente,

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{i \operatorname{sen} \pi\nu} [J_\nu(x) e^{i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)]. \qquad (13)$$

Aplicando la fórmula (4'), que determina $N_\nu(x)$, se obtiene, de (12) y (13):

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\operatorname{sen} \pi\nu}. \qquad (14)$$

Las fórmulas (12), (13) y (14) fueron obtenidas para valores no enteros de ν. Para un valor entero $\nu = n$, las funciones de Hankel y de Neumann se pueden determinar de (12), (13) y (14) mediante el paso al límite cuando $\nu \to n$. Efectuando dicho paso al límite en estas fórmulas y resolviendo la indeterminación por la regla conocida, tendremos:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + i\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right], \qquad (12')$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - i\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right], \qquad (13')$$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n \left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right]. \qquad (14')$$

Utilizando la representación de las funciones J_ν y $J_{-\nu}$ en forma de series de potencias, se pueden obtener representaciones análogas para $N_\nu(x)$, así como también para $H_\nu^{(1)}(x)$ y $H_\nu^{(2)}(x)$.

Las fórmulas (12) y (13) se consideran comúnmente la definición analítica de las funciones de Hankel. Existen también, sin embargo, otras formas de introducir estas funciones. En el § 6 se dará la representación de las funciones de Hankel en forma de integrales de contorno.

Si $\nu = n + \frac{1}{2}$, las funciones de Hankel y de Neumann se expresan en forma finita mediante funciones elementales. En par-

ticular, para $\nu = \frac{1}{2}$, se tiene:

$$N_{\frac{1}{2}}(x) = -J_{-\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$H^{(1)}_{\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) + iN_{\frac{1}{2}}(x) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\right)},$$

$$H^{(2)}_{\frac{1}{2}}(x) = J_{\frac{1}{2}}(x) - iN_{\frac{1}{2}}(x) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - i\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}.$$

3. **Funciones de argumento imaginario.** Las funciones cilíndricas se pueden considerar no solamente para valores reales, sino también para valores complejos del argumento. En el presente punto estudiaremos las funciones cilíndricas de primera especie de argumento imaginario puro.

Sustituyendo en la serie que determina $J_\nu(x)$ el valor ix en lugar de x, se obtiene:

$$J_\nu(ix) = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = i^\nu I_\nu(x), \qquad (15)$$

donde

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \qquad (16)$$

es una función real, ligada a $J_\nu(ix)$ por la relación

$$I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix), \quad \text{o bien } I_\nu(x) = e^{-\frac{1}{2}\pi\nu i}J_\nu(ix).$$

En particular, para $\nu = 0$, se tiene:

$$I_0(x) = J_0(ix) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \qquad (17)$$

De la serie (16) se ve que $L_\nu(x)$ son funciones monótonamente crecientes, que tienen un cero de ν-ésimo orden cuando $x = 0$. Utilizando la fórmula (5), se obtiene que, para $I_\nu(x)$, debe tener

lugar la fórmula asintótica

$$I_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\, e^x \tag{18}$$

para valores grandes del argumento x.

Análogamente se introduce $I_{-\nu}(x)$. Las funciones I_ν e $I_{-\nu}$, para ν no entero, son linealmente independientes, puesto que en el punto $x = 0$, $I_\nu(x)$ $(\nu > 0)$ tiene un cero de ν-ésimo orden, e $I_{-\nu}(x)$, el polo $x^{-\nu}$. Si $\nu = n$ es un entero, entonces $I_{-n}(x) = I_n(x)$.

Las funciones cilíndricas de argumento imaginario son soluciones de la ecuación

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{19}$$

y, en particular, $I_0(x)$ satisface a la ecuación

$$y'' + \frac{1}{x} y' - y = 0. \tag{20}$$

Conjuntamente con la función $I_\nu(x)$, se estudia la $K_\nu(x)$, que se determina mediante la función de Hankel de argumento imaginario puro:

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2}\pi\nu i} H_\nu^{(1)}(ix). \tag{21}$$

$K_\nu(x)$ es una función real de x. En efecto, las fórmulas (12) y (13) nos dan:

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \pi\nu} [I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)] \quad \text{para } \nu \neq n,$$

$$K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2} \left[\left(\frac{\partial I_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} \right]. \tag{22}$$

Aplicando la expresión asintótica de $H_\nu^{(1)}$, se halla:

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} + \dots \tag{23}$$

Las fórmulas (23) y (18) muestran que $K_\nu(x)$ disminuyen exponencialmente, e $I_\nu(x)$ crecen exponencialmente cuando $x \to \infty$. De aquí se deduce la independencia lineal de estas funciones, así como también la posibilidad de representar cualquier solución

de la ecuación (19) en forma de la combinación lineal

$$y = AI_\nu(x) + BK_\nu(x).$$

En particular, si y está acotada en el infinito, será $A = 0$ e $y = BK_\nu(x)$; si, en cambio, y está acotada para $x = 0$, entonces $B = 0$ e $y = AI_\nu(x)$.

De la independencia lineal de I_ν y K_ν se deduce que $K_\nu(x)$ tiene en $x = 0$ un polo de ν-ésimo orden ($K_\nu \sim x^{-\nu}$) para $\nu \neq 0$, y una singularidad logarítmica para $\nu = 0$. En el p. 4 se demuestra que

$$K_0(x) = \ln\frac{1}{x} + \ldots \quad \text{cuando } x \to 0.$$

En la fig. 107 se exponen las gráficas de $I_0(x)$ y $K_0(x)$. A diferencia de $J_\nu(x)$ y $N_\nu(x)$, las funciones $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$ son monótonas ($I_\nu(x)$ crece y $K_\nu(x)$ decrece al aumentar x).

La mayor importancia la tiene la función

$$K_0(x) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(ix).$$

4. Función $K_0(x)$. Demostremos que para la función $K_0(x)$ es válida la siguiente representación integral:

$$K_0(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi}\, d\xi \quad (x > 0). \tag{24}$$

No es difícil comprobar que la integral

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi}\, d\xi \tag{24'}$$

satisface a la ecuación

$$\mathscr{L}(y) = y'' + \frac{1}{x} y' - y = 0. \tag{25}$$

En efecto,

$$\mathscr{L}(F) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi} \left(\operatorname{ch}^2 \xi - \frac{1}{x} \operatorname{ch} \xi - 1\right) d\xi =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi} \operatorname{sh}^2 \xi\, d\xi - \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi} \operatorname{ch} \xi\, d\xi = S_1 - S_2.$$

Integrando por partes el segundo sumando, se obtiene:

$$S_2 = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi} \operatorname{ch} \xi\, d\xi = \frac{\operatorname{sh} \xi}{x} e^{-x \operatorname{ch} \xi}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} \xi} \operatorname{sh}^2 \xi\, d\xi = S_1,$$

de donde se deduce, precisamente, que

$$\mathcal{L}(F)=0.$$

Haciendo $\operatorname{ch}\xi=\eta$, se transforma la integral (24′) para $F(x)$ como sigue:

$$F(x)=\int_1^\infty \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta^2-1}}\,d\eta.$$

Aplicando esta fórmula, se puede estudiar el comportamiento de la función $F(x)$ cuando $x\to\infty$. Efectuando una vez más el cambio de variable

$$x(\eta-1)=\xi,$$

se obtiene:

$$F(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^\infty \frac{e^{-\xi}}{\sqrt{\xi\left(\frac{\xi}{x}+2\right)}}\,d\xi=\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}F_1(x).$$

Cuando $x\to\infty$, tendremos:

$$\lim F_1(x)=\int_0^\infty \frac{e^{-\xi}}{\sqrt{2\xi}}\,d\xi=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\quad (t=\sqrt{\xi}).$$

En consecuencia, para valores grandes de x será

$$F_1(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}(1+\varepsilon),$$

donde $\varepsilon\to 0$ cuando $x\to\infty$. De aquí se obtiene la fórmula asintótica

$$E(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}+\ldots, \tag{26}$$

donde los puntos suspensivos indican los términos de orden mayor de infinidad. La función $F(x)$, introducida mediante la integral (24′), es solución de la ecuación (25), acotada en el infinito; por esto, debe ser

$$F(x)=BK_0(x).$$

La comparación de las fórmulas asintóticas para $K_0(x)$ y $F_0(x)$ demuestra que $B=1$ y, por lo tanto,

$$K_0(x)=\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\xi}\,d\xi\quad (x>0). \tag{24}$$

Estudiemos el comportamiento de la función $K_0(x)$ cuando $x\to 0$.

Representemos la integral

$$K_0(x)=F(x)=\int_1^\infty \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta^2-1}}\,d\eta$$

en la forma

$$K_0(x)=\int_x^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}\,d\lambda\quad (x\eta=\lambda).$$

Descomponiendo esta integral en tres partes:

$$K_0(x)=\int_x^A \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}+\int_x^A \frac{(e^{-\lambda}-1)\,d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}+\int_A^\infty \frac{e^{-\lambda}\,d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-x^2}},$$

donde A es cierta constante auxiliar, se observa que el primer sumando es igual a

$$\ln\frac{A+\sqrt{A^2-x^2}}{x}=-\ln x+\ldots,$$

y el segundo y tercer sumandos están acotados para $x\to 0$. De aquí se sigue que

$$K_0(x)=-\ln x+\ldots=\ln\frac{1}{x}+\ldots, \tag{27}$$

donde los puntos suspensivos indican sumandos que permanecen finitos para $x=0$. De esta manera, la función $K_0(x)$ es solución de la ecuación (25), tiene una singularidad logarítmica en el punto $x=0$ y decrece exponencialmente cuando $x\to\infty$.

El siguiente problema da la interpretación física de la función $K_0(x)$. Supongamos que en el origen de coordenadas actúa una fuente estacionaria de gas inestable de potencia Q_0. El proceso estacionario de la difusión va acompañado por la desintegración del gas y se describe por la ecuación

$$\Delta u-\varkappa^2u=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}-\varkappa^2u=0 \tag{28}$$

$$\left(\varkappa^2=\frac{\beta}{D^2}\right),$$

donde β es el coeficiente de desintegración y D, el de difusión. La función de la fuente de esta ecuación posee simetría circular y, por lo tanto, satisface a la ecuación

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right)-u=0 \qquad (x=\varkappa r);$$

además, la función de la fuente tiene una singularidad logarítmica en el origen de coordenadas y está acotada en el infinito. De aquí se deduce que la función de la fuente es proporcional a $K_0(\varkappa r)$:

$$\overline{G}=AK_0(\varkappa r). \tag{29}$$

Para determinar el factor A, apliquemos la condición de la fuente

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_\varepsilon}\left(-D\frac{\partial u}{\partial r}\right)ds=Q_0, \tag{30}$$

donde la integral del primer miembro expresa el flujo de difusión a través de la circunferencia K_ε, de radio ε, con centro en la fuente. Sustituyendo en esta condición la función $\overline{G}=AK_0(\varkappa r)$ en lugar de u y tomando en cuenta la singularidad logarítmica de $K_0(x)$ para $x=0$, se obtiene:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\int_{K_\varepsilon} D\frac{\partial\overline{G}}{\partial r}\,dS\right\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{D2\pi\varepsilon A\,\frac{1}{\varepsilon}\right\}=2\pi AD=Q_0.$$

De aquí que

$$A = \frac{Q_0}{2\pi D}$$

y

$$\bar{G} = \frac{Q_0}{2\pi D} K_0(\varkappa r). \tag{31}$$

La fórmula integral (24) para $K_0(x)$ se puede obtener partiendo de sencillos razonamientos físicos.

Analicemos el problema no estacionario de la difusión de un gas con desintegración. Supongamos que en el origen de coordenadas se halla una fuente de potencia Q_0 constante, que actúa a partir del momento $t = 0$. Supondremos que en el momento inicial $t = 0$ la concentración del gas es igual a cero en todas partes. La concentración $u(x, y, t)$ debe satisfacer a la ecuación

$$D\Delta u - \beta u = u_t \tag{32}$$

y a las condiciones complementarias correspondientes. La ecuación (32), mediante el cambio

$$u = \tilde{u} e^{-\beta t},$$

se transforma en la ecuación habitual de la difusión

$$D\Delta\tilde{u} = \tilde{u}_t,$$

para la cual la función de influencia de la fuente puntual tiene la forma

$$\tilde{G} = \frac{1}{(2\sqrt{\pi D(t-\tau)})^2} e^{-\frac{r^2}{4D(t-\tau)}} \qquad (D = a^2).$$

De este modo, la función de influencia de la fuente puntual instantánea para la ecuación (32) es igual a

$$G = \frac{Q}{(2\sqrt{\pi D(t-\tau)})^2} e^{-\frac{r^2}{4D(t-\tau)} - \beta(t-\tau)}.$$

La función de influencia de una fuente de potencia Q_0, que actúa en forma continua desde $t = 0$ hasta el momento t, se expresa por la fórmula

$$G = Q_0 \int_0^t \frac{1}{4\pi D(t-\tau)} e^{-\frac{r^2}{4D(t-\tau)} - \beta(t-\tau)} d\tau.$$

Introduciendo la nueva variable

$$\theta = t - \tau,$$

se obtiene:

$$G = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D\theta} - \beta\theta} \frac{d\theta}{\theta}.$$

La función de la fuente que corresponde al problema estacionario, se puede hallar pasando al límite cuando $t \to \infty$ en la fórmula precedente:

$$\bar{G} = \lim_{t\to\infty} G = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4D}\frac{1}{\theta} - \beta\theta} \frac{d\theta}{\theta}.$$

Transformemos esta integral mediante el cambio

$$\theta = Ce^{\xi},$$

siendo C cierta constante:

$$\bar{G} = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{r^2}{4DC} e^{-\xi} + \beta C e^{\xi}\right]} d\xi.$$

Exigiendo que se cumpla la igualdad

$$\frac{r^2}{4DC} = \beta C,$$

se halla:

$$C = \frac{r}{2\sqrt{\beta D}} \text{ y } \frac{r^2}{4DC} = \beta C = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{\beta}{D}} = \frac{\varkappa r}{2} \quad \left(\varkappa^2 = \frac{\beta}{D}\right).$$

De aquí se deduce que la función estacionaria de la fuente tiene la forma

$$\bar{G} = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varkappa r \operatorname{ch} \xi} d\xi = \frac{Q_0}{2\pi D} \int_{0}^{\infty} e^{-\varkappa r \operatorname{ch} \xi} d\xi = \frac{Q_0}{2\pi D} K_0(\varkappa r).$$

De este modo, el problema estudiado aquí conduce a la representación integral (24) para la función $K_0(x)$.

§ 4. REPRESENTACION DE LAS FUNCIONES CILINDRICAS EN FORMA DE INTEGRALES DE CONTORNO

1. Integrales de contorno. Consideremos la ecuación de las oscilaciones $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) = a^2 \Delta_2 u$ y busquemos su solución en la forma $u(x, y, t) = v(x, y) e^{i\omega t}$; para $v(x, y)$ se obtiene la ecuación $\Delta_2 v + k^2 v = 0 \left(k = \frac{\omega}{a}\right)$. Sus soluciones particulares son las funciones $v = e^{\pm ikx}$ y $v = e^{\pm iky}$: amplitudes de las ondas planas $u = e^{i(\omega t \pm kx)}$ y $u = e^{i(\omega t \pm ky)}$, que se propagan a lo largo del eje x y del y respectivamente. La onda plana que se propaga en la dirección l tendrá, evidentemente, la forma

$$v = e^{-ik(lr)} = e^{-ik(x\cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi)} = e^{-ikr\cos(\varphi-\alpha)},$$

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r \operatorname{sen}\alpha, \quad l = l(\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi).$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, en el eje y la amplitud de la onda que incide con un ángulo φ sobre el eje x, es igual a

$$v = e^{-ikr \operatorname{sen}\varphi}. \tag{1}$$

Buscaremos la solución $Z_\nu(x)$ de la ecuación de Bessel

$$L(y) = x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \tag{2}$$

en forma de superposición de ondas planas del tipo (1), considerando que $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ es complejo y denotando $kr = x$

Hagamos

$$Z_\nu(x) = \int_C K(x, \varphi)\,\Phi_\nu(\varphi)\,d\varphi = \int_C e^{-ix\,\mathrm{sen}\,\varphi}\Phi_\nu(\varphi)\,d\varphi, \tag{3}$$

donde C es cierto contorno en el plano $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, $K(x, \varphi) = e^{-ix\,\mathrm{sen}\,\varphi}$, $\Phi_\nu(\varphi)$ es un factor de fases por ahora indeterminado. Escojamos C de forma que la integral (3) converja, y $\Phi_\nu(\varphi)$ de modo que esta integral satisfaga a la ecuación de Bessel. Hallemos, primeramente, $\Phi_\nu(\varphi)$, suponiendo que la integral (3) converge y que se la puede derivar bajo el signo integral. Calculemos $L(K)$. Teniendo en cuenta que $K_\varphi = -ix\cos\varphi K$, $K_{\varphi\varphi} = ix\,\mathrm{sen}\,\varphi K - x^2\cos^2\varphi K$, $K_x = -i\,\mathrm{sen}\,\varphi K$, $K_{xx} = -\mathrm{sen}^2\,\varphi K$, se obtiene: $x^2K_{xx} + xK_x + x^2K = K(x^2\cos^2\varphi - ix\,\mathrm{sen}\,\varphi) = -K_{\varphi\varphi}$. $L(K) = -(\nu^2K + K_{\varphi\varphi})$ y, en consecuencia,

$$L(Z_\nu) = -\int_C (K_{\varphi\varphi} + \nu^2K)\,\Phi_\nu(\varphi)\,d\varphi.$$

Integremos por partes, considerando que los términos sin integrales se anulan (en el infinito, si el contorno se aleja hacia el infinito):

$$L(Z_\nu) = -\int_C \{\Phi_\nu'' + \nu^2\Phi_\nu\}\,K\,d\varphi - \int_C \frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\Phi_\nu\frac{\partial K}{\partial\varphi} - K\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial\varphi}\right\}d\varphi =$$

$$= -\int_C \{\Phi_\nu'' + \nu^2\Phi_\nu\}\,K\,d\varphi.$$

Para que sea $L(Z_\nu) = 0$, es suficiente que

$$\Phi_\nu'' + \nu^2\Phi = 0.$$

Tomemos $\Phi_\nu = e^{i\nu\varphi}$. Entonces, será $Z_\nu(x) = \int_C e^{-ix\,\mathrm{sen}\,\varphi + i\nu\varphi}\,d\varphi$.

Para la convergencia de esta integral, es suficiente que se cumpla $\mathrm{Re}\,(ix\,\mathrm{sen}\,\varphi) = \mathrm{Re}\,(ix\,\mathrm{sen}\,(\varphi_1 + i\varphi_2)) = -x\cos\varphi_1\,\mathrm{sh}\,\varphi_2 > 0$

$$(\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2).$$

Esta condición se cumplirá para $x > 0$, si

$$\varphi_2 < 0, \quad -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \varphi_1 < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

o bien $\varphi_2 > 0$,

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \varphi_1 < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4}$$

En la fig. 95 se han rayado las regiones por las que debe pasar el contorno. En calidad de C se puede tomar cualquier contorno cuyas ramas asintóticas se hallen en las regiones rayadas.

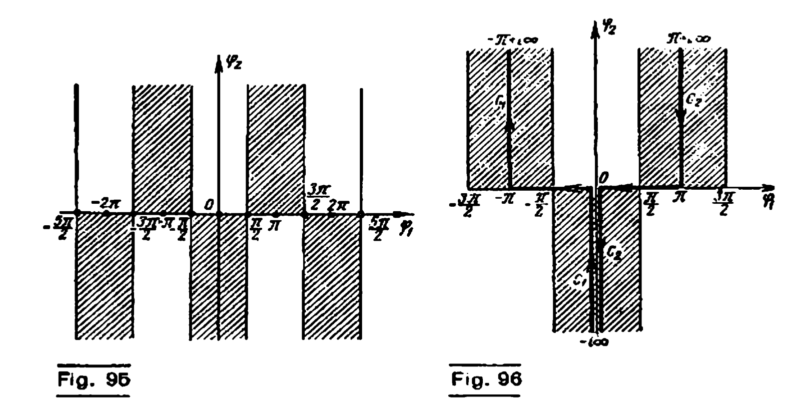


Fig. 95 Fig. 96

2. Funciones de Hankel. Tomemos dos contornos: C_1, que es el contorno formado por la semirrecta $(-i\infty, 0)$, el segmento $(0, -\pi)$ y la semirrecta $(-\pi, -\pi + i\infty)$ y el contorno $C_2 = (i\infty + +\pi, \pi) + (\pi, 0) + (0, -i\infty)$ (fig. 96). Las integrales correspondientes (3) determinan las funciones cilíndricas

$$H_\nu^{(k)}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_k} e^{-ix\,\mathrm{sen}\,\varphi + i\nu\varphi}\,d\varphi, \quad k = 1,\ 2. \tag{5}$$

En el p. 6 se demostrará que las funciones $H_\nu^{(k)}(x)$, definidas mediante las integrales de contorno (5), coinciden con las funciones de Hankel que fueron introducidas en el § 3. Para esto, será suficiente probar que las funciones (5) poseen la asintótica

$$H_\nu^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\alpha_\nu} + \ldots, \quad H_\nu^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\alpha_\nu} + \ldots,$$

$$\alpha_\nu = x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}. \tag{6}$$

Aplicando la definición (5) de las funciones de Hankel $H_\nu^{1,2}(x)$, se pueden obtener las fórmulas de recurrencia

$$H_{\nu+1}^{(k)} + H_{\nu-1}^{(k)} = \frac{2\nu}{x} H_\nu^{(k)}, \qquad H_{\nu+1}^{(k)} - H_{\nu-1}^{(k)} = -2H_\nu^{(k)\prime}(x), \quad k = 1,\ 2.$$

Deduzcamos la primera fórmula. Tomando en cuenta que $\Phi_{\nu+1} + + \Phi_{\nu-1} = 2\cos\varphi\Phi_\nu$, $\Phi_\nu = e^{i\nu\varphi}$ e integrando por partes, se

halla:

$$H_{\nu+1}^{(k)}(x)+H_{\nu-1}^{(k)}(x)=-\frac{2}{\pi}\int\limits_{C_k} e^{-ix\,\mathrm{sen}\,\varphi+i\nu\varphi}\cos\varphi\,d\varphi=$$

$$=-\frac{2\nu}{x\pi}\int\limits_{C_k} e^{-ix\,\mathrm{sen}\,\varphi+i\nu\varphi}\,d\varphi=\frac{2\nu}{x}H_\nu^{(k)}(x).$$

De (5) y de la fórmula $J_\nu(x)=\frac{1}{2}(H_\nu^{(1)}+H_\nu^{(2)})$ se puede obtener la representación en forma de una integral de contorno para la función de Bessel $J_\nu(x)$, haciendo

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2}(H_\nu^{(1)}(x)+H_\nu^{(2)}(x))=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_0} e^{-ix\,\mathrm{sen}\,\varphi+i\nu\varphi}\,d\varphi, \qquad (7)$$

donde $C_0=C_1+C_2$ es el contorno formado por la semirrecta $(\pi+i\infty, 0)$, el segmento $(\pi, -\pi)$ y la semirrecta $(-\pi, -\pi+i\infty)$. El sentido del recorrido se indica en la fig. 96.

Para demostrar que la integral (7) da efectivamente una función que coincide con la de Bessel, introducida en el § 1, hay que demostrar que ésta se desarrolla en la serie de potencias (15) del § 1. Para esto, necesitaremos ciertas propiedades de la función gamma.

3. Ciertas propiedades de la función gamma. La función gamma $\Gamma(s)$, como es sabido, es la integral

$$\Gamma(s)=\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx, \qquad (8)$$

donde s es, en general, un argumento complejo, siendo $\mathrm{Re}\,s>0$. Además de las propiedades elementales[1])

$$\Gamma(1)=1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(s+1)=s\Gamma(s), \quad \text{etc.},$$

nos será necesaria la propiedad

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\mathrm{sen}\,\pi s}. \qquad (9)$$

En efecto,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-(x+t)}x^{s-1}t^{-s}\,dx\,dt.$$

[1]) Véase B. M. Budak, S. V. Fomín, *Integrales Múltiples y Series*, ed. «Naúka», 1965 (o también P. Puig Adam, *Cálculo Integral*, Madrid, 1961 — *N. de la Red.*).

Fig. 97

Consideraremos a esta integral como una integral doble, y efectuaremos un cambio de variables, haciendo $\xi = x + t$, $\eta = \frac{x}{t}$. Calculando $\xi_x\eta_t - \xi_t\eta_x = -(1+\eta)/t$, se obtiene $dx\,dt = -\frac{t}{1+\eta}\,d\xi\,d\eta$ y $\Gamma(s)\,\Gamma(1-s) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\xi}\eta^{s-1}\frac{d\xi\,d\eta}{1+\eta} = \frac{\eta^{s-1}\,d\eta}{1+\eta}$.
La integral del segundo miembro se calcula mediante residuos, y es igual a $\pi/\operatorname{sen}\pi s$[1]).

Para la función gamma tiene lugar la representación en forma de la integral de contorno (integral de Riemann—Hankel)

$$\Gamma(s) = (e^{i2\pi s} - 1)^{-1}\int_\gamma e^{-\varphi}\varphi^{s-1}\,d\varphi, \qquad (10)$$

donde γ es cualquier contorno (en el plano de la variable compleja $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$) de la forma indicada en la fig. 97; este contorno va desde $+\infty$, rodea el punto $\varphi = 0$ y vuelve nuevamente a $+\infty$. El integrando $f(\varphi) = e^{-\varphi}\varphi^{s-1} = e^{-\varphi}e^{(s-1)\ln\varphi}$ que es función de la variable compleja φ, tiene el punto de ramificación $\varphi = 0$. Efectuemos un corte a lo largo de la parte positiva del eje real, haciendo $\arg\varphi = 0$ en el borde superior del corte y $\arg\varphi = 2\pi$ en el inferior. En virtud del teorema de Cauchy, el contorno γ se puede, sin cambiar la magnitud de la integral $\int_\gamma f(\varphi)\,d\varphi$, deformar arbitrariamente, siempre que se rodee el punto $\varphi = 0$ y que los extremos se mantengan en $+\infty$. Tomemos, en calidad de γ, el contorno formado por la semirrecta $(+\infty, \varepsilon)$ en el borde superior del corte, por la circunferencia C_ε con centro en $\varphi = 0$ y radio ε y por la semirrecta $(\varepsilon, +\infty)$ a lo largo del borde inferior. Entonces, será $f(\varphi) = e^{-\varphi+(s-1)\ln\varphi}$ en el borde superior y $f(\varphi) = e^{(s-1)2\pi i-\varphi+(s-1)\ln\varphi}$ en el inferior, donde $\ln\varphi$ toma valores reales, de forma que

$$\int_\gamma e^{-\varphi}\varphi^{s-1}\,d\varphi = \int_\infty^\varepsilon e^{-x}x^{s-1}\,dx + e^{(s-1)2\pi i}\int_\varepsilon^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx + \int_{C_\varepsilon} e^{-\varphi}\varphi^{s-1}\,d\varphi. \qquad (11)$$

[1]) Véase M. A. Lavréntiev, B. V. Shabat, *Métodos de la teoría de funciones de variable compleja*, 1958.

Demostremos que la integral tomada sobre C_ε tiende a cero cuando $\varepsilon \to 0$, si $\operatorname{Re} s > 0$. Efectivamente, $|e^{-\varphi}|$ está acotada en C_ε,

$$|\varphi^{s-1}| = e^{(s_0-1)\ln|\varphi| - s_1 \arg\varphi} = \varepsilon^{s_0-1} e^{-s_1 \arg\varphi}, \quad s = s_0 + s i_1$$

y

$$\left|\int_{C_\varepsilon} e^{-\varphi}\varphi^{s-1}\, d\varphi\right| \leqslant A 2\pi \varepsilon^{s_0} e^{-s_1 \arg\varphi} \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0 \ (s_0 > 0).$$

Por esto, el paso al límite en (11) nos conduce a (10).

La fórmula (10) determina la función analítica $\Gamma(s)$ a la derecha del eje imaginario. En virtud de la continuación analítica, esta fórmula es válida para todo el plano y $\Gamma(s)$ se representa en forma del cociente de dos funciones enteras. Para $s = -n$ ($n \geqslant 0$), $\Gamma(s)$ tiene polos.

Es justa la fórmula

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} = \frac{e^{i\pi s}}{2\pi i} \int_\gamma e^{-\varphi}\varphi^{-s-1}\, d\varphi. \tag{12}$$

Esta se deduce de (9) y (10). En efecto,

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} = \frac{\operatorname{sen}\pi(s+1)}{\pi}\Gamma(-s) = -\frac{\operatorname{sen}\pi s}{\pi}\Gamma(-s) =$$

$$= \frac{e^{-i\pi s} - e^{i\pi s}}{2\pi i\,(e^{-2\pi i s} - 1)} \int_\gamma e^{-\varphi}\varphi^{-s-1}\, d\varphi = \frac{e^{i\pi s}}{2\pi i} \int_\gamma e^{-\varphi}\varphi^{-s-1}\, d\varphi.$$

4. Representación integral de la función de Bessel. Mostremos ahora que la función

$$J_\nu(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_0} e^{-ix\operatorname{sen}\varphi + i\nu\varphi}\, d\varphi \tag{13}$$

se desarrolla en la serie (15) del § 1. Para esto, transformemos el contorno C_0 (véase la pág. 740), haciendo $\rho = \frac{x}{2} e^{-i(\varphi-\pi)}$ ($x > 0$). De la tabla

φ	$i\infty + \pi$	π	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\pi$	$-\pi + i\infty$	
ρ	∞	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$	$\frac{x}{2}e^{i\pi}$	$\frac{x}{2}e^{i2\pi}$	∞	

Fig. 98

se aprecia que C_0 se transforma en el contorno γ, indicado en la fig. 98, el cual está formado por la semirrecta $\left(+\infty, \frac{x}{2}\right)$, la circunferencia C^* de radio $0{,}5x$ y la semirrecta $(0{,}5x, +\infty)$. Calculando

$$-ix\operatorname{sen}\varphi = -\frac{ix}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}) =$$

$$= -\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2\rho}e^{i\pi} - \frac{2\rho}{x}e^{-i\pi}\right) = \frac{x^2}{4\rho} - \rho,$$

transformemos la integral (13) a la forma

$$J_\nu(x) = -\frac{i}{2\pi}\int_\gamma e^{-\rho+\frac{x^2}{4\rho}}\left(\frac{x}{2\rho}\right)^\nu e^{i\pi\nu}\frac{d\rho}{\rho} \qquad \left(d\varphi = \frac{i\,d\rho}{\rho}\right). \tag{14}$$

Desarrollemos $\exp\left(\frac{x^2}{4\rho}\right)$ en serie de potencias y sustituyamos en (14):

$$J_\nu(x) = -\frac{i}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(0{,}5x)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)}e^{i\pi\nu}\int_\gamma e^{-\rho}\rho^{-(k+\nu+1)}\,d\rho.$$

Aplicando luego la fórmula (12) para $1/\Gamma(k+\nu+1)$, se obtiene:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

De este modo, la función (13) es la función de Bessel $J_\nu(x)$, introducida en el § 1, p. 1. Transformemos la integral (13), dividiéndola en tres partes: por el eje φ_i (desde $-\pi$ hasta π) y por las ramas infinitas. Para el cálculo de la integral por las ramas $(\pm\pi + i\infty)$, introduzcamos una nueva variable, haciendo $\varphi = i\xi \pm \pi$ respectivamente. Como resultado, se obtiene, para la función de Bessel de ν-ésimo orden, la siguiente representación integral:

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\operatorname{sen}\varphi + i\nu\varphi}\,d\varphi - \frac{\operatorname{sen}\pi\nu}{\pi}\int_0^\infty e^{-x\operatorname{sh}\xi-\nu\xi}\,d\xi. \tag{15}$$

Si $\nu = n$ es un entero, entonces sen $\pi\nu = 0$ y

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \operatorname{sen} \varphi + in\varphi} \, d\varphi. \tag{16}$$

De aquí se deduce, en particular, que para la onda plana $e^{-ix \operatorname{sen} \varphi}$ tiene lugar el desarrollo en la serie de Fuorier

$$e^{-ix \operatorname{sen} \varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) \, e^{-in\varphi},$$

puesto que (16) es la fórmula para el coeficiente de Fuorier de este desarrollo. Haciendo $\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$ y teniendo en cuenta que, en virtud de la periodicidad del integrando de (16), se puede efectuar la integración sobre cualquier intervalo de longitud 2π, se obtiene la segunda fórmula integral:

$$J_n(x) = \frac{i^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \cos \psi + in\psi} \, d\psi, \tag{17}$$

que corresponde al siguiente desarrollo de la onda plana:

$$e^{-ix \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n J_n(x) \, e^{-in\varphi}.$$

En particular, para $n = 0$ tendremos:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \cos \psi} \, d\psi. \tag{18}$$

5. **Representación integral de $K_\nu(x)$.** Demostremos que para la función $K_\nu(x)$ de argumento imaginario, definida por la fórmula (véase el § 3)

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2} \pi \nu i} H_\nu^{(1)}(ix), \tag{19}$$

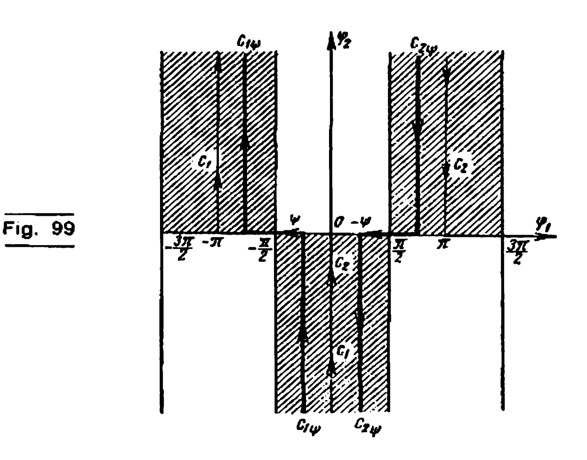
tiene lugar la representación integral

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \xi - \nu\xi} \, d\xi, \qquad x > 0. \tag{20}$$

De aquí se aprecia que $K_\nu(x)$ es una función positiva real, monótonamente decreciente. Para $\nu = 0$, la fórmula (20) nos da:

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \xi} \, d\xi. \tag{21}$$

Fig. 99



Para la demostración de (20), utilicemos (19) y la representación (5) de la función $H_\nu^{(1)}$. Sea $C_{1,\psi}$ el contorno (fig. 99) cuyas partes verticales del camino de C_1 tienen las abscisas $-\pi-\psi$ y ψ ($\psi<0$) en lugar de $-\pi$ y 0; en particular, será $C_{1,0}=C_1$. En virtud del teorema de Cauchy, el cambio de C_1 en (5) por el contorno $C_{1,\psi}$ no influye en el valor de la integral, si para $|\varphi_2|$ grandes se cumple la condición de convergencia de la integral $\operatorname{Re}(-ix\operatorname{sen}\varphi)<0$, donde $x=x_1+ix_2$, $\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$. En virtud de (19), nos interesa la función de Hankel $H_\nu^{(1)}(ix)$ de argumento imaginario puro. La condición de convergencia para $x_1=0$, $x=ix_2$, $\varphi=\psi$ tiene la forma $x_2\operatorname{sen}\varphi_1\operatorname{ch}\varphi_2<0$, o bien $x_2\operatorname{sen}\psi<0$. Tomaremos el contorno $C_{1,-\frac{\pi}{2}}$ para $\psi=-\frac{\pi}{2}$. Sustituyamos x_2 por x e introduzcamos la nueva variable de integración ξ, haciendo $\varphi=-\frac{\pi}{2}+i\xi$; entonces $d\varphi=i\,d\xi$, $\operatorname{sen}\varphi=\cos i\xi=\operatorname{ch}\xi$ y la integral (5), tomada sobre $C_{1,\psi}$, adquiere la forma

$$H_\nu^{(1)}(ix)=\frac{1}{\pi i}e^{-\frac{1}{2}\pi\nu i}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x\operatorname{ch}\xi-\nu\xi}\,d\xi.$$

De aquí y de (19) se deduce (20).

6. Fórmulas asintóticas para las funciones cilíndricas. Demostremos, utilizando el método del descenso de máxima pendiente[1]), que para las funciones $H_\nu^{(1,2)}(x)$, determinadas mediante las integrales de contorno (5), tienen lugar, para valores grandes del argumento real $x > 0$, las siguientes fórmulas asintóticas:

$$\left.\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad x>0, \\ H_\nu^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

De aquí se seguirá, en virtud del p. 4, § 1, que las funciones (5) coinciden idénticamente con las funciones de Hankel introducidas en el § 3 mediante las fórmulas (12), (13).

De las fórmulas $H_\nu^{(1)} = J_\nu + iN_\nu$, $H_\nu^{(2)} = J_\nu - iN_\nu$ y de (22) se obtienen las fórmulas asintóticas para las funciones de Bessel $J_\nu(x)$ y las de Neumann $N_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad (23)$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \quad (24)$$

Recordemos que en el p. 4 hemos demostrado la identidad de las funciones J_ν, (x), introducidas mediante las integrales de contorno, con las funciones $J_\nu(x)$, introducidas en el § 1 mediante series.

Al deducir las fórmulas asintóticas (22), utilizaremos las integrales de contorno (5). Es suficiente efectuar los razonamientos para $H_\nu^{(1)}(x)$. El integrando

$$e^{-ix \operatorname{sen} \varphi + i\nu\varphi}, \quad x > 0,$$

de la fórmula (5) no tiene singularidades en una parte finita del plano de la variable compleja φ.

Por esto, en virtud del teorema de Cauchy, el contorno de integración se puede deformar arbitrariamente en el plano finito, con la condición de que las asíntotas de las ramas del contorno que se alejan al infinito se hallen en las mismas bandas rayadas del plano φ que para el contorno C_1. Si el contorno escogido $\overline{C}_1$ se halla enteramente en la zona rayada (fig. 100), en todos los

[1]) Véase M. A. Lavréntiev, B. M. Shabat, *Metodos de la teoría de las funciones de variable compleja*, ed. Fizmatguiz, 1958.

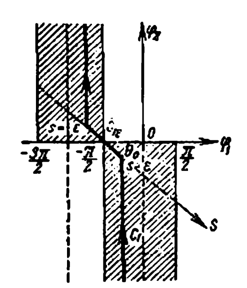


Fig. 100

puntos en que sen $\varphi \neq 0$, el integrando tiende exponencialmente a cero cuando $x \to \infty$, puesto que Im sen $\varphi < 0$. Si partes aisladas del contorno pasan por la región no rayada, en estas partes tienen lugar fenómenos complejos de interferencia en el integrando.

Para estudiar el comportamiento asintótico de la función $H_\nu^{(1)}(x)$ para valores grandes del argumento x, es conveniente escoger el contorno $\bar{C}_1$ de forma que se halle enteramente en la región rayada. Este contorno pasará, evidentemente, por el punto $-\frac{\pi}{2}$, en el cual la parte real Re $(-i \operatorname{sen} \varphi) = \cos \varphi_1 \operatorname{sh} \varphi_2$ se anula. Para $x \to \infty$, el integrando no tiende uniformemente a cero en un entorno de este punto; por esto, la parte principal en $\bar{C}_1$, cuando $x \to \infty$, es la integral por un arco pequeño que contenga al punto $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Desde este punto de vista, hay que escoger $\bar{C}_1$ de forma que el factor $e^{-ix \operatorname{sen} \varphi}$ disminuya en ésta en la forma más rápida al alejarse del punto $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Analicemos la «topografía» de la función $e^{-ix \operatorname{sen} \varphi}$ en un entorno de $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Hagamos $\varphi = -\frac{\pi}{2} + se^{i\theta}$. Para valores pequeños de s, se halla:

$$-i \operatorname{sen} \varphi = i \cos (se^{i\theta}) = i\left(1 - \frac{s^2}{2} e^{2i\theta} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{s^2}{2} \operatorname{sen} 2\theta + i\left(1 - \frac{s^2}{2} \cos 2\theta\right) + \ldots$$

Para la parte real Re $(-i \operatorname{sen} \varphi) = \frac{1}{2} s^2 \operatorname{sen} 2\theta$, el punto $s = 0$ es un punto del tipo montura: en las bandas rayadas esta fun-

ción es negativa, en las no rayadas, positiva, y para $s = 0$ ($\varphi = -\pi/2$) se anula. La dirección $\theta = \theta_0 = -\frac{\pi}{4}$ será, evidentemente, la del descenso (decrecimiento) de máxima pendiente para la función $\frac{s^2}{2}$ sen 2θ. De aquí se deduce que también para el módulo de la función $e^{-ix \operatorname{sen} \varphi}$, el punto $s = 0$ es del tipo montura, y $\theta_0 = -\frac{\pi}{4}$ corresponde a la dirección del descenso más rápido.

Tomemos el contorno C_1 de forma que contenga al segmento rectilíneo $\overline{C}_{1\varepsilon}$ $(-\varepsilon < s < \varepsilon)$, que pasa por el punto $s = 0$ $\left(\varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$ bajo un ángulo de $\theta_0 = -\frac{\pi}{4}$ y que sus ramas, que se alejan hacia el infinito, se hallen enteramente en las regiones rayadas (fig. 100).

El integrando en (5) decrece en forma exponencial al alejarse del punto $s = 0$. Por esto, se puede escribir, con exactitud de un sumando que disminuye exponencialmente:

$$H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{C_1} e^{-ix \operatorname{sen} \varphi + i\nu\varphi}\, d\varphi \approx \frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{x\left(-\frac{s^2}{2}+i\right)-i\nu\frac{\pi}{2}}\, ds e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

puesto que a lo largo de $\overline{C}_{1\varepsilon}$ se tiene que $\varphi = -\frac{\pi}{2} + se^{-i\pi/4}$, $d\varphi = e^{-i\frac{\pi}{4}} ds$, $-i$ sen $\varphi \approx -\frac{s^2}{2} + i$, $e^{i\nu\varphi} \approx e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}$, y s varía, desde ε hasta $-\varepsilon$. Introduzcamos las notaciones $\xi = s\sqrt{\frac{x}{2}}$, $d\xi = \sqrt{\frac{x}{2}}\, ds$, $\alpha = \sqrt{\frac{x}{2}}$. Entonces,

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{x}}\, e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} \int_{-\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\alpha} e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

Si $x \to \infty$ [1]), es decir, $\alpha \to \infty$, entonces $\int_{-\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\alpha} e^{-\xi^2}\, d\xi \to$ $\to \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$. De aquí se halla el primer término de la

[1]) El error que se efectúa al cambiar los límites finitos por los infinitos tiene carácter exponencial de decrecimiento, puesto que

$$\int_z^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi \approx e^{-z^2}/2z.$$

fórmula asintótica (22). Los términos siguientes del desarrollo se pueden obtener si se toman los términos de orden mayor de infinidad con respecto a s. La apreciación $O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ para los términos restantes de (22) se sigue del p. 4 del § 1.

Obsérvese que el método del descenso de máxima pendiente, expuesto más arriba, o método del punto del tipo montura, se puede aplicar a la obtención del desarrollo asintótico de muchas otras funciones que se representan en forma de integrales de contorno, así como también para $H_\nu^{1,2}(x)$ cuando $\nu \approx x \to \infty$.

§ 5. INTEGRAL DE FOURIER—BESSEL Y CIERTAS INTEGRALES QUE CONTIENEN A LAS FUNCIONES DE BESSEL

1. Integral de Fourier-Bessel. Hallemos el desarrollo de una función $f(r)$ dada en integral por las funciones de Bessel. La integral de Fourier para la función $f(x)$ y correspondientemente para la función de dos variables $f(x, y)$ tiene, como es sabido, la forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, e^{i\mu(x-\xi)}\, d\xi, \tag{1}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu\, d\mu' \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta)\, e^{i\mu(x-\xi)+i\mu'(y-\eta)}\, d\xi\, d\eta. \tag{2}$$

Introduciendo las coordenadas polares mediante las relaciones

$$x = r\cos\varphi,\quad \xi = \rho\cos\psi,\quad \mu = \lambda\cos\xi,$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi;\quad \eta = \rho\,\mathrm{sen}\,\psi;\quad \mu' = \lambda\,\mathrm{sen}\,\xi,$$

se obtiene:

$$d\xi\, d\eta = \rho\, d\rho\, d\psi,\quad d\mu\, d\mu' = \lambda\, d\lambda\, d\xi,$$
$$\mu x + \mu' y = \lambda r\cos(\xi - \varphi),$$
$$\mu\xi + \mu'\eta = \lambda\rho\cos(\psi - \xi).$$

Suponiendo que $f(x, y)$ tiene la forma

$$f(x, y) = f(r)\, e^{in\varphi}, \tag{3}$$

donde n es un entero y transformando la integral de Fourier (2) mediante las relaciones escritas más arriba, se halla:

$$f(r)\, e^{in\varphi} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(\rho)\,\rho\, d\rho\lambda\, d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda r\cos(\xi-\varphi)+in(\xi-\varphi)}\, d\xi \times$$
$$\times\, e^{in\varphi}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\lambda\rho\cos(\psi-\xi)+in(\psi-\xi)}\, d\psi. \tag{4}$$

Apliquemos las fórmulas (véanse (16), (17) del § 4, p. 4)

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos\xi+in\xi}e^{-i\frac{\pi n}{2}}\,d\xi, \quad \left(\xi=\varphi-\frac{\pi}{2}\right), \tag{5}$$

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz\cos\xi'+in\xi'}e^{i\frac{\pi n}{2}}\,d\xi' \quad (\xi=\pi+\xi'). \tag{6}$$

Como los integrandos de (5) y (6) son funciones periódicas de ξ y ξ' y, por esto, se puede integrar sobre cualquier intervalo de longitud 2π, se puede escribir:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos(\xi-\xi_0)+in(\xi-\xi_0)}\,d\xi = J_n(z)\,e^{i\frac{\pi n}{2}}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iz\cos(\xi'-\xi_0')+in(\xi'-\xi_0')}\,d\xi' = J_n(z)\,e^{-i\frac{\pi n}{2}}, \tag{8}$$

donde ξ_0 y ξ_0' son números arbitrarios. Sustituyendo (7) y (8) en (4) y simplificando ambos miembros entre $e^{in\varphi}$, se obtiene la *integral de Fourier—Bessel*:

$$f(r)=\int_0^\infty\int_0^\infty f(\rho)\,J_n(\lambda\rho)\,J_n(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda\,\rho\,d\rho, \tag{9}$$

o bien

$$f(r)=\int_0^\infty \varphi(\lambda)\,J_n(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda,$$

donde

$$\varphi(\lambda)=\int_0^\infty f(\rho)\,J_n(\lambda\rho)\,\rho\,d\rho.$$

Para que el desarrollo en la integral de Fourier—Bessel sea posible, es suficiente exigir que la función $f(r)$, definida en el intervalo $(0, \infty)$, satisfaga a las condiciones siguientes:

1) $f(r)$ es continua en el intervalo $(0, \infty)$;

2) $f(r)$ tiene un número finito de máximos y mínimos en todo intervalo finito;

3) existe la integral

$$\int_0^\infty \rho\,|f(\rho)|\,d\rho.$$

No nos detendremos en demostrar esto.

2. Ciertas integrales que contienen las funciones de Bessel. En distintas aplicaciones se encuentran con frecuencia integrales definidas que contienen las funciones de Bessel.

Una de las integrales más generalizadas de este tipo es la siguiente:

$$B_1 = \int_0^\infty e^{-z\lambda} J_0(\rho\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \quad (z > 0). \tag{10}$$

Para demostrar esta fórmula, sustituyamos J_0 por su expresión integral ((16), § 4) y cambiemos después el orden de integración.

$$B_1 = \int_0^\infty e^{-z\lambda} J_0(\rho\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-z\lambda}\, d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\rho\lambda \operatorname{sen} \varphi}\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{-(z + i\rho \operatorname{sen} \varphi)\lambda}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{z + i\rho \operatorname{sen} \varphi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{z\, d\varphi}{z^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} - \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho \operatorname{sen} \varphi\, d\varphi}{z^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{z\, d\varphi}{z^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi},$$

puesto que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} \varphi\, d\varphi}{z^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = 0$$

en virtud de que el integrando es impar.

Haciendo primero $\operatorname{tg} \varphi = \xi$ y después $\sqrt{\frac{z^2 + \rho^2}{z^2}}\, \xi = \eta$, se obtiene:

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{z\, d\varphi}{z^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = \frac{2z}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{z^2 + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} =$$

$$= \frac{2z}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{z^2 (1 + \xi^2) + \rho^2 \xi^2} = \frac{2}{\pi \sqrt{z^2 + \rho^2}} \int_0^\infty \frac{d\eta}{1 + \eta^2} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho^2}};$$

con esto, queda demostrada la fórmula (10). Aplicando (10), se halla de inmediato:

$$\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\, e^{-z\lambda}\, d\lambda = \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + \rho^2}}\right). \tag{11}$$

Haciendo en las fórmulas (10) y (11) $z = ia$ y separando las partes real e imaginaria, se obtienen varios corolarios:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\cos a\lambda\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - a^2}}, \\ &\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\operatorname{sen} a\lambda\, d\lambda = 0, \\ &\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\cos a\lambda\, d\lambda = \frac{1}{\rho}, \\ &\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\operatorname{sen} a\lambda\, d\lambda = \frac{a}{\rho\sqrt{\rho^2 - a^2}} \end{aligned}\right\} \quad \text{para} \quad \rho > a; \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\cos a\lambda\, d\lambda = 0, \\ &\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\operatorname{sen} a\lambda\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \end{aligned}\right\} \quad \text{para} \quad a > \rho; \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\cos a\lambda\, d\lambda = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}\right), \\ &\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\operatorname{sen} a\lambda\, d\lambda = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{para} \quad a > \rho. \quad (13')$$

Demostremos la segunda fórmula integral

$$B_2 = \int_0^\infty J_\nu(\lambda\rho)\, e^{-t\lambda^2}\lambda^{\nu+1}\, d\lambda = \frac{1}{2t}\left(\frac{\rho}{2t}\right)^\nu e^{-\frac{\rho^2}{4t}}. \qquad (14)$$

Sustituyamos en esta fórmula, en lugar de J_ν, la serie de potencias e integremos término a término ($t > 0$!):

$$B_2 = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+\nu}\int_0^\infty \lambda^{2k+2\nu+1} e^{-t\lambda^2}\, d\lambda.$$

Calculando la integral auxiliar

$$\int_0^\infty \lambda^{2q+2\nu+1} e^{-t\lambda^2}\, d\lambda = \frac{1}{2t^{k+\nu+1}}\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{k+\nu}\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2t^{k+\nu+1}}\,\Gamma(k+\nu+1),$$

se obtiene:

$$B_2 = \frac{1}{2t}\left(\frac{\rho}{2t}\right)^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\rho^2}{4t}\right)^k = \frac{1}{2t}\left(\frac{\rho}{2t}\right)^{\nu} e^{-\frac{\rho^2}{4t}},$$

que es lo que se quería demostrar

Obsérvese que el cálculo de B_1 se puede efectuar análogamente, desarrollando la función de Bessel en serie e integrando luego término a término.

Estudiemos la integral

$$C = \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho) \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,|z|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} \lambda \, d\lambda. \tag{15}$$

No es difícil comprobar que ésta es la solución de la ecuación

$$\Delta v + k^2 v = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

La función

$$v_0 = \frac{e^{ikr}}{r} \qquad (r = \sqrt{\rho^2 + z^2})$$

satisface también a la ecuación ondulatoria $(r > 0)$

$$\Delta v_0 + k^2 v_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r v_0) + k^2 v_0 = -k^2 \frac{e^{ikr}}{r} + k^2 v_0 = 0.$$

Desarrollemos la función $v_0(\rho) = \dfrac{e^{ik\rho}}{\rho}$ en la integral de Fourier—Bessel

$$\frac{e^{ik\rho}}{\rho} = \int_0^{\infty} F(\lambda) J_0(\rho\lambda) \lambda \, d\lambda, \tag{16}$$

donde

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{ik\rho} J_0(\lambda\rho) \, d\rho. \tag{17}$$

Para el cálculo de la función $F(\lambda)$, apliquemos las fórmulas (12):

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho)(\cos k\rho + i \operatorname{sen} k\rho) \, d\rho = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}, & \text{si} \quad \lambda > k. \\[2ex] \dfrac{i}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}, & \text{si} \quad k > \lambda. \end{cases}$$

De este modo,

$$\frac{e^{ik\rho}}{\rho} = \int_0^\infty J_0(\rho\lambda) \frac{\lambda \, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}, \tag{18}$$

es decir, la función

$$v_0 = \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$$

coincide con la integral $C(\rho, z)$, para $z = 0$. Así, pues, ambas funciones,

$$v_0(\rho, z) \quad \text{y} \quad C(\rho, z),$$

son soluciones de la ecuación ondulatoria, coinciden para $z = 0$ y tienen en el punto $z = 0$, $\rho = 0$ igual singularidad.

De aquí se deduce que éstas son idénticamente iguales, es decir, que

$$\int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,|z|}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \lambda \, d\lambda = \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}. \tag{19}$$

La fórmula obtenida fue utilizada ampliamente por A. Sommerfeld en sus investigaciones físicas y se llama con frecuencia fórmula de Sommerfeld.

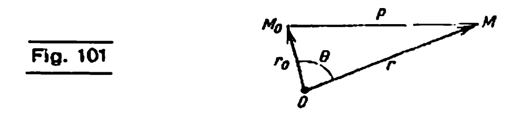
II PARTE

FUNCIONES ESFERICAS

Las funciones esféricas fueron introducidas a raíz del estudio de las soluciones de la ecuación de Laplace y, en particular, de la teoría del potencial. En el § 1 se estudian los polinomios de Legendre, que se utilizan después para escribir las funciones esferoidales y esféricas (§ 2). Las funciones esféricas son un aparato muy efectivo para la resolución de muchos problemas de la física matemática.

§ 1. POLINOMIOS DE LEGENDRE

1. Función generatriz y polinomios de Legendre. Los polinomios de Legendre están estrechamente ligados a la solución fundamental de la ecuación de Laplace $\frac{1}{R}$, donde R es la distancia desde el punto M hasta un punto fijo M_0. Sean r y r_0 los radios-



vectores de los puntos M y M_0, y θ, el ángulo entre éstos (fig. 101). Es evidente que se puede escribir

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{r_0^2+r^2-2rr_0\cos\theta}}=\begin{cases}\dfrac{1}{r_0}\dfrac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} & \text{para } r<r_0,\\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} & \text{para } r>r_0,\end{cases} \tag{1}$$

donde $x=\cos\theta$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ y $\rho=\frac{r}{r_0}<1$, o bien $\rho=\frac{r_0}{r}<1$ (en ambos casos, ρ es menor que la unidad).

La función

$$\Psi(\rho, x)=\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} \quad (0<\rho<1,\ -1\leqslant x\leqslant 1) \tag{2}$$

se llama *función generatriz* de los polinomios de Legendre.

Desarrollemos la función $\Psi(\rho, x)$ en serie de potencias de ρ:

$$\Psi(\rho, x)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,\rho^n. \tag{3}$$

Los coeficientes $P_n(x)$ del desarrollo (3) son polinomios de n-ésima potencia y se denominan polinomios de Legendre.

En virtud del teorema de Cauchy, de la fórmula (3) se deduce que

$$P_n(x)=\frac{1}{n!}\left.\frac{\partial^n\Psi}{\partial\rho^n}\right|_{\rho=0}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Psi(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta, \tag{4}$$

donde C es un contorno arbitrario cerrado, en el plano de la variable compleja $\zeta=\xi+i\eta$, que contiene al punto $\zeta=0$. Haciendo $\sqrt{1-2x\zeta+\zeta^2}=1-\zeta z$, se halla $\zeta=2(z-x)/(z^2-1)$, $d\zeta=2(1-\zeta z)\,dz/(z^2-1)$, $\Psi(\zeta, x)\,d\zeta=2dz/(z^2-1)$.

La fórmula (4) se escribe entonces como sigue:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_{C_1}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz, \tag{5}$$

donde C_1 es un contorno arbitrario que rodea al punto $z=x$.

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{(z^2-1)^n}{z-x}\,dz=(x^2-1)^n$$

y aplicando la fórmula para la derivada

$$\frac{d^n}{dx^n}\int_{C_1}\frac{(z^2-1)^n}{z-x}\,dz=n!\int_{C_1}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz,$$

se obtiene, de (5), la fórmula para $P_n(x)$:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \tag{6}$$

De la fórmula (6), se aprecia directamente que: 1) $P_n(x)$ es un polinomio de grado n; 2) $P_n(x)$ contiene sólo potencias de x de la misma paridad que el número n, de forma que

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x). \tag{7}$$

Haciendo $x = 1$, hallamos:

$$\Psi(\rho,1)=\frac{1}{1-\rho}=1+\rho+\ldots+\rho^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)\rho^n,$$

es decir, $P_n(1) = 1$ y, en virtud de (7),

$$P_n(-1)=(-1)^n. \tag{7'}$$

La fórmula (6) se llama fórmula diferencial de los polinomios de Legendre, o fórmula de Rodrigo.

Obsérvese que de (1) y (3) se deduce el desarrollo del potencial

$$\frac{1}{R}=\begin{cases}\dfrac{1}{r_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{para } r<r_0,\\ \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{para } r>r_0.\end{cases} \tag{8}$$

2. Fórmulas de recurrencia. Derivando $\Psi(\rho, x)$ con respecto a ρ y a x, se obtienen las dos identidades

$$(1-2\rho x+\rho^2)\Psi_\rho-(x-\rho)\Psi=0, \tag{9}$$

$$(1-2\rho x+\rho^2)\Psi_x-\rho\Psi=0. \tag{10}$$

Escribamos el primer miembro de la fórmula (9) en forma de serie de potencias con respecto a ρ, sustituyendo la serie (3) para Ψ

y la $\Psi_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) P_{n+1}(x) \rho^n$. El coeficiente de ρ^n de la serie obtenida es, en virtud de (9), igual a cero para todo x:

$$(n+1) P_{n+1}(x) - x(2n+1) P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \quad (11)$$

Esta identidad es una fórmula de recurrencia que relaciona tres polinomios sucesivos. Esta permite hallar sucesivamente todos los $P_n(x)$ $(n > 1)$, si se tiene en cuenta que (6) nos da:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x.$$

Así, por ejemplo, haciendo en (11) $n = 1$, se halla $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$.

Deduzcamos otras dos fórmulas de recurrencia:

$$nP_n(x) - xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = 0,$$

o bien

$$P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x), \quad (12)$$

$$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) - nP_{n-1}(x) = 0. \quad (13)$$

Eliminando Ψ de (9) y (10), se obtiene la identidad $\rho\Psi_\rho - (x-\rho)\Psi_x = 0$, de la cual se sigue inmediatamente (12), si se sustituye la serie (3) en el primer miembro de esta identidad y se iguala a cero el coeficiente de ρ^n. Derivando después (11) con respecto a x y eliminando $P'_{n-1} = xP'_n - nP_n$, se obtiene: $P'_{n+1} - xP'_n - (n+1)P_n = 0$, ó (13), después de cambiar $n+1$ por n.

3. Ecuación de Legendre. Hallemos la ecuación diferencial, cuya solución es $P_n(x)$. Para esto, eliminemos P_{n-1} y P'_{n-1} de (12) y (13). Sustituyamos primeramente P'_{n-1} de (12) en (13):

$$P'_n - xP'_{n-1} - nP_{n-1} = (1-x^2)P'_n + nxP_n - nP_{n-1} = 0;$$

después, derivando la identidad obtenida con respecto a x, apliquemos una vez más la fórmula (12) para P'_{n-1}:

$$[(1-x^2)P'_n]' + nxP'_n + nP_n - nP'_{n-1} = [(1-x^2)P'_n] + nxP'_n + nP_n - (nxP'_n - n^2P_n) = 0.$$

Como resultado, se obtiene la ecuación

$$[(1-x^2)P'_n]' + n(n+1)P_n = 0. \quad (14)$$

Con esto queda demostrado que los polinomios de Legendre $P_n(x)$ son funciones propias, que corresponden a los valores propios $\lambda_n = n(n+1)$, del siguiente problema:

hallar los valores de λ, para los cuales existen, en el segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$, soluciones no triviales de la ecuación de Legendre

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0, \qquad -1<x<1, \tag{15}$$

acotadas para $x = \pm 1$ y que satisfagan a la condición de normalización $y(1) = 1$.

4. Ortogonalidad de los polinomios de Legendre. La ecuación de Legendre (15) es un caso particular (para $q = 0$, $\rho = 1$, $k(x) = 1 - x^2$) de la ecuación estudiada en la Introducción

$$(k(x)\,y')' - q(x)\,y + \lambda\rho(x)\,y = 0. \tag{16}$$

Por esto, se le puede aplicar la teoría general de la ecuación (16). De esta teoría se deduce que:

1) los polinomios de Legendre de distintos órdenes son ortogonales entre sí:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = 0 \quad \text{para} \quad m \neq n;$$

2) la segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Legendre, para $\lambda = n(n+1)$, se hace infinita en $x = \pm 1$ como $\ln(1 \mp x)$.

El sistema de polinomios ortogonales, como es sabido, es cerrado [1]). Por esto, la ecuación de Legendre no tiene soluciones

---

[1]) Un sistema de funciones ortogonales $\{\varphi_n\}$ se llama *cerrado*, si no existe ninguna función continua, que no sea idénticamente nula, y que sea ortogonal a todas las funciones del sistema dado.

Un sistema de funciones ortogonales $\{\varphi_n\}$ se llama *completo* en el intervalo (a, b), si cualquier función continua se puede aproximar en media, con cualquier grado de exactitud, mediante una combinación lineal de las funciones $\{\varphi_n\}$. En otras palabras, para todo $\varepsilon > 0$, existe una combinación lineal de funciones

$$S_n = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n,$$

tal que

$$\int_a^b |f(x) - S_n(x)|^2\,dx < \varepsilon.$$

Para el sistema completo de funciones $\{\varphi_n\}$, tiene lugar la relación

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} N_n f_n^2.$$

acotadas no triviales para ningún $\lambda \neq n(n+1)$. Efectivamente si existiese una solución $y(x)$ para $\lambda \neq n(n+1)$, ésta sería ortogonal a todos los $P_n(x)$. De aquí se deduce, en virtud de la propiedad cerrada del sistema de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}$, que $y(x) \equiv 0$. Con esto queda demostrado que hemos hallado todas las soluciones acotadas no triviales de la ecuación de Legendre.

5. Norma de los polinomios de Legendre. Calculemos la norma $\| P_n \|$ de los polinomios $P_n(x)$:

$$\| P_n \| = \left(\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\, dx \right)^{1/2}.$$

Apliquemos dos veces la fórmula de recurrencia (11): primeramente, expresemos de ésta (sustituyendo previamente $n+1$ por n) P_n mediante P_{n-1} y P_{n-2}, y después, xP_n mediante P_{n+1} y P_{n-1}. Teniendo en cuenta la ortogonalidad de los polinomios P_n, P_{n-1} y P_{n-2}, se obtiene:

$$\| P_n \|^2 = \frac{1}{n} \int_{-1}^{1} P_n(x) \{(2n-1)\, xP_{n-1}(x) - (n-1)\, P_{n-2}(x)\}\, dx =$$

$$= \frac{2n-1}{n} \int_{-1}^{1} (xP_n)\, P_{n-1}\, dx = \frac{2n-1}{2n+1} \| P_{n-1} \|^2.$$

---

donde f_n son los coeficientes de Fourier de la función $f(x)$

$$\left(f_n = \frac{1}{N_n} \int_a^b f(\xi)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi \right).$$

La propiedad cerrada es una consecuencia de la plenitud. Sea dado cierto sistema de funciones ortogonales $\{\varphi_n(x)\}$. Supongamos que existe una función continua $f(x) \not\equiv 0$, ortogonal a todas las $\varphi_n(x)$. Entonces, en virtud de la plenitud del sistema de funciones $\{\varphi_n\}$, debe tener lugar la igualdad

$$\int_a^b f^2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} N_n f_n^2 = 0,$$

puesto que es $f_n = 0$, por hipótesis. De aquí se deduce que $f \equiv 0$, lo cual contradice a la hipótesis hecha, es decir, el sistema $\{\varphi_n(x)\}$ es cerrado.

La plenitud y, con ella, la propiedad cerrada del sistema de polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}$ es un corolario del *teorema de Weierstrass* sobre la posibilidad de aproximar uniformemente una función continua mediante polinomios: *para cualquier función continua $f(x)$, dada en el intervalo (a, b) y para todo $\varepsilon > 0$, existe un polinomio $Q_n(x)$, tal que*

$$| f(x) - Q_n(x) | < \varepsilon. \qquad (A)$$

En efecto, representando el polinomio $Q_n(x)$ en forma de combinación lineal de los polinomios ortogonales $\{P_n(x)\}$ y utilizando la desigualdad (A), se obtiene la condición de plenitud del sistema de polinomios ortogonales.

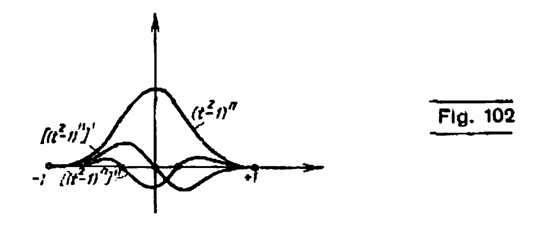


Fig. 102

La aplicación sucesiva de esta fórmula nos da que $\| P_n \|^2 = \frac{1}{2n-1} \| P_0 \|^2$. Sustituyendo aquí $\| P_0 \|^2 = \| 1 \|^2 = 2$, se halla el cuadrado de la norma:

$$\| P_n \|^2 = \frac{2}{2n+1} \quad \text{y} \quad \| P_n \| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \tag{17}$$

De este modo,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases} \tag{18}$$

6. **Ceros de los polinomios de Legendre.** Mediante la fórmula de Rodrigo (6), se puede demostrar el teorema:

El polinomio de Legendre $P_n(x)$ tiene n ceros, distribuidos en el intervalo $-1 < x < 1$, y su derivada k-ésima, $k \leqslant n$, tiene $n - k$ ceros dentro del intervalo $(-1, 1)$ y no se anula en sus extremos.

En efecto, la función $w = (x^2 - 1)^n$ se anula en los extremos del intervalo $(-1, 1)$. Su derivada $w'(x)$ se anula en $x = 1$ y $x = -1$ y, por el teorema sobre el cero de la derivada, tiene por lo menos un cero dentro del intervalo $(-1, 1)$. La derivada segunda $w''(x)$ tiene, por lo menos, dos ceros dentro del intervalo y se anula en sus extremos (fig. 102). Continuando estos razonamientos, se concluye que la derivada n-ésima $w^{(n)}(x)$ tiene, al menos, n ceros en el intervalo $(-1, 1)$, o, más precisamente, exactamente n ceros, por ser un polinomio de n-ésimo grado. La primera parte del teorema queda demostrada. La derivada $P'_n(x)$, por el mismo teorema, debe tener, por lo menos, $n - 1$ ceros dentro de $(-1, 1)$; pero ésta es un polinomio de $(n - 1)$-ésimo grado, por lo cual tiene exactamente $n - 1$ ceros dentro

del intervalo. Continuando, se concluye que $\frac{d^k}{dx^k} P_n(x)$ tiene $n-k$ ceros dentro del intervalo $(-1, 1)$.

7. Acotación de los polinomios de Legendre. Demostremos que los polinomios de Legendre están uniformemente acotados para todos los valores $-1 \leqslant x \leqslant 1$ del argumento:

$$|P_n(x)| \leqslant 1.$$

Para esto, nos será necesaria la representación integral

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [x + i\sqrt{1-x^2} \operatorname{sen} \varphi]^n \, d\varphi. \tag{19}$$

Deduzcamos la fórmula (19). Tomemos en (5), como contorno C_1, una circunferencia de radio $R = \sqrt{1-x^2}$ ($|x| < 1$) con centro en el punto $z = x$. Entonces, tendremos: $z = x + \sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}$, $dz = i\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}\,d\varphi$, $(z-x)^{n+1} = (1-x^2)^{\frac{n+1}{2}} e^{i(n+1)\varphi}$, $z^2 - 1 = x^2 - 1 + (1-x^2)e^{2i\varphi} + 2x\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi} = \sqrt{1-x^2}e^{i\varphi} \times [2x + \sqrt{1-x^2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})] = 2\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}[x + i\sqrt{1-x^2} \operatorname{sen} \varphi]$. Sustituyendo estas expresiones en (5), se obtiene (19). Si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, entonces será $|x + i\sqrt{1-x^2} \operatorname{sen} \varphi| \leqslant 1$ y de (19) se obtiene inmediatamente la acotación de $P_n(x)$.

§ 2. FUNCIONES ADJUNTAS DE LEGENDRE

1. Funciones adjuntas. Consideremos el siguiente problema: **hallar los valores propios y las funciones propias de la ecuación**

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right)y = 0, \quad -1 < x < 1, \tag{1}$$

con la condición de acotación

$$|y(\pm 1)| < \infty. \tag{2}$$

La ecuación (1) es un caso particular de la (8), estudiada en la Introducción, para $k(x) = 1 - x^2$, $q(x) = m^2/(1-x^2)$, $\rho = 1$, $a = -1$, $b = 1$. Como el coeficiente $k(x) = 1 - x^2$ se anula en ambos extremos del segmento $-1 \leqslant x \leqslant 1$, la condición natural de acotación se plantea para $x = -1$ y $x = 1$. En virtud del lema 2 de la Introducción, la solución $y(x)$ del problema (1)

debe tener, para $x = \pm 1$, ceros de orden ν, donde $\nu = \frac{m}{2}$. De aquí se deduce que la solución del problema (1) es natural buscarla en la forma

$$y(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} v(x), \qquad v(\pm 1) \neq 0. \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en la ecuación (1), se halla:

$$(1 - x^2) v'' - 2(m + 1) v' + [\lambda - m(m + 1)] v = 0. \tag{4}$$

Esta misma ecuación se obtiene para la derivada $\frac{d^m z}{dx^m}$ de la solución de la ecuación de Legendre (15) del § 1, si se la deriva m veces. La solución acotada no trivial $z = P_n(x)$ de la ecuación de Legendre existe sólo para $\lambda = n(n + 1)$, donde n es un número entero positivo. De aquí se deduce que

$$v(x) = \frac{d^m P_n}{dx^m}, \qquad \lambda = n(n + 1), \tag{5}$$

es solución de la ecuación (2), y la función

$$P_n^{(m)}(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n}{dx^m} \tag{6}$$

es la función propia del problema (1) que corresponde al valor propio

$$\lambda_n = n(n + 1), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

$P_n^{(m)}(x)$ se llama función adjunta de Legendre de m-ésimo orden. Es evidente que $P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$, $P_n^{(m)}(x) \not\equiv 0$ solamente para $m \leqslant n$.

2. Norma de las funciones adjuntas. De acuerdo con el teorema general de la pág. 709, las funciones adjuntas $P_n^{(m)}$ forman un sistema ortogonal. Calculemos la norma $\| P_n^{(m)} \|$ de estas funciones. De paso será demostrada su ortogonalidad. Multipliquemos la primera ecuación (4) por $(1 - x^2)^m$ y tengamos en cuenta (5). Después de sustituir $m + 1$ por m, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m}\right] = -[\lambda - m(m - 1)](1 - x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1} P_n}{dx^{m-1}}. \tag{8}$$

Introduzcamos la notación

$$L_{n,k}^m = \int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(x) P_k^{(m)}(x)\, dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m} \frac{d^m P_k}{dx^m}\, dx.$$

La integración por partes nos da:

$$L_{n,k}^{m}=\left[\frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}}\frac{d^mP_n}{dx^m}(1-x^2)^m\right]_{-1}^{1}-$$

$$-\int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d^mP_n}{dx^m}\right]dx.$$

El primer término del segundo miembro se anula, y el término integral, en virtud de (8) y (7), se transforma como sigue:

$$L_{n,k}^{m}=[n(n+1)-m(m-1)]\,L_{n,k}^{m-1}=(n+m)(n-m+1)\,L_{n,k}^{m-1}.$$

De esta fórmula de recurrencia se deduce que

$$L_{n,k}^{m}=(n+m)(n+m-1)\dots(n+1)n\dots(n-m+1)\,L_{n,k}^{0}=$$

$$=\frac{(n+m)!}{n!}\frac{n!}{(n-m)!}L_{n,k}^{0}=\frac{(n+m)!}{(n-m)!}L_{n,k}^{0}.$$

La expresión para $L_{n,k}^{0}$ se da por la fórmula (18) del § 1, puesto que $P_n^{(0)}=P_n$. Como resultado, se obtiene:

$$\int_{-1}^{1}P_n^{(m)}(x)\,P_k^{(m)}(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{para } k\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1}\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{para } k=n,\end{cases}\tag{9}$$

es decir, las funciones adjuntas son ortogonales entre sí y el cuadrado de la norma de $P_n^{(m)}$ es igual a

$$\|P_n^{(m)}\|^2=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.\tag{10}$$

3. Carácter cerrado del sistema de funciones adjuntas. Demostremos que el sistema de funciones adjuntas $\{P_n^{(m)}(x)\}$ abarca a todas las soluciones acotadas de la ecuación (1).

En efecto, para $\lambda=n(n+1)$ la solución linealmente independiente de $P_n^{(m)}(x)$ se hace infinita para $x=\pm1$. La solución acotada para $\lambda\neq n(n+1)$, debe ser ortogonal a todos los $P_n^{(m)}(x)$.

Para demostrar que no existen soluciones acotadas de la ecuación (1), diferentes de $P_n^{(m)}(x)$, es suficiente establecer que el sistema de funciones adjuntas $\{P_n^{(m)}(x)\}$ es cerrado, es decir, que no existe ninguna función continua, que no sea idénticamente igual a cero y que sea ortogonal a todas las funciones del sistema.

Lema. **Toda función $f(x)$, continua en el segmento $[-1, 1]$ y que se anule en sus extremos (para $x = 1$ y $x = -1$), puede ser aproximada uniformemente con cualquier grado de exactitud por una combinación lineal de funciones adjuntas de cualquier orden m.**

Obsérvese, ante todo, que las derivadas de los polinomios de Legendre $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$ son polinomios de grado $n - m$. Por cuanto cualquier polinomio en x se puede representar como una combinación lineal de estos polinomios, en virtud del teorema de Weierstrass cualquier función $\bar{f}(x)$, continua en el segmento $[-1, 1]$, se puede aproximar uniformemente, con cualquier grado de exactitud, mediante una combinación lineal de $\frac{d^m}{dx^m} P_n(x)$:

$$\left|\bar{f}(x) - \sum_{n=m}^{n_0} c_n \frac{d^m}{dx^m} P_n(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad n_0 > N(\varepsilon).$$

Multiplicando esta desigualdad por $(1 - x^2)^{\frac{m}{2}}$, se obtiene que

$$|f_1(x) - \sum_{n=m}^{n_0} c_n P_n^{(m)}(x)| < \varepsilon, \quad \text{si} \quad n_0 > N(\varepsilon),$$

donde

$$f_1(x) = \bar{f}(x)(1 - x^2)^{\frac{m}{2}}, \tag{11}$$

es decir, cualquier función $f(x)$, que se represente en la forma (11), siendo $\bar{f}(x)$ una función continua en el segmento $[-1, 1]$, puede ser aproximada uniformemente, con cualquier grado de exactitud, por una combinación lineal de funciones adjuntas.

Diremos que la función $f_1(x)$ pertenece a la clase H_1, si ésta es continua en el segmento $[-1, 1]$ e idénticamente nula en pequeños entornos de los puntos $x = -1$ y $x = 1$:

$$f_1(x) = 0 \quad \text{para} \quad |1 - \delta| \leqslant |x| \leqslant 1.$$

Puesto que para cada función $f_1(x)$, de la clase H_1, la función

$$\bar{f}(x) = \frac{f_1(x)}{(1 - x^2)^{\frac{m}{2}}}$$

es continua en $[-1, 1]$, con esto queda demostrado el lema para las funciones de la clase H_1.

Consideremos cierta función $f(x)$, continua en el segmento $[-1, 1]$, que se anule en sus extremos. Es evidente que esta función se puede aproximar uniformemente mediante una función

$f_1(x)$ de la clase H_1 con una exactitud de $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$|f(x) - f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aproximando $f_1(x)$ por una combinación lineal de funciones adjuntas, con una exactitud de $\frac{\varepsilon}{2}$,

$$|f_1(x) - \Sigma_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Sigma_1(x) = \sum_{n=m}^{n_0} c_n P_n^{(m)}(x),$$

se obtiene la desigualdad

$$|f(x) - \Sigma_1(x)| < \varepsilon,$$

que demuestra el lema.

Utilizando este lema, es fácil demostrar la plenitud del sistema de funciones adjuntas y, con esto, su carácter cerrado.

Recuérdese que un sistema de funciones $\{\varphi_n(x)\}$ se llama completo en cierto segmento $[a, b]$, si cualquier función $F(x)$, continua en $[a, b]$, se puede aproximar en media, con cualquier grado de exactitud, mediante una combinación de estas funciones:

$$\int_a^b [F(x) - \sum_{n=1}^{n_0} c_n \varphi_n(x)]^2 dx < \varepsilon, \quad \text{si} \quad n_0 > N(\varepsilon).$$

Es evidente que cualquier función, continua en el segmento $[-1, 1]$, se puede aproximar en media, con cualquier grado de exactitud, mediante la función $f(x)$, continua en $[-1, 1]$ y que se anule para $x = \pm 1$:

$$\int_{-1}^{1} [F(x) - f(x)]^2 dx < \varepsilon'.$$

Tomando una combinación lineal de funciones adjuntas que se aproximen uniformemente a la función $f(x)$,

$$|f(x) - \Sigma_1(x)| < \varepsilon'',$$

y aplicando la desigualdad

$$(a + b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2),$$

se obtiene:

$$\int_{-1}^{1} [F(x) - \Sigma_1]^2 dx \leqslant 2 \int_{-1}^{1} [F(x) - f(x)]^2 dx + 2 \int_{-1}^{1} [f(x) - \Sigma_1]^2 dx < \varepsilon$$

$$(\text{si } 2\varepsilon' + 4(\varepsilon'')^2 \leqslant \varepsilon),$$

lo cual demuestra la plenitud y, con ella, la propiedad cerrada del sistema de funciones adjuntas.

§ 3. POLINOMIOS ARMONICOS Y FUNCIONES ESFERICAS

1. Polinomios armónicos. Se llama polinomio armónico a un polinomio homogéneo que satisfaga a la ecuación de Laplace

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \qquad (1)$$

No es difícil comprobar que los primeros dos polinomios armónicos homogéneos tienen la forma

$$u_1(x, y, z) = Ax + By + Cz,$$
$$u_2(x, y, z) = Ax^2 + By^2 - (A + B)z^2 + Cxy + Dxz + Eyz,$$

donde A, B, C, D, E son coeficientes arbitrarios.

Determinemos el número de polinomios homogéneos armónicos linealmente independientes de grado n:

$$u_n = \sum_{p+q+r=n} \alpha_{p,q,r} x^p y^q z^r. \qquad (2)$$

Una función homogénea entera de grado n tiene $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coeficientes. En efecto, el segundo miembro de la igualdad (2) se puede representar en la forma

$$\alpha_{0,0,n} z^n + (\alpha_{1,0,n-1} x + \alpha_{0,1,n-1} y) z^{n-1} + \ldots + (\alpha_{n-1,0,1} x^{n-1} + \alpha_{n-2,1,1} x^{n-2} y + \ldots + \alpha_{0,n-1,1} y^{n-1}) z + (\alpha_{n,0,0} x^n + \alpha_{n-1,1,0} x^{n-1} y + \ldots + \alpha_{0,n,0} y^n) z^0.$$

En z^n se tiene un coeficiente, en z^{n-1}, dos, . . ., en z se tienen n coeficientes, y en z^0 el número de éstos es igual a $(n+1)$, de forma que el número total de coeficientes es igual a

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \qquad (3)$$

La ecuación (1) impone a los coeficientes $\frac{n(n-1)}{2}$ relaciones lineales homogéneas, puesto que Δu_n es una función homogénea de grado $n-2$. De esta manera, el polinomio debe tener no menos de $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = 2n + 1$ coeficientes independientes. Si las $\frac{(n-1)n}{2}$ relaciones indicadas fuesen lineal-

mente dependientes, el número de coeficientes independientes sería mayor que $2n+1$.

Demostremos que sólo $2n+1$ coeficientes son linealmente independientes. Los coeficientes $\alpha_{p,q,r}$ de un polinomio homogéneo se pueden representar en la forma

$$\alpha_{p,q,r}=\frac{1}{p!q!r!}\frac{\partial^n u_n}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r}.$$

Si u_n es un polinomio armónico, entonces $\alpha_{p,q,r}$, para $r\geqslant 2$, se pueden expresar mediante los coeficientes $\alpha_{p,q,0}$ y $\alpha_{p,q,1}$, cuyo número es exactamente igual a $2n+1$.

Efectivamente,

$$\alpha_{p,q,r}=\frac{1}{p!q!r!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^{r-2}}\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{p!q!r!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^{r-2}}\left[-\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right]=$$

$$=\beta_1\alpha_{p+2,q,r-2}+\beta_2\alpha_{p,q+2,r-2}.$$

Haciendo lo mismo con los coeficientes $\alpha_{p+2,q,r-2}$ y $\alpha_{p,q+2,r-2}$, expresaremos, al fin de cuentas, $\alpha_{p,q,r}$ mediante coeficientes del tipo $\alpha_{p,q,0}$ $(p+q=n)$ y $\alpha_{p,q,1}$ $(p+q+1=n)$. El número de coeficientes del tipo $\alpha_{p,q,0}$ es igual a $(n+1)$, y el de $\alpha_{p,q,1}$, a n. De este modo, el número total de coeficientes linealmente independientes y, en consecuencia, de polinomios armónicos independientes de grado n-ésimo, es exactamente igual a $2n+1$.

Los polinomios armónicos homogéneos se llaman *funciones esferoidales.*

2. Funciones esféricas. La forma más simple de introducir las funciones esféricas, en la resolución de la ecuación de Laplace, para una región esferoidal, es el método de separación de las variables.

Buscaremos la solución de la ecuación de Laplace en las variables (r,θ,φ):

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0, \tag{1}$$

haciendo

$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)\,Y(\theta,\varphi).$$

Para la determinación de $R(r)$ se obtiene la ecuación de Euler

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0, \tag{4}$$

y para la determinación de $Y(\theta, \varphi)$, la ecuación

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y + \lambda Y = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0 \tag{5}$$

con la condición complementaria de acotación de la función en toda la esfera.

En particular, la función $Y(\theta, \varphi)$ debe satisfacer a las condiciones

$$\left.\begin{array}{c} Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi), \\ |Y(0, \varphi)| < \infty, \quad |Y(\pi, \varphi)| < \infty. \end{array}\right\} \tag{5'}$$

Las soluciones acotadas de la ecuación (5), que poseen derivadas segundas continuas, se llaman *funciones esféricas*.

La solución del problema para $Y(\theta, \varphi)$ se busca también por el método de separación de las variables, haciendo

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\,\Phi(\varphi).$$

La función $\Phi(\varphi)$ satisface a la ecuación

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0$$

y a la condición de periodicidad

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

El problema para $\Phi(\varphi)$ tiene solución sólo para un $\mu = m^2$ entero y las soluciones linealmente independientes son las funciones $\cos m\varphi$ y $\operatorname{sen} m\varphi$. La función $\Theta(\theta)$ se determina de la ecuación

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)\Theta = 0$$

y de las condiciones de acotación para $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

Introduciendo la variable

$$t = \cos\theta$$

y denotando $X(t)\,|_{t=\cos\theta} = X(\cos\theta) = \Theta(\theta)$, se obtiene, para $X(t)$, la ecuación de las funciones adjuntas

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dX}{dt}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-t^2}\right)X = 0 \quad (-1 < t < 1). \tag{6}$$

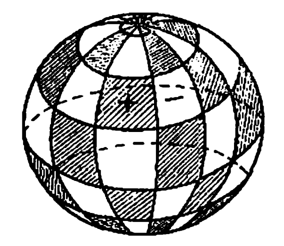


Fig. 103

La ecuación (6), como ya vimos en el § 2, admite soluciones acotadas solamente para $\lambda = n(n+1)$:

$$X(t)|_{t=\cos\theta} = P_n^{(m)}(t)|_{t=\cos\theta} = P_n^{(m)}(\cos\theta) = \Theta(\theta),$$

donde $m \leqslant n$.

Escribamos el sistema de funciones esféricas de n-ésimo orden obtenido. Convendremos en escribir el índice superior negativo a las funciones que contienen $\cos k\varphi$ y el positivo, a las que contienen $\operatorname{sen} k\varphi$. Entonces, tendremos:

$$\left.\begin{array}{ll} m=0 & Y_n^{(0)}(\theta,\varphi) = P_n(\cos\theta), \\ m=1 & Y_n^{(-1)}(\theta,\varphi) = P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi, \\ & Y_n^{(1)}(\theta,\varphi) = P_n^{(1)}(\cos\theta)\operatorname{sen}\varphi, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m=k & Y_n^{(-k)}(\theta,\varphi) = P_n^{(k)}(\cos\theta)\cos k\varphi, \\ & Y_n^{(k)}(\theta,\varphi) = P_n^{(k)}(\cos\theta)\operatorname{sen} k\varphi \\ & (k = 1, 2, \ldots, n). \end{array}\right\} \qquad (7)$$

El número de funciones esféricas distintas de n-ésimo orden $Y_n^{(m)}$ es igual a $2n+1$. La combinación lineal de estas $2n+1$ funciones esféricas (7)

$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\operatorname{sen} m\varphi)\, P_n^{(m)}(\cos\theta), \qquad (7^*)$$

o bien

$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=-n}^{n} C_{mn} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),$$

donde

$$C_{mn} = \begin{cases} A_{nm} & \text{para} \quad m \leqslant 0, \\ B_{nm} & \text{para} \quad m > 0, \end{cases}$$

es también una función esférica, y se llama armónico esférico.

Las funciones $Y_n^{(0)} = P_n(\cos\theta)$ no dependen de φ y se llaman *zonales*. Como $P_n(t)$ tiene, en virtud del lema del § 1, p. 6, exactamente n ceros dentro del intervalo $(-1, +1)$, la esfera se divide en $(n+1)$ zonas de latitud, dentro de las cuales la función zonal conserva su signo constante.

Estudiemos el comportamiento de las funciones

$$Y_n^{(\pm k)} = \operatorname{sen}^k\theta \left[\frac{d^k}{dt^k} P_n(t)\right]_{t=\cos\theta} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} k\varphi, \\ \cos k\varphi \end{array} \right.$$

en la esfera. Como $\operatorname{sen}\theta$ se anula en los polos, $\operatorname{sen} k\varphi$ ó $\cos k\varphi$ se anula en $2k$ meridianos y $\frac{d^k}{dt^k} P_n(t)$, en virtud del mismo lema, en $(n-k)$ paralelos, toda la esfera se divide en parcelas, en las cuales $Y_n^{(\pm k)}$ mantiene su signo constante (fig. 103). Las funciones $Y_n^{(\pm k)}$ (para $k > 0$) se denominan *teserales*.

Volvamos ahora a la determinación de la función R. Buscaremos a $R(r)$ en la forma

$$R = r^\sigma.$$

Sustituyendo la forma buscada de la solución en la ecuación (4), se obtiene la ecuación característica para la determinación de σ:

$$\sigma(\sigma+1) - n(n+1) = 0,$$

de donde se hallan dos valores de σ:

$$\sigma = n \quad \text{y} \quad \sigma = -(n+1).$$

Por consiguiente, las soluciones particulares de la ecuación de Laplace son las funciones

$$r^n Y_n^{(k)}(\theta, \varphi), \tag{7'}$$

$$r^{-(n+1)} Y_n^{(k)}(\theta, \varphi), \tag{7''}$$

la primera de las cuales corresponde, evidentemente, a la solución de los problemas interiores, y la segunda, a la de los exteriores (véase el § 4, p. 1).

Demostremos que las soluciones halladas de la ecuación de Laplace son polinomios homogéneos de n-ésimo grado. El término general, por ejemplo, en la fórmula (7'), se puede escribir como sigue:

$$v = r^n \operatorname{sen}^k\theta \cos k\varphi \cos^{n-k-2q}\theta,$$

donde q varía desde 0 hasta $\frac{n-k}{2}$. La función v se puede representar como el producto de tres polinomios:

$$v = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3,$$

donde

$$u_1 = r^k \operatorname{sen}^k \theta \cos k\varphi = \operatorname{Re}[r \operatorname{sen} \theta e^{i\varphi}]^k = \operatorname{Re}[(x+iy)^k],$$
$$u_2 = r^{n-k-2q} \cos^{n-k-2q} \theta = z^{n-k-2q},$$
$$u_3 = r^{2q} = (x^2+y^2+z^2)^q.$$

De aquí queda claro que la función $r^n Y_n^{(k)}(\theta, \varphi)$ es un polinomio homogéneo armónico de grado $k+n-k-2q+2q=n$.

Evidentemente, las funciones esféricas son los valores de las funciones esferoidales (7′) y (7″) en la esfera de radio unitario.

3. Ortogonalidad del sistema de funciones esféricas. Demostremos que las funciones esféricas que corresponden a distintos valores de λ son ortogonales en la superficie Σ de la esfera. Supongamos que Y_1 e Y_2 satisfacen a las ecuaciones

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y_1 + \lambda_1 Y_1 = 0; \quad \Delta_{\theta,\varphi} Y_2 + \lambda_2 Y_2 = 0, \tag{5}$$

donde

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

No es difícil comprobar que tiene lugar la fórmula

$$\iint_\Sigma Y_2 \Delta_{\theta,\varphi} Y_1 \, d\Omega = -\iint_\Sigma \left\{\frac{\partial Y_1}{\partial\theta}\frac{\partial Y_2}{\partial\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial Y_1}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial Y_2}{\partial\varphi}\right\} d\Omega \tag{8}$$

$$(d\Omega = \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi),$$

que se obtiene fácilmente integrando por partes.

En la superficie de la esfera, se verifica que

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial\theta} \boldsymbol{i}_\theta + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{i}_\varphi,$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\operatorname{sen}\theta A_\theta) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right],$$

de manera que

$$\Delta_{\theta,\varphi} u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$$

y la fórmula (8) se puede escribir como sigue:

$$\iint_\Sigma Y_2 \Delta Y_1 \, d\Omega = -\iint_\Sigma \operatorname{grad} Y_1 \cdot \operatorname{grad} Y_2 \cdot d\Omega.$$

Cambiando de lugar en la fórmula (8) las funciones Y_1 e Y_2 y restando la fórmula obtenida de la (8), tendremos:

$$J = \iint_{\Sigma} \{Y_2 \Delta_{\theta,\varphi} Y_1 - Y_1 \Delta_{\theta,\varphi} Y_2\} \, d\Omega = 0. \tag{9}$$

Las fórmulas (8) y (9) son las fórmulas de Green para el operador de las funciones esféricas.

De la fórmula (9) se deduce fácilmente la ortogonalidad de las funciones Y_1 e Y_2. En efecto, aplicando la ecuación (5), de la fórmula (9) se obtiene que

$$J = (\lambda_2 - \lambda_1) \iint_{\Sigma} Y_1 Y_2 \, d\Omega = 0,$$

de donde, para $\lambda_1 \neq \lambda_2$, será

$$\iint_{\Sigma} Y_1 Y_2 \, d\Omega = 0,$$

o bien

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_1(\theta, \varphi) \, Y_2(\theta, \varphi) \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi = 0.$$

Queda así demostrada la ortogonalidad de las funciones esféricas que corresponden a diferentes λ.

Más arriba fue obtenido, para $\lambda = n(n+1)$, el sistema $2n+1$ de funciones esféricas de n-ésimo orden. Demostremos que estas **funciones esféricas son ortogonales dos a dos en la esfera.**

Sean $Y_n^{(k_1)}$ e $Y_n^{(k_2)}$ dos funciones esféricas. Integrando su producto y aplicando la fórmula (9) del § 2, se obtiene:

$$\iint_{\Sigma} Y_n^{(k_1)} Y_n^{(k_2)} \, d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_n^{(k_1)}(\theta, \varphi) \, Y_n^{(k_2)}(\theta, \varphi) \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos k_1 \varphi \cos k_2 \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi} P_n^{(k_1)}(\cos \theta) \, P_n^{(k_2)}(\cos \theta) \operatorname{sen} \theta \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos k_1 \varphi \cos k_2 \varphi \, d\varphi \int_{-1}^{+1} P_n^{(k_1)}(t) \, P_n^{(k_2)}(t) \, dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{para } k_1 \neq k_2, \\ \dfrac{2\pi}{2n+1} \dfrac{(n+k)!}{(n-k)!} & \text{para } k_1 = k_2 = k \neq 0, \\ 2\pi \cdot \dfrac{2}{2n+1} & \text{para } k_1 = k_2 = 0, \end{array} \right\} \tag{8'}$$

es decir, las funciones esféricas, determinadas por la fórmula (7)

forman un sistema ortogonal en la región $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ y tienen el cuadrado de la norma igual a

$$\|Y_n^{(k)}\|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [Y_n^{(k)}(\theta, \varphi)]^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{2}{2n+1}\pi\varepsilon_k \frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \qquad (8')$$

donde $\varepsilon_0 = 2$, $\varepsilon_k = 1$ para $k > 0$.

Suponiendo que es posible desarrollar una función arbitraria $f(\theta, \varphi)$ en serie por funciones esféricas (la posibilidad de este desarrollo, para una función de segunda derivada continua, será fundamentada con detalle más abajo, en el p. 5), que admita integración término a término, se obtiene:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\operatorname{sen} m\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

donde A_{nm} y B_{nm} son los coeficientes de Fourier, que se determinan por las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi}{\|Y_n^{(m)}\|^2}, \\ B_{nm} &= \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta)\operatorname{sen} m\varphi \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi}{\|Y_n^{(m)}\|^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\|Y_n^{(m)}\|^2 = \frac{2\pi\varepsilon_m}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{para } m = 0, \\ 1 & \text{para } m > 0. \end{cases}$$

La solución general de la ecuación de Laplace se puede representar en la forma

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta, \varphi)$$

para el problema de contorno interior, o bien

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi)$$

para el exterior, donde

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\{\alpha_{nm}\cos m\varphi + \beta_{nm}\operatorname{sen} m\varphi\} P_n^{(m)}(\cos\theta)$$

es un armónico esférico.

4. Plenitud del sistema de funciones esféricas. Demostremos que el sistema de funciones esféricas, determinadas por la fórmula (7), es completo. Mostremos, primeramente, que cualquier función $f(\theta, \varphi)$, con derivadas segundas continuas, se puede aproximar uniformemente por cierto polinomio de funciones esféricas.

Tomemos el desarrollo de esta función en serie de Fourier:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m(\theta) \cos m\varphi + B_m(\theta) \operatorname{sen} m\varphi].$$

Utilizando la acotación de la derivada segunda, es fácil apreciar los coeficientes A_m y B_m de este desarrollo:

$$|A_m| < \frac{M}{m^2}; \qquad |B_m| < \frac{M}{m^2},$$

donde

$$M = \text{máx}\,|f_{\varphi\varphi}|.$$

De aquí se deduce que, para el resto de la serie de Fourier, tiene lugar la apreciación uniforme

$$|f - \sum_{m=0}^{m_0} [A_m(\theta) \cos m\varphi + B_m(\theta) \operatorname{sen} m\varphi]| =$$

$$= |R_{m_0}| < 2M \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \varepsilon', \quad (10)$$

donde $\varepsilon' > 0$ es un número cualquiera, fijo de antemano.

En base al p. 3 del § 2, los coeficientes de Fourier $A_m(\theta)$ y $B_m(\theta)$, los cuales son funciones continuas de θ, que se anulan para θ igual a 0 y π, se pueden aproximar uniformemente por combinaciones lineales de las funciones adjuntas de m-ésimo orden.

$$|A_m(\theta) - \sum_{k=0}^{n} a_k P_k^{(m)}(\cos\theta)| < \frac{\varepsilon'}{2m_0 + 1},$$

$$|B_m(\theta) - \sum_{k=0}^{n} b_k P_k^{(m)}(\cos\theta)| < \frac{\varepsilon'}{2m_0 + 1}. \quad (11)$$

Entonces, de las desigualdades (10) y (11) se seguirá que

$$|f(\theta, \varphi) - \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{k=0}^{n} [a_k P_k^{(m)}(\cos\theta) \cos m\varphi +$$

$$+ b_k P_k^{(m)}(\cos\theta) \operatorname{sen} m\varphi]| < 2\varepsilon', \quad (12)$$

lo cual demuestra la posibilidad de aproximar uniformemente cualquier función $f(\theta, \varphi)$, derivable dos veces, por un polinomio de funciones esféricas. De aquí se deduce que también cualquier función continua se puede aproximar uniformemente por un polinomio de funciones esféricas, lo cual demuestra, precisamente, la plenitud del sistema de funciones determinadas por la fórmula (7). De la plenitud de este sistema se deduce su carácter cerrado.

De esta forma, queda demostrado que la ecuación de las funciones esféricas no tiene soluciones acotadas para $\lambda \neq n(n+1)$ y que cualquier función esférica de n-ésimo orden (para $\lambda = n(n+1)$) se puede representar mediante la fórmula (7*).

5. Desarrollo en funciones esféricas. Las funciones esféricas son funciones propias de la ecuación

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\lambda u=0, \text{ o bien } \Delta_{\theta,\varphi}u+\lambda u=0 \tag{13}$$

en la superficie $\sum$ de la esfera ($0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), con las condiciones complementarias de acotación.

Para fundamentar el desarrollo de una función arbitraria $f(\theta, \varphi)$ con derivadas segundas continuas en serie en las funciones esféricas, pasemos a la ecuación integral correspondiente. Con este fin, escribamos la función de la fuente de la ecuación

$$\Delta_{\theta,\varphi}u=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0, \tag{14}$$

que satisfaga a la condición de acotación de la solución $\theta = 0, \pi$.

Como fue indicado más arriba, tiene lugar

$$\Delta_{\theta,\varphi}u=(\operatorname{div}\operatorname{grad}u)_{\theta,\varphi} \tag{15}$$

en la superficie de la esfera. La ecuación (14) se puede considerar como la ecuación de la distribución estacionaria de temperatura, o de la corriente eléctrica estacionaria, en la superficie de la esfera.

Desde este punto de vista, está claro que no se puede escribir la solución de la ecuación homogénea

$$\Delta_{\theta,\varphi}u=0 \tag{16}$$

con singularidad solamente en un punto, puesto que para que pueda existir la temperatura estacionaria, es necesario que la suma de las fuentes y de los sumideros sea igual a cero.

Introduzcamos la función generalizada de la fuente, que en nuestro caso debe ser solución de la ecuación

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = q \qquad \left(q = \frac{1}{4\pi}\right), \tag{17}$$

regular en todas partes, a excepción del polo $\theta = 0$, donde debe tener una singularidad logarítmica. El segundo miembro de la ecuación (17) indica la densidad de las fuentes negativas (sumideros) de calor, que están distribuidas uniformemente por la superficie de la esfera de forma que sea

$$\iint_{\Sigma} q\, d\sigma = 1. \tag{18}$$

Suponiendo que la función buscada de la fuente u es función sólo de la variable θ, se obtiene, para ésta, una ecuación diferencial ordinaria; resolviéndola, se halla:

$$u = -q \ln \operatorname{sen} \theta + c \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \tag{19}$$

Exigiendo que u tenga singularidad sólo para $\theta = 0$, se obtiene:

$$c = -q$$

y

$$u = -2q \ln \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - q \ln 2.$$

Como $u_1 = \text{const}$ es solución de la ecuación homogénea, la función de la fuente G está determinada salvo una constante arbitraria. Por esto, se puede escribir:

$$G = -\frac{1}{2\pi} \ln \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}. \tag{20}$$

Si la fuente se halla en cierto punto M_0, la función de la fuente tiene la forma

$$G(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln \operatorname{sen} \frac{\gamma_{MM_0}}{2}, \tag{21}$$

donde γ_{MM_0} es la distancia angular entre los puntos M_0 (θ_0, φ_0) y M (θ, φ) [1]).

Resolvamos ahora la ecuación no homogénea

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -F(\theta, \varphi). \tag{22}$$

---

[1]) El ángulo γ se determina de la fórmula

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \theta_0 \cos (\varphi - \varphi_0).$$

Esta ecuación puede tener solución regular en todo punto de Σ sólo bajo la condición

$$\iint_{\Sigma} F\,d\sigma = 0, \tag{23}$$

la cual expresa que la suma de las fuentes y de los sumideros debe ser nula. Esto se puede obtener fácilmente de las fórmulas de Green para el operador $\Delta_{\theta,\varphi}$, establecidas en el p. 3.

Demostremos que toda solución de la ecuación (22), que satisfaga a la condición (23), se puede representar en la forma

$$u(M) = \iint_{\Sigma} G(M, P)\,F(P)\,d\sigma_P + A,$$

donde A es cierta constante, y $G(M, P)$, la función de la fuente, determinada por la fórmula (21). Sea M cierto punto fijo de la esfera, en el cual se sitúa el polo norte ($\theta = 0$), y M_1, el punto diametralmente opuesto. Los puntos M y M_1 son puntos singulares de la ecuación (22). Por esto, tracemos en Σ, en estos puntos, círculos pequeños K_ε^M y $K_\varepsilon^{M_1}$ y consideremos la integral

$$I = \iint_{\Sigma_1 = \Sigma - K_\varepsilon^M - K_\varepsilon^{M_1}} (u\,\Delta G - G\,\Delta u)\,d\sigma.$$

Sustituyendo en el segundo miembro las expresiones para Δu y ΔG, se obtiene:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\left[u\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial G}{\partial\theta}\right) - G\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right]d\theta\,d\varphi +$$

$$+\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}\frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta}\int_0^{2\pi}\left[u\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2} - G\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]d\varphi.$$

Teniendo en cuenta que entre corchetes se hallan las derivadas exactas de las expresiones

$$\operatorname{sen}\theta\left[u\frac{\partial G}{\partial\theta} - G\frac{\partial u}{\partial\theta}\right] \quad \text{y} \quad u\frac{\partial G}{\partial\varphi} - G\frac{\partial u}{\partial\varphi} = v,$$

siendo, además, $v|_0^{2\pi} = 0$, se obtiene, después de integrar,

$$I = \int_0^{2\pi}\left[\operatorname{sen}\theta\left(u\frac{\partial G}{\partial\theta} - G\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right]_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\varphi.$$

Continuando, si se tiene en cuenta que

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \theta}\ln \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2},$$

tendremos:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cdot u\right]_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} d\varphi -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{sen}\theta \ln \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial \theta}\,d\varphi\right]_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} = I_1 + I_2.$$

De aquí se aprecia que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_1 = u(M) \quad \text{y} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} I_2 = 0.$$

Por lo tanto,

$$u(M) = \iint_{\Sigma} G(M, P)\, F(P)\, d\sigma_P + A, \qquad (24)$$

donde

$$A = \frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} u\, d\sigma \quad \text{es una constante.}$$

La solución de nuestro problema está determinada salvo una constante aditiva. La solución para la cual se cumple $\iint_{\Sigma} u\, d\sigma = 0$, se determina por la fórmula

$$u(M) = \iint_{\Sigma} G(M, P)\, F(P)\, d\sigma_P.$$

Aplicando (24) a la ecuación de las funciones esféricas $\Delta_{\theta,\varphi}\, u = -\lambda u$, se concluye que

las funciones esféricas, determinadas por la fórmula (7), forman el conjunto de todas las funciones propias linealmente independientes de la ecuación integral

$$u(M) = \lambda \iint_{\Sigma} G(M, P)\, u(P)\, d\sigma_P$$

con núcleo simétrico $G(M, P)$, definido por la fórmula (21).

A esta ecuación se le puede aplicar la teoría general de las ecuaciones integrales de núcleo simétrico. De aquí se deduce que una función arbitraria $f(\theta, \varphi)$ con derivadas segundas, se puede desarrollar en una serie que converge uniforme y absolu-

tamente en las funciones esféricas:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \operatorname{sen} m\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta), \quad (25)$$

donde

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \operatorname{sen} m\varphi) P_n^{(m)}(\cos\theta); \quad (26)$$

A_{nm} y B_{nm} son los coeficientes de Fourier.

§ 4. CIERTOS EJEMPLOS DE APLICACION DE LAS FUNCIONES ESFERICAS

Consideremos varios problemas típicos de la física matemática, que exigen la aplicación de las funciones esféricas.

Recuérdese que la solución general de la ecuación de Laplace en el sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) tiene la forma

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) Y_n(\theta, \varphi),$$

donde $Y_n(\theta, \varphi)$ es un armónico esférico, es decir, una combinación lineal de todas las $2n + 1$ funciones esféricas. Si la solución se busca en la región $r < a$ (problema interior), entonces es $B_n = 0$; para el problema en la región $r > a$ (problema exterior) debe hacerse $A_n = 0$; por último, en el caso de la región $a < r < b$, que no contenga ni $r = 0$ ni $r = \infty$, en la solución figuran, en general, sumandos con r^n y con $\frac{1}{r^{n+1}}$.

1. Problema de Dirichlet para la esfera. Sea dada una esfera de radio a. Ubiquemos en el centro de ésta el origen del sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) y consideremos los dos problemas de Dirichlet:

$$\Delta u = 0 \text{ para } r < a, \ u|_{r=a} = f(\theta, \varphi) \text{ (problema interior)}, \quad (1)$$

$$\Delta u = 0 \text{ para } r > a, \ u|_{r=a} = f(\theta, \varphi) \text{ (problema exterior)}, \quad (1')$$

donde $f = f(\theta, \varphi)$ es una función dada en las superficie de la esfera. Desarrollemos $f(\theta, \varphi)$ en serie en las funciones esfé-

ricas:

$$f(\theta, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi),$$

$$Y_n(\theta, \varphi)=\sum_{m=0}^{n} \{A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \operatorname{sen} m\varphi\} P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

donde A_{nm} y B_{nm} se calculan por las fórmulas (9) del § 3.

Buscaremos la solución del problema interior en la forma

$$u(r, \theta, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n \overline{Y}_n(\theta, \varphi) \quad \text{para} \quad r \leqslant a.$$

Aplicando la condición de frontera para $r = a$ y teniendo en cuenta el desarrollo para $f(\theta, \varphi)$, se halla:

$$\overline{Y}_n(\theta, \varphi) = Y_n(\theta, \varphi).$$

Análogamente se halla la solución del problema exterior (2):

$$u(r, \theta, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi) \quad \text{para} \quad r \geqslant a.$$

2. Esfera conductora en el campo de una carga puntual. Hallemos el campo electrostático de una carga puntual e en el punto P, en presencia de una esfera conductora ideal de radio a. Supondremos que la esfera está conectada a tierra, es decir, que su potencial es igual a cero. Ubiquemos el origen del sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) en el centro O de la esfera, y tracemos el eje polar $(\theta = 0)$ por el punto P; $OP = r_0 > a$.

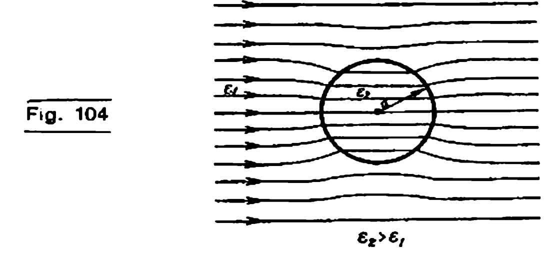
El campo electrostático es $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u$. El potencial $u = u(M)$ $(M = M(r, 0, \varphi))$ satisface a la ecuación de Laplace en todas las partes fuera de la esfera, a excepción del punto $M = P$, en el cual tiene una singularidad del tipo $e/R_{MP} = u_0$, siendo u_0 el potencial de la carga e en el espacio infinito (en ausencia de la esfera). En la superficie de esta última, el potencial es $u|_{r=a} = 0$. Es natural buscar la solución del problema en la forma

$$u(M)=\frac{e}{R}+v(M), \quad R=R_{MP}=\sqrt{r_0^2+r^2-2rr_0\cos\theta},$$

donde v es la solución del problema exterior de Dirichlet

$$\left.\begin{array}{l} \Delta v=0 \quad \text{para} \quad r>a, \\ v|_{r=a}=-\left.\dfrac{e}{R}\right|_{r=a}. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Fig. 104



En nuestro caso, la función f de (1) tiene la forma $f(\theta) = -\left.\frac{e}{R}\right|_{r=a}$. Apliquemos el desarrollo de $\frac{1}{R}$ en serie, para $r < r_0$ (véase el § 1, p. 1):

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) \quad \text{para} \quad r < r_0. \tag{3}$$

La solución del problema exterior de Dirichlet (2) se busca en la forma

$$v = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi).$$

De (2) y (3) se halla que $Y_n = -ea^n r_0^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$. De esta forma, el potencial $u = u(r, \theta)$ ha sido hallado:

$$u = u(r, \theta) = \frac{e}{R} - e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}r_0^{n+1}} P_n(\cos\theta).$$

3. Polarización de una esfera en un campo homogéneo. Supongamos que en un campo electrostático, en un medio homogéneo e isótropo de constante dieléctrica ε_1, se ha ubicado una esfera de radio a, formada por un dieléctrico de constante ε_2 (fig. 104). Buscaremos el potencial del campo creado en forma de la suma

$$u = \begin{cases} u_1 = u_0 + v_1 & \text{fuera de la esfera,} \\ u_2 = u_0 + v_2 & \text{dentro de ésta,} \end{cases}$$

siendo u_0 el potencial del campo sin perturbar (en ausencia de la esfera dieléctrica), y v, la perturbación producida por la esfera

colocada en el campo. El potencial u satisface a la ecuación

$$\Delta u = 0$$

con las condiciones complementarias

$$u_1 = u_2 \quad \text{en} \quad S,$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{en} \quad S,$$

donde S es la frontera de la esfera, u_1 y u_2 son los valores de la función u fuera y dentro de la esfera. De aquí se deduce que el potencial v se determinará por las condiciones

$$\Delta v = 0,$$

$$v_1 = v_2 \quad \text{en} \quad S, \tag{4}$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial v_2}{\partial n} = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \frac{\partial u_0}{\partial n} \quad \text{en} \quad S, \tag{4'}$$

puesto que para la función u_0 se verifica:

$$\Delta u_0 = 0,$$

$$(u_0)_1 = (u_0)_2 \quad \text{en} \quad S,$$

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial n}\right)_1 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial n}\right)_2 \quad \text{en} \quad S.$$

En el segundo miembro de la igualdad (4′) se halla una función conocida de θ y φ, la cual desarrollaremos en funciones esféricas:

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_S = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi).$$

Haciendo

$$v_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \overline{Y}_n(\theta, \varphi); \quad v_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n} \overline{\overline{Y}}_n$$

y utilizando las condiciones de frontera (4) y (4′), se obtiene:

$$\overline{Y}_n = \overline{\overline{Y}}_n$$

y

$$\varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)}{r} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \overline{Y}_n \Big|_{r=a} - \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-1} \overline{Y}_n \Big|_{r=a} =$$

$$= -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sum_{n=0}^{\infty} Y_n,$$

de donde

$$\bar{Y}_n = Y_n \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, a}{\varepsilon_1 (n+1) + \varepsilon_2 n}. \tag{5}$$

Consideremos ahora un caso particular. La esfera se halla en un campo exterior paralelo homogéneo E_0, dirigido a lo largo del eje z. El potencial de este campo es igual a

$$u_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta,$$

de modo que

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_S = \left.\frac{\partial u_0}{\partial r}\right|_{r=a} = -E_0 \cos\theta = Y_1(\theta).$$

La fórmula (5) nos da:

$$\bar{Y}_n = 0 \quad \text{para} \quad n \neq 1,$$

$$\bar{Y}_1 = -E_0 \cos\theta \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, a}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Para el potencial del campo perturbado, se tiene:

$$u_1 = -E_0 z \left[1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\left(\frac{a}{r}\right)^3\right] \quad \text{fuera de la esfera} \quad (r > a),$$

$$u_2 = -E_0 z \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad \text{dentro de la esfera} \quad (r < a),$$

de donde se deduce que

$$E_1 = -\frac{\partial u_1}{\partial z} = \left[1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{2a^3}{r^3}\right] E_0,$$

$$E_2 = -\frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0,$$

es decir, el campo dentro de la esfera es paralelo y homogéneo.

Si $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, las superficies equipotenciales, que siguen siendo planos perpendiculares a la dirección del campo, se distribuirán en forma más rara que en el campo sin perturbar. Las líneas de fuerzas, que son las trayectorias ortogonales de las superficies equipotenciales, se introducirán en la esfera de mayor constante dieléctrica. En el caso en que $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, el cuadro será inverso.

Por este mismo método, se puede obtener la solución del problema sobre la polarización de una esfera en presencia de una

fuente puntual, si se aplica el desarrollo de $\frac{1}{R}$ en funciones esféricas (véase el § 1).

Es de hacer notar que problemas análogos se encuentran en el estudio de campos magnéticos y térmicos, así como también de campos de corriente eléctrica estacionaria, si hay una conexión esférica. cuyas características físicas son distintas de las del medio. Para el problema térmico, en la condición de frontera (3) figurarán, en lugar de ε_1 y ε_2, los coeficientes de conductividad térmica k_1 y k_2; para el problema magnético, las permeabilidades magnéticas μ_1 y μ_2, y para el último problema, las conductibilidades λ_1 y λ_2.

4. Oscilaciones propias de una esfera. Estudiemos el problema sobre las oscilaciones propias de una esfera de radio r_0 con condiciones de frontera nulas de primera especie. Este problema se reduce a la determinación de los valores propios y las funciones propias de la ecuación

$$\Delta v + \lambda v = 0, \tag{5}$$

con la condición de frontera en la superficie de la esfera

$$v = 0. \tag{6}$$

Situando el origen de un sistema de coordenadas esféricas en el centro de la esfera, escribamos la ecuación (5) en la forma

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}v+\lambda v=0, \tag{5'}$$

donde

$$\Delta_{\theta,\varphi}v=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}.$$

Buscaremos la solución por el método de separación de las variables, haciendo

$$v(r, \theta, \varphi) = R(r)\, Y(\theta, \varphi). \tag{6'}$$

Después de sustituir esta expresión en la ecuación (5), se obtiene:

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{R}+\lambda r^2+\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y}{Y}=0, \tag{7}$$

de donde se deduce que

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y + \mu Y = 0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right) R = 0. \tag{9}$$

Resolviendo la ecuación (8) con las condiciones naturales de acotación en los polos de la esfera:

$$|Y|_{\theta=0,\,\pi} < \infty \tag{10}$$

y la condición de periodicidad con respecto a φ: $Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi)$, se obtienen los valores propios

$$\mu = n(n+1), \tag{11}$$

a cada uno de los cuales le corresponden $2n + 1$ funciones esféricas:

$$\left.\begin{aligned} Y_n^{(0)}(\theta, \varphi) &= P_n(\cos\theta), \\ Y_n^{(-j)}(\theta, \varphi) &= P_n^{(j)}(\cos\theta)\cos j\varphi, \\ Y_n^{(j)}(\theta, \varphi) &= P_n^{(j)}(\cos\theta)\,\mathrm{sen}\, j\varphi \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Consideremos ahora la ecuación (9). Teniendo en cuenta la igualdad (11), las condiciones de frontera para $r = r_0$ y la condición natural de acotación para $r = 0$, se obtiene, para la función $R_n(r)$, el siguiente problema de valores propios:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R = 0, \tag{9'}$$

$$R(r_0) = 0, \tag{13}$$

$$|R(0)| < \infty. \tag{14}$$

Mediante el cambio

$$R(r) = \frac{y(r)}{\sqrt{r}}, \tag{15}$$

esta ecuación se reduce a la de Bessel de orden $\left(n + \frac{1}{2}\right)$:

$$y'' + \frac{1}{r}y' + \left[\lambda - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right] y = 0, \tag{16}$$

cuya solución general tiene la forma (véase el Complemento II, I Parte, § 1)

$$y(r) = AJ_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\, r) + BN_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\, r). \tag{17}$$

De la condición de acotación (14), se deduce que

$$B = 0.$$

La condición de frontera (13) nos da:

$$AJ_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\, r_0) = 0.$$

Como se busca la solución no trivial de la ecuación, debe ser $A \neq 0$ y, por consiguiente,

$$J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda}\, r_0) = 0.$$

Denotando mediante $\nu_1^{(n)}, \nu_2^{(n)}, \ldots, \nu_m^{(n)}$ las raíces de la ecuación trascendente

$$J_{n+1/2}(\nu) = 0, \tag{18}$$

se hallan los valores propios:

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{\nu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2. \tag{19}$$

A cada valor propio $\lambda_{m,n}$ le corresponden $2n+1$ funciones propias Introduzcamos la notación

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, J_{n+1/2}(x). \tag{20}$$

Entonces, las funciones propias de la ecuación (5), con la condición de frontera (6), se pueden representar en la forma

$$v_{n,m,j}(r, \theta, \varphi) = \psi_n\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{r_0} r\right) Y_n^{(j)}(\theta, \varphi)$$

$$(n = 0, 1, \ldots; m = 1, 2, \ldots; j = -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n). \tag{21}$$

Consideremos ahora el primer problema interior de contorno para la ecuación ondulatoria

$$\Delta v + k^2 v = 0 \tag{22}$$

con la condición de frontera

$$v = f(\theta, \varphi) \tag{23}$$

en la superficie de la esfera de radio r_0.

De la exposición precedente, queda claro que la solución de este problema se representa en la forma

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} f_{nj} \frac{\psi_n(kr)}{\psi_n(kr_0)} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi), \tag{24}$$

donde f_{nj} son los coeficientes del desarrollo de la función $f(\theta, \varphi)$ por las funciones esféricas $\{Y_n^{(j)}(\theta, \varphi)\}$

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} f_{nj} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi). \qquad (25)$$

Si k^2 coincide con uno de los valores propios,

$$k^2 = \lambda_{m_0 n_0} = \left(\frac{\nu_{m_0}^{(n_0)}}{r_0}\right)^2,$$

el problema de contorno (22) — (23) tiene solución no para toda función $f(\theta, \varphi)$. La fórmula (24) muestra que la condición necesaria y suficiente para que nuestro problema de contorno tenga solución es, en este caso, la anulación de los coeficientes $f_{n_0 j}$:

$$f_{n_0 j} = 0,$$

o bien

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, Y_{n_0}^{(j)}(\theta, \varphi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi = 0.$$

Si estas condiciones se cumplen, la solución se determina por la fórmula (24), en la cual los sumandos que corresponden a $n = n_0$ no se escriben. Sin embargo, aquí la solución no se determina unívocamente, puesto que siempre se le puede agregar cualquier combinación lineal de funciones propias, que corresponden a $k^2 = \lambda_{m_0 n_0}$.

5. Problema exterior de contorno para la esfera. Estudiemos el primer problema exterior de contorno para la esfera (véase el cap. VII, § 3

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad (k^2 > 0),$$
$$v|_{r=r_0} = f(\theta, \varphi),$$
$$v = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{para} \quad r \to \infty,$$
$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial v}{\partial r} + ikv\right) = 0 \quad \text{(condición de irradiación)}.$$

Como fue demostrado en el § 3 del capítulo VII, este problema tiene solución única. Desarrollemos la función buscada y la $f(\theta, \varphi)$ en series en las funciones esféricas:

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} R_n(r)\, Y_n^{(j)}(\theta, \varphi),$$
$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} f_{nj} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi).$$

Los coeficientes del desarrollo $R_n(r)$ satisfarán, evidentemente, a la ecuación

$$R_n'' + \frac{1}{r} R_n' + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R_n = 0,$$

a la condición de frontera

$$R_n(r_0) = f_n$$

y a las condiciones de irradiación cuando $r \to \infty$

$$R_n(r) = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\lim_{r\to\infty} r(R_n' + ikR_n) = 0.$$

La solución general de esta ecuación tiene la forma (véase el p. 4 y el Complemento II, I Parte, § 3)

$$R_n(r) = A_n \zeta_n^{(1)}(kr) + B_n \zeta_n^{(2)}(kr),$$

donde

$$\zeta_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H_{n+1/2}^{(1)}(\rho),$$

$$\zeta_n^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H_{n+1/2}^{(2)}(\rho) \qquad (\rho = kr).$$

Tomando en cuenta las fórmulas asintóticas para las funciones de Hankel $H_n^{(1)}(\rho)$ y $H_n^{(2)}(\rho)$ (véase la I Parte, § 3):

$$H_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i\left[\rho - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]} + \ldots,$$

$$H_n^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i\left[\rho - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]} + \ldots$$

(los puntos suspensivos indican términos de orden mayor de infinidad con respecto a $\frac{1}{\rho}$), se obtienen, para las funciones $\zeta_n^{(1)}$ y $\zeta_n^{(2)}$, las siguientes fórmulas asintóticas:

$$\zeta_n^{(1)}(kr) = \frac{e^{i\left[kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}}{r} + \ldots,$$

$$\zeta_n^{(2)}(kr) = \frac{e^{-i\left[kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}}{r} + \ldots$$

De aquí se ve que sólo la función $\zeta_n^{(2)}$ satisface a la condición de irradiación.

Por esto, tendremos que

$$A_n = 0.$$

Utilizando la condición de frontera para $r = r_0$, se halla:

$$B_{nj} = \frac{f_{nj}}{\zeta_n^{(2)}(kr_0)}.$$

De este modo, se obtiene la función $v(r, \theta, \varphi)$ en la forma

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} \frac{f_{nj}\zeta_n^{(2)}(kr)}{\zeta_n^{(2)}(kr_0)} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi),$$

donde

$$f_{nj} = \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) Y_n^{(j)}(\theta, \varphi) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi}{\| Y_n^{(j)} \|^2},$$

e

$$\| Y_n^{(j)} \|^2 = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} [Y_n^{(j)}]^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{2\pi\varepsilon_j}{2n+1} \cdot \frac{(n+j)!}{(n-j)!},$$

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 2, & j = 0, \\ 1, & j > 0. \end{cases}$$

es el cuadrado de la norma de la función esférica $Y_n^{(j)}(\theta, \varphi)$.

III PARTE

POLINOMIOS DE CHEBISHOV—HERMITE Y CHEBISHOV—LAGUERRE

§ 1 POLINOMIOS DE CHEBISHOV—HERMITE

1. Fórmula diferencial. Definamos los polinomios de Chebishov-Hermite $H_n(x)$, por analogía con los de Legendre, mediante la función generatriz $\Psi(\rho, x)$, haciendo

$$\Psi(\rho, x) = e^{2x\rho - \rho^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{\rho^n}{n!}. \qquad (1)$$

De aquí se deduce, en virtud del teorema de Cauchy, que

$$H_n(x)=\left.\frac{\partial^n \Psi(\rho, x)}{\partial\rho^n}\right|_{\rho=0}=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\Psi(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta=$$

$$=e^{x^2}\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^{-(x-\zeta)^2}}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta, \qquad (2)$$

donde C es un contorno cerrado en el plano de la variable compleja ζ, que encierra al punto $\zeta = 0$. Introduciendo la nueva variable de integración $z = x - \zeta$, se transforma (2) como sigue:

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}}\,dz=$$

$$=(-1)^n e^{x^2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\frac{d^n}{dx^n}\int\limits_{C_1}\frac{e^{-z^2}}{z-x}\,dz\right\}, \qquad (3)$$

donde C_1 es un contorno que abarca al punto $z = x$. En virtud del teorema de Cauchy, la expresión entre llaves es igual a $\frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}$. Como resultado, de (3) se obtiene la fórmula diferencial

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}). \qquad (4)$$

Esta fórmula demuestra que $H_n(x)$ es un polinomio de grado n, siendo, además,

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x). \qquad (5)$$

De (4) se halla que $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, etc.

2. Fórmulas de recurrencia. Derivando la función generatriz con respecto a ρ y x, se halla:

$$\Psi_x - 2\rho\Psi = 0, \quad \Psi_\rho - 2(x-\rho)\Psi = 0. \qquad (6)$$

Sustituyamos la serie (1) para $\Psi(\rho, x)$ en cada identidad de (6). Agrupando los términos de ρ^n e igualándolos a cero, se obtienen dos fórmulas de recurrencia:

$$H'_n(x)=2nH_{n-1}(x). \qquad (7)$$

$$H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0. \qquad (8)$$

La fórmula (8) permite determinar sucesivamente H_n para todo n, sabiendo que $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$. Así, por ejemplo, $H_2(x) = 2xH_1 - 2H_0 = 4x^2 - 2$, $H_3 = 2xH_2 - 4H_1 = 8x^3 - 12x$, etc.

3. Ecuación de Chebishov — Hermite. Hallemos la ecuación a la cual satisface $H_n(x)$. Para esto, utilicemos las fórmulas de recurrencia (7) y (8). Primeramonte, eliminemos de (8) $2nH_{n-1}$, aplicando (7): $H_{n+1} - 2xH_n + H'_n = 0$. Derivemos esta ecuación con respecto a x: $H'_{n+1} - 2xH'_n - 2H_n + H''_n = 0$ y coloquemos aquí $H'_{n+1} = 2(n+1)H'_n$, de (7). Como resultado, se obtiene:

$$H''_n - 2xH'_n + 2nH_n = 0, \quad \text{o bien} \quad \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\frac{dH_n}{dx}\right) + 2ne^{-x^2}H_n = 0. \tag{9}$$

De aquí se aprecia que el polinomio de Chebishov-Hermite es una función propia, que corresponde al valor propio $\lambda = 2n$ del siguiente problema (problema de Sturm-Liouville):

hallar los valores de λ, para los cuales la ecuación de Chebishov — Hermite

$$(e^{-x^2}y')' + \lambda e^{-x^2}y = 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{10}$$

tenga soluciones no triviales, que crezcan, cuando $x \to \infty$, en forma no más rápida que una potencia finita de x.

Se podría buscar la solución de este problema en forma de la serie de potencias $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Sustituyendo esta serie en la ecuación (10), se obtiene, para los coeficientes, la fórmula de recurrencia

$$a_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)}a_n. \tag{11}$$

De la fórmula (11) se ve que, para $\lambda = 2n$, todos los coeficientes a_k son $a_k = 0$ para $k > n$ y la serie se rompe. Sólo para $\lambda = 2n$ se puede cumplir la condición en el infinito. Los polinomios obtenidos están determinados salvo un factor constante. Escogiendo $a_n = 2^n$, se obtienen los polinomios $H_n(x)$.

4. Norma de los polinomios $H_n(x)$. Demostremos (sin aplicar la teoría general) que los polinomios de Chebishov — Hermite forman un sistema ortogonal, con densidad e^{-x^2}, en la recta infinita, y calculemos su norma (con densidad $\rho(x) = e^{-x^2}$):

$$\|H_n\| = \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}. \tag{12}$$

Tomemos la ecuación

$$L_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})\,dx.$$

Supongamos, para fijar ideas, que $m \leq n$. Integrando por partes y aplicando la fórmula (7), así como también el hecho de que en el infinito se anula el producto del polinomio por e^{-x^2}, se obtiene:

$$L_{mn} = (-1)^{n-1} 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2})\, dx =$$

$$= (-1)^{n-m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (e^{-x^2})\, dx,$$

puesto que $H_0 = 1$ De aquí se aprecia que

$$L_{mn} = (-1)^{n-m} 2^m m! \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} (e^{-x^2}) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0 \text{ para } m < n.$$

Si $m = n$, entonces será

$$L_{nn} = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi} = \| H_n \|^2.$$

Queda así demostrado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n. \end{cases}$$

En virtud del teorema de Weierstrass, los polinomios de Chebishov — Hermite forman un sistema cerrado y, en consecuencia, hemos hallado todas las soluciones del problema (10), es decir, $\lambda \neq 2n$ no puede ser valor propio.

5. **Funciones de Chebishov — Hermite.** En las aplicaciones (véase la pág. 799), se utilizan frecuentemente las funciones de Chebishov — Hermite

$$\psi_n(x) = h_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad h_n(x) = \frac{H_n(x)}{\| H_n(x) \|},$$

que forman un sistema ortogonal y normalizado, con densidad $\rho(x) = 1$, en el intervalo infinito $-\infty < x < \infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) \psi_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Estas funciones se anulan cuando $x \to \pm\infty$ y satisfacen a la ecuación

$$\psi_n'' + (\lambda - x^2) \psi_n = 0 \quad \text{para} \quad \lambda = 2n +$$

§ 2. POLINOMIOS DE CHEBISHOV—LAGUERRE

1. Fórmula diferencial. Los polinomios de Chebishov — Laguerre $L_n(x)$ serán definidos mediante la función generatriz

$$\Psi(\rho, x) = \frac{1}{1-\rho} e^{-\frac{x\rho}{1-\rho}}. \tag{1}$$

Desarrollándola en serie de potencias:

$$\Psi(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\rho^n, \quad L_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Psi}{\partial \rho^n}\bigg|_{\rho=0} \tag{2}$$

y aplicando el teorema de Cauchy, se halla:

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Psi(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}} d\zeta,$$

donde C es un contorno que encierra al punto $\zeta = 0$. Introduzcamos la nueva variable de integración z, haciendo $\zeta = 1 - \frac{x}{z}$, $d\zeta = \frac{x\,dz}{z^2}$; entonces, será

$$L_n(x) = e^x \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{z^n e^{-z}}{(z-x)^{n+1}} dz, \tag{3}$$

donde C_1 es un contorno que contiene al punto $z = x$. La fórmula (3) nos da:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}). \tag{4}$$

De aquí se concluye que $L_n(x)$ es un polinomio de n-ésimo grado. En particular, se tiene que $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = 1 - x$.

2. Fórmulas de recurrencia. Derivando $\Psi(\rho, x)$ con respecto a ρ y a x, se obtienen las dos identidades

$$(1-\rho)^2 \Psi_\rho - (1-\rho-x)\Psi = 0, \tag{5}$$

$$(1-\rho)\Psi_x + \rho\Psi = 0. \tag{6}$$

Sustituyendo la serie (2) en (5) y (6) e igualando a cero los coeficientes de ρ^{n+1}, se obtienen las fórmulas de recurrencia

$$(n+1)L_{n+1} - (2n+1-x)L_n + nL_{n-1} = 0, \tag{7}$$

$$L'_{n+1} - L'_n + L_n = 0. \tag{8}$$

La fórmula (7) establece la relación entre los polinomios L_{n+1}, L_n, L_{n-1} y permite determinar sucesivamente todos los L_n; por ejemplo:

$$L_2(x) = \frac{1}{2}[(3-x)L_1 - L_0] = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$$

Deduzcamos otra fórmula de recurrencia:

$$xL'_n + (n+1-x)L_n - (n+1)L_{n+1} = 0. \qquad (9)$$

Para esto, sustituyamos n por $n+1$ en (7) y derivemos con respecto a x:

$$(n+2)L'_{n+2} - (2n+3-x)L'_{n+1} + L_{n+1} + (n+1)L'_n = 0;$$

aplicando dos veces la fórmula (8), se eliminan aquí L'_{n+2} y L'_{n+1}; como resultado, se obtiene (9).

3. Ecuación de Chebishov — Laguerre. Hallemos la ecuación cuya solución es $L_n(x)$. Derivando (9) con respecto a x, se obtiene: $xL''_n + (n+2-x)L'_n - L_n - (n+1)L'_{n+1} = 0$, después de lo cual se elimina L'_{n+1} mediante (8). Se obtiene así la ecuación para L_n:

$$xL''_n + (1-x)L'_n + nL_n = 0,$$

$$\text{o bien}\quad \frac{d}{dx}\left(xe^{-x}\frac{dL_n}{dx}\right) + ne^{-x}L_n = 0, \qquad (10)$$

la cual se llama ecuación de Chebishov — Laguerre.

Queda así demostrado que $L_n(x)$ es la función propia que corresponde al valor propio $\lambda = n$ del problema:

hallar los valores de λ, para los cuales la ecuación

$$(xe^{-x}y')' + \lambda e^{-x}y = 0, \quad 0 < x < \infty, \qquad (11)$$

tiene solución no trivial en la región $0 < x < \infty$, acotada en $x = 0$ y que crece, cuando $x \to \infty$, en forma no más rápida que una potencia finita de x.

Obsérvese que la ecuación (10) para $L_n(x)$ puede ser obtenida si se deriva $n+2$ veces la función $z = x^n e^{-x}$ y se aplica la fórmula diferencial (4).

4. Ortogonalidad y norma de los polinomios de Chebishov — Laguerre. Demostremos la ortogonalidad y la normalización, con densidad e^{-x}, de los polinomios $L_n(x)$, partiendo de la fórmula (4). Tomemos la integral

$$J_{mn} = \int_0^\infty L_m(x)L_n(x)e^{-x}\,dx = \frac{1}{n!}\int_0^\infty L_m(x)\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\,dx.$$

Sea $m \leqslant n$. Integrando m veces por partes y teniendo en cuenta que, por la presencia de un factor de la forma $x^k e^{-x}$ ($k > 0$), todos los términos sin integrales se anulan, se obtiene:

$$J_{mn} = (-1)^m \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{d^m L_m}{dx^m} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^n e^{-x})\, dx. \tag{12}$$

Si $m < n$, integrando una vez más se halla que $J_{mn} = 0$, puesto que $\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} L_m = 0$. En el caso en que $m = n$, se tiene:

$$\frac{d^n L_n}{dx^n} = (-1)^n$$

y

$$J_{nn} = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty (-1)^n x^n e^{-x}\, dx = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1 = \| L_n \|^2. \tag{13}$$

Así, pues, los polinomios de Chebishov — Laguerre forman un sistema de funciones ortonormal, con densidad e^{-x}:

$$\int_0^\infty L_m(x) L_n(x) e^{-x}\, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases} \tag{14}$$

5. Polinomios generalizados de Chebishov — Laguerre. En el estudio del movimiento de un electrón en el campo de fuerzas de Coulomb, así como también en otros problemas de la física moderna, se encuentran, conjuntamente con los polinomios $L_n(x)$, los polinomios generalizados de Chebishov — Laguerre $L_n^s(x)$. La teoría de estos polinomios se puede construir en forma análoga a los puntos 1—4, partiendo de la función generatriz

$$\Psi^s(\rho, x) = \frac{1}{(1-\rho)^{s+1}} e^{-\frac{x\rho}{1-\rho}}, \qquad s > -1 \tag{15}$$

y desarrollándola en serie de potencias de ρ:

$$\Psi^s(\rho, x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^s(x) \rho^n; \quad L_n^s(x) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \Psi^s}{\partial \rho^n} (\rho, x) |_{\rho=0}.$$

Repitiendo los razonamientos efectuados para $s = 0$ en el p. 1, se halla:

$$L_n^s(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\Psi^s(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = x^{-s} e^x \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{z^{n+s} e^{-z}}{(z-x)^{n+1}} dz.$$

De aquí se sigue que

$$L_n^s(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{n+s} e^{-x}), \tag{16}$$

es decir, que $L_n^s(x)$ es efectivamente un polinomio de n-ésimo grado. En particular, será $L_0^s(x) = 1$, $L_1^s(x) = 1 + s - x$.

Introduciendo la función $z = x^{n+s} e^{-x}$ y derivándola $(n+2)$ veces con respecto a x, se halla, para la función $u = \frac{d^n z}{dx^n}$, la ecuación $xu'' + (x + 1 - s) u' + (n + 1) u = 0$. Calculemos las derivadas de $L_n^s(x) = \frac{1}{n!} x^{-s} e^x u$ y tengamos en cuenta, además, la ecuación para u. Entonces, se obtiene la ecuación

$$x(L_n^s)'' - (x - s - 1)(L_n^s)' + nL_n^s = 0, \tag{17}$$

a la cual satisfacen los polinomios generalizados $L_n^s(x)$. Queda así demostrado que los polinomios generalizados de Chebishov — Laguerre son funciones propias, que corresponden a los valores propios

$$\lambda_n = s + \frac{s+1}{2},$$

del siguiente problema:

hallar los valores de λ, para los cuales la ecuación

$$xy'' + (s + 1 - x) y' + \left(\lambda - \frac{s+1}{2}\right) y = 0,$$

o bien

$$(x^{s+1} e^{-x} y')' + x^s e^{-x}\left(\lambda - \frac{s+1}{2}\right) y = 0 \tag{18}$$

tenga, en la región $0 \leqslant x < \infty$, solución no trivial, acotada para $x = 0$ y que crezca, cuando $x \to \infty$, no más rápidamente que una potencia finita de x.

Partiendo de la fórmula diferencial (16) y razonando en forma análoga a como lo hicimos en el p. 4, no es difícil demostrar que los polinomios L_n^s forman un sistema de funciones ortogonal, con densidad $e^{-x}x^s$:

$$\int_0^\infty L_n^s(x) L_m^s(x) e^{-x} x^s \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \ (s > -1), \\ \dfrac{\Gamma(n+s+1)}{n!}, & m = n. \end{cases}$$

A los polinomios de Chebishov — Laguerre $L_n^s(x)$ les corresponden las funciones ortogonales y normalizadas, con densidad $\rho(x) = 1$,

$$\psi_n^s(x) = x^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{x}{2}} l_n^s(x),$$

donde

$$\| l_n^s \| = 1,$$

las cuales son soluciones de la ecuación

$$(x\psi')' + \left(\lambda - \frac{x}{4} - \frac{s^2}{4x}\right)\psi = 0, \qquad (19)$$

con las siguientes condiciones de frontera: acotación en el punto $x = 0$ y anulación cuando $x \to \infty$, que corresponden a los valores propios

$$\lambda_n = n + \frac{s+1}{2}.$$

De la fórmula (18) se aprecia que $L_n^0(x) = L_n(x)$ para λ_n igual a $n + \frac{1}{2}$ (si se cambia λ por $\lambda + \frac{1}{2}$ en la ecuación (18), ésta coincidirá, para $s = 0$, con la de Chebishov — Laguerre (10)).

Para concluir, hagamos notar que, en virtud del teorema de Weierstrass, los sistemas ortogonales de polinomios $\{L_n(x)\}$ y $\{L_n^s(x)\}$ son cerrados. Por esto, hemos hallado todas las funciones propias de los problemas (10) y (18).

§ 3. PROBLEMAS SIMPLES PARA LA ECUACION DE SCHRÖDINGER[1]

1. Ecuación de Schrödinger. En la mecánica cuántica, el comportamiento de una partícula que se halla en un campo de fuerzas potenciales se describe por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\psi + U(x, y, z, t)\,\psi, \qquad (1)$$

---

[1] Los problemas analizados aquí para la ecuación de Schrodinger, constituyen ejemplos de aplicación de los polinomios de Chebishov—Hermite y Chebishov—Laguerre. La exposición que sigue a continuación no pretende tratar la totalidad de los problemas relacionados con dicha ecuación. En el programa universitario, la mecánica cuántica se estudia después del curso de Física matemática

donde $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27}$ erg·seg es la constante de Planck, $i = \sqrt{-1}$; μ es la masa de la partícula, U, su energía potencial en el campo de fuerzas; $\psi = \psi(x, y, z, t)$, la función ondulatoria.

Si las fuerzas no dependen del tiempo, $U = U(x, y, z)$, son posibles estados estacionarios con un estado dado de la energía, es decir, existen soluciones del tipo

$$\psi = \psi^0(x, y, z)\, e^{-\frac{iE}{\hbar}t}, \tag{2}$$

siendo E la energía total de la partícula. Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1), se obtiene la segunda ecuación de Schrödinger

$$\Delta\psi^0 + \frac{2\mu}{\hbar^2}\,E - U)\,\psi^0 = 0, \tag{3}$$

en la cual E hace las veces de valor propio, que debe ser determinado. En lo sucesivo, escribiremos ψ en lugar de φ^0:

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}(E - U)\,\psi = 0. \tag{4}$$

En el caso de ausencia del campo de fuerzas, $U = 0$, la ecuación (4) toma la forma

$$\Delta\psi + \frac{2\mu E}{\hbar^2}\psi = 0. \tag{5}$$

No es difícil apreciar la similitud de esta ecuación con la ecuación ondulatoria de la física clásica

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \tag{6}$$

donde $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ es el número ondulatorio y λ, la longitud de onda. Sin embargo, esta similitud es puramente superficial y formal, en virtud de la diferencia del significado físico de las funciones que figuran en las ecuaciones (5) y (6).

En la ecuación de Schrödinger tiene un significado físico directo no la propia función ψ, sino $|\psi|^2$, la cual se interpreta desde un punto de vista estadístico: la expresión $|\psi|^2\, dx\, dy\, dz$ significa la posibilidad de que la partícula se halle dentro del volumen elemental $dx\, dy\, dz$, en el punto (x, y, z) del espacio.

En correspondencia con esto, la normalización de las funciones propias, que aplicábamos antes con frecuencia con fines de sencillez matemática, adquiere ahora un significado fundamental. La condición de normalización

$$\iiint |\psi|^2\, dx\, dy\, dz = 1 \tag{7}$$

significa que la partícula se halla en cierto lugar del espacio y, por esto, la posibilidad de hallarla en algún punto de éste es igual a la unidad (suceso cierto).

Estudiemos ciertos problemas simples para la ecuación de Schrödinger.

2. Oscilador armónico. La ecuación de Schrödinger para el oscilador armónico adquiere la forma

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2}+(E-U)\psi=0,$$

donde $U=\frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2$, y ω_0 es la frecuencia propia (cíclica) del oscilador. Nuestro problema consistirá en la determinación de los estados estacionarios, es decir, el espectro de los valores propios de la energía E y las funciones propias correspondientes ψ, a partir de la ecuación

$$\psi''+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E-\frac{\mu\omega_0^2}{2}x^2\right)\psi=0 \tag{8}$$

con la condición complementaria de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2dx=1. \tag{9}$$

Introduciendo las notaciones

$$\left.\begin{aligned}\lambda&=\frac{2E}{\hbar\omega_0},\\ x_0&=\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega_0}},\\ \xi&=\frac{x}{x_0},\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

se obtiene para la función $\psi=\psi(\xi)$, después de transformaciones evidentes, la ecuación

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+(\lambda-\xi^2)\psi=0, \tag{11}$$

con la condición complementaria de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\xi = \frac{1}{x_0}. \tag{12}$$

Las soluciones de este problema serán, en virtud del p. 5 del § 1, las funciones

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2} H_n(\xi)}{2^n n! \sqrt{\pi}},$$

que corresponden a los valores propios

$$\lambda_n = 2n + 1.$$

Volviendo a las notaciones originales, se halla:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}, \tag{13}$$

$$E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

En la mecánica clásica, la energía del oscilador

$$E = \frac{p_x^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega_0^2}{2} x^2,$$

donde p_x es el impulso de la partícula, puede tomar una serie continua de valores. Desde el punto de vista de la mecánica cuántica, la energía del oscilador, como lo demuestra la fórmula (14), puede tomar sólo una serie discreta de valores E_n. En este caso, se dice que la energía se cuantifica. El número n, que determina el número del nivel cuántico, es llamado número cuántico principal. En el estado cuántico más bajo, para $n = 0$, la energía del oscilador es diferente de cero e igual a

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega.$$

3. **Rotador.** Hallemos los valores propios de la energía de un rotador de eje libre, es decir, de una partícula que gira a una misma distancia alrededor de un centro inmóvil.

La energía potencial U del rotador conserva un mismo valor en todas las posiciones de la partícula, y se la puede tomar igual a cero, $U = 0$.

En el sistema esférico de coordenadas (r, θ, φ) con origen en el centro inmóvil, la ecuación de Schrödinger para el rotador,

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} E\psi = 0,$$

se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} E\psi = 0. \qquad (15)$$

Aquí se utiliza la condición

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0.$$

Introduciendo, en lugar de la masa μ, el momento de inercia

$$I = \mu r^2,$$

se obtiene:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \lambda\psi = 0,$$

o bien

$$\Delta_{\theta, \varphi}\psi + \lambda\psi = 0, \qquad (16)$$

donde

$$\lambda = \frac{2I}{\hbar^2} E. \qquad (17)$$

De esta manera, se obtiene el problema de contorno sobre los valores propios de la ecuación

$$\Delta_{\theta, \varphi}\psi + \lambda\psi = 0, \qquad (16)$$

con la condición natural de frontera de acotación en los puntos $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ y la condición de normalización

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |\psi|^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi = 1. \qquad (18)$$

Las soluciones de este problema, como se sabe, son las funciones esféricas normalizadas

$$\psi_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2\varepsilon_m \pi (l+m)!}} Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)$$

$$\left(\varepsilon_m = \begin{cases} 2 \text{ para } m = 0 \\ 1 \text{ para } m \neq 0 \end{cases}\right), \tag{19}$$

$$Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = P_l^{(m)}(\cos\theta) \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \operatorname{sen} m\varphi\end{matrix} \quad (m = 0, 1, \ldots, l),$$

que corresponden a los valores propios

$$\lambda = l(l+1). \tag{20}$$

Sustituyendo λ por su valor según la fórmula (17), se obtiene la fórmula para los valores de cuantización de la energía del rotador:

$$E_{lm} = l(l+1)\frac{\hbar^2}{2I}, \qquad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{21}$$

4. Movimiento de un electrón en un campo de Coulomb. Uno de los problemas más sencillos de la mecánica atómica es el problema sobre el movimiento de un electrón en el campo de Coulomb del núcleo, que tiene un gran interés práctico, por cuanto su solución da no solamente la teoría del espectro del hidrógeno, sino también la teoría aproximada de los espectros de los átomos con un electrón de valencia (átomos similares al del hidrógeno), por ejemplo, del átomo de sodio.

En el átomo del hidrógeno, el electrón se halla en el campo electrostático del núcleo (protón), de forma que la energía potencial $U(x, y, z)$ es igual a

$$U = -\frac{e^2}{r}, \tag{22}$$

donde r es la distancia del electrón al núcleo, $-e$, la carga del electrón y $+e$, la del núcleo.

La ecuación de Schrödinger tiene, en este caso, la forma

$$\Delta\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0. \tag{23}$$

Nuestro problema consiste en hallar los valores de E, para los cuales la ecuación (23) admita solución continua en todo el espacio y que satisfaga a la condición de normalización

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y, z)|^2 \, dx\, dy\, dz = 1. \tag{24}$$

Introduzcamos un sistema de coordenadas esféricas con origen en el núcleo, el cual se supone inmóvil:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\psi+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\psi=0 \qquad (25)$$

y busquemos la solución en la forma

$$\psi(r,\vartheta,\varphi)=\chi(r)\,Y_l^{(m)}(\vartheta,\varphi). \qquad (26)$$

Tomando en cuenta la ecuación diferencial para las funciones esféricas $Y_l^{(m)}(\theta,\varphi)$:

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y_l^{(m)}(\theta,\varphi)+l(l+1)\,Y_l^{(m)}(\theta,\varphi)=0,$$

se obtiene:

$$\frac{d^2\chi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\chi}{dr}+\left[\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi=0. \qquad (27)$$

Introduzcamos, como unidad de longitud, la magnitud

$$a=\frac{\hbar^2}{\mu e^2},$$

y como unidad de energía, la magnitud

$$E_0=\frac{\mu e^4}{\hbar^2}=\frac{e^2}{a}.$$

Haciendo

$$\rho=\frac{r}{a},\qquad \varepsilon=\frac{E}{E_0}\qquad (\varepsilon<0), \qquad (28)$$

escribamos la ecuación (27) en la forma

$$\frac{d^2\chi}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d\chi}{d\rho}+\left(2\varepsilon+\frac{2}{\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}\right)\chi=0. \qquad (29)$$

Mediante el cambio

$$\chi=\frac{1}{\sqrt{\rho}}y, \qquad (30)$$

la ecuación (29) se reduce a la forma

$$\frac{d^2y}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dy}{d\rho}+\left(2\varepsilon+\frac{2}{\rho}-\frac{s^2}{4\rho^2}\right)y=0, \qquad (31)$$

donde

$$s = 2l + 1.$$

Introduciendo, como variable independiente, la magnitud

$$x = \rho\sqrt{-8\varepsilon}, \tag{32}$$

se obtiene, en lugar de (31), la ecuación

$$xy'' + y' - \left(\frac{x}{4} + \frac{s^2}{4x}\right)y + y\lambda = 0, \tag{33}$$

o bien

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{x}{4} + \frac{s^2}{4x}\right)y + y\lambda = 0, \tag{33'}$$

donde

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon}}, \tag{34}$$

la cual coincide con la (19), que estudiamos en el § 2.

Los valores propios que hallamos entonces, eran iguales a

$$\lambda = n_r + \frac{s+1}{2},$$

y las funciones propias (determinadas salvo un factor constante) se expresaban mediante los polinomios generalizados de Chebishov — Laguerre $L^s_{n_r}$:

$$y_{n_r}(x) = x^{\frac{s}{2}}e^{-\frac{x}{2}}L^s_{n_r}(x), \tag{35}$$

donde $L^s_{n_r}(x)$ se determinan por la fórmula (16) del § 2.

Tomando en cuenta que

$$s = 2l + 1,$$

se obtiene:

$$\lambda = n_r + l + 1 = n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{36}$$

El entero n se llama número cuántico principal, n_r, número cuántico radial, y l, número cuántico azimutal.

Sustituyendo λ por su expresión de acuerdo con las fórmulas (34) y (28), se obtienen los valores de cuantización de la energía:

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}. \tag{37}$$

Estos dependen solamente del número cuántico principal n.

Hagamos E igual a la energía del cuanto $\hbar\omega = h\nu$, $E = -h\nu$, donde $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ es la frecuencia. Entonces, tendremos:

$$\nu = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2 h} = \frac{R}{n^2}, \tag{38}$$

donde $R = \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 h} = \frac{\mu e^4}{4\pi\hbar^3}$ es la llamada constante de Rydberg.

Hallemos las frecuencias de las líneas espectrales. La frecuencia ν_{nn_1} que se observa en la línea espectral, corresponde al paso del estado con energía E_n al estado con energía E_{n_1}.

La frecuencia ν_{nn_1} del cuanto, que se emite en este paso cuántico, es igual a

$$\nu_{nn_1} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{39}$$

Haciendo $n_1 = 1$ y dando a n los valores $n = 2, 3, \ldots$, se obtiene una sucesión de líneas, que forman la llamada serie de Lyman

$$\nu_{nn_1} = R\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Continuando, los valores $n_1 = 2$, $n = 3, 4, \ldots$ dan la serie de Balmer

$$\nu_{nn_1} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

los valores $n_1 = 3$, $n = 4, 5, \ldots$, la serie de Paschen

$$\nu_{nn_1} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Pasemos ahora a determinar las funciones propias del átomo de hidrógeno. Para esto, en virtud de la fórmula (26), es suficiente hallar las funciones radiales $\chi(\rho)$.

Aplicando las fórmulas (35), (32), (30), (34), (36), se puede escribir:

$$\chi_{nl}(\rho) = A_n \left(\frac{2\rho}{n}\right)^l e^{-\frac{\rho}{n}} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2\rho}{n}\right), \tag{40}$$

donde A_n es el factor de normalización, que se determina de la condición

$$\int_0^\infty \rho^2 \chi_{nl}^2(\rho)\, d\rho = 1. \tag{41}$$

Calculando A_n, se obtiene la siguiente expresión para las funcio nes radiales normalizadas:

$$\chi_{nl}(\rho) = \left(\frac{2}{n}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n\cdot(n+l)!}} \left(\frac{2\rho}{n}\right)^l e^{-\frac{\rho}{n}} L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2\rho}{n}\right). \quad (42)$$

En virtud de las fórmulas (26) y (19), las funciones propias normalizadas son de la forma

$$\psi_{mnl} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2\varepsilon_m\pi(l+m)!}} Y_l^{(m)}(\vartheta, \varphi)\chi_{nl}(\rho),$$

determinándose $\chi_{nl}(\rho)$ por la fórmula (42).

El número m ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$) se llama número cuántico magnético.

Como n_r no es negativo ($n_r = 0, 1, 2, \ldots$), para un n dado, en virtud de la fórmula

$$n = n_r + l + 1,$$

el número cuántico l no puede ser mayor que $n - 1$ ($l = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n - 1$). Por esto, para un valor determinado del número cuántico principal n, el número l puede tomar n valores: $l = 0, 1, \ldots, n - 1$, y a cada valor l le corresponden $2l + 1$ valores de m. De aquí se deduce que a un valor dado de la energía E_n, es decir, a un valor dado de n, le corresponden

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

funciones propias diferentes. De esta manera, cada nivel de energía tiene una degeneración de multiplicidad n^2.

El espectro discreto hallado de valores propios negativos de la energía E_n, está formado por un conjunto infinito de números, cuyo punto de acumulación es cero.

La segunda particularidad del problema estudiado para la ecuación de Schrödinger es la presencia de un espectro continuo de valores propios positivos (cualquier número positivo E es valor propio de la ecuación (23)). En este caso, el electrón ya no está ligado al núcleo, pero, de todas las formas, se encuentra en el campo de éste (átomo ionizado de hidrógeno). No nos detendremos en demostrar la existencia de un espectro continuo, recomendando al lector la bibliografía especializada [1]).

[1]) Véase, por ejemplo, V. A. Fok, *Principios de la Mecánica Cuántica*, 1932; R. Courant y D. Hilbert, *Métodos de la Física Matemática*, t. I, ed. Gostejizdat, 1951, cap. V.

IV PARTE

FORMULAS, TABLAS Y GRAFICAS

A continuación, se exponen las tablas de ciertas funciones especiales, que hemos encontrado en la resolución de los problemas de contorno de la física matemática. Las tablas van acompañadas por una lista de las propiedades más sencillas de las funciones especiales.

I. PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS FUNCIONES ESPECIALES

1. Integral de los errores

1. Integral de los errores:

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

2. Desarrollo para pequeñas z:

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(z-\frac{z^3}{1!\cdot 3}+\frac{z^5}{2!\cdot 5}-\ldots\right).$$

3. Fórmula asintótica para grandes z:

$$\Phi(z)\cong 1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-z^2}}{z}\left(1-\frac{1}{(2z)^2}+\frac{3\cdot 4}{(2z)^4}-\frac{4\cdot 5\cdot 6}{(2z)^6}+\ldots\right).$$

2. Funciones cilíndricas

Series	Fórmulas asintóticas
1. Funciones de Bessel	
$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}-\ldots$	$J_\nu(x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\ldots$
2. Funciones de Neumann	
$N_0(x)=\frac{2}{\pi}J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\ldots$	$N_0(x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\ldots$

($C = 0{,}5772156649015 32$ es la constante de Euler)

$$N_1(x) = -\frac{2}{\pi x} + \frac{2}{\pi} J_1(x)\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) + \ldots, \qquad N_1(x) \cong -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots,$$

$$N_n(x) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n (n-1)! + \ldots \quad (n > 1). \qquad N_n(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \ldots$$

3. Funciones de Hankel

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \qquad H_\nu^{(1)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} + \ldots$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \qquad H_\nu^{(2)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} + \ldots$$

4. Funciones de argumento imaginario

$$I_\nu(x) = (-i)^\nu J_\nu(ix) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} + \ldots \qquad I_\nu(x) \cong \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\, e^x + \ldots$$

$$K_0(x) = \frac{\pi}{2}\, iH_0^{(1)}(ix) = -\left(\ln\frac{x}{2} + C\right) I_0(x) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots \qquad K_0(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} + \ldots$$

$$K_1(x) = -\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(ix) = \frac{1}{x} + \ldots \qquad K_1(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} + \ldots$$

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2}\, e^{i\frac{\pi}{2}n} H_n^{(1)}(ix) = \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^n + \ldots \qquad K_n(x) \cong \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} + \ldots$$

5. Fórmulas de recurrencia:

$$\frac{d}{dx}[x^{\nu}Z_{\nu}(x)]=x^{\nu}Z_{\nu-1}(x),\qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{Z_{\nu}(x)}{x^{\nu}}\right]=-\frac{Z_{\nu+1}(x)}{x^{\nu}},$$

$$Z_{\nu-1}(x)+Z_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}Z_{\nu}(x),$$

donde $Z_{\nu}(x)$ es cualquier función cilíndrica de argumento real.

Casos particulares:

$$J_0'(x)=-J_1(x),\qquad \int_0^x J_1(x)\,dx=1-J_0(x),$$

$$\frac{d}{dx}[xJ_1(x)]=xJ_0(x),\qquad \int_0^x xJ_0(x)\,dx=xJ_1(x).$$

Para las funciones de argumento imaginario, se tiene:

$$I_{\nu-1}(x)-I_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}I_{\nu}(x),\qquad K_{\nu-1}(x)-K_{\nu+1}(x)=-\frac{2\nu}{x}K_{\nu}(x),$$

$$I_{\nu-1}(x)+I_{\nu+1}(x)=2\frac{d}{dx}I_{\nu}(x),\quad K_{\nu-1}(x)+K_{\nu+1}(x)=-2\frac{d}{dx}K_{\nu}(x).$$

$$I_0'(x)=I_1(x),\qquad K_0'(x)=-K_1(x).$$

6. El determinante de Wronsky para las funciones cilíndricas es

$$J_{\nu}(x)N_{\nu}'(x)-N_{\nu}(x)J_{\nu}'(x)=\frac{2}{\pi x},$$

$$H_{\nu}^{(1)}(x)H_{\nu}^{(2)\prime}(x)-H_{\nu}^{(2)}(x)H_{\nu}^{(1)\prime}(x)=-\frac{4i}{\pi x},$$

$$I_{\nu}(x)K_{\nu}'(x)-K_{\nu}(x)I_{\nu}'(x)=-\frac{1}{x}.$$

7. Fórmulas integrales:

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ix\operatorname{sen}\varphi+in\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\frac{(-i)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\cos\varphi+in\varphi}\,d\varphi=\frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^{\pi}e^{ix\cos\varphi}\cos n\varphi\,d\varphi,$$

$$H_{\nu}^{(1,2)}(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{C_{1,2}}e^{-ix\operatorname{sen}\varphi+i\nu\varphi}\,d\varphi,$$

donde los contornos de integración C_1 y C_2 están representados en la fig. 96,

$$K_\nu(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\,\mathrm{ch}\,\xi-\nu\xi}\,d\xi.$$

8. Funciones de orden semientero

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\mathrm{sen}\,x,$$

$$J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,$$

$$J_{3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}-\cos x\right),$$

$$J_{-3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\frac{\cos x}{x}-\mathrm{sen}\,x\right),$$

$$N_{n+\frac{1}{2}}(x)=(-1)^{n-1}J_{-n-\frac{1}{2}}(x).$$

3. Polinomios de Legendre

1. Función generatriz:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n P_n(x),\quad 0<\rho<1,\ -1\leqslant x\leqslant 1.$$

2. Fórmula de recurrencia:

$$(n+1)P_{n+1}(x)-x(2n+1)P_n(x)+nP_{n-1}(x)=0.$$

3. Fórmula de Rodrigo:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

4. Ecuación de los polinomios de Legendre:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0.$$

5. Fórmula integral:

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi)^n\,d\varphi,\qquad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

6. Cuadrado de la norma:

$$\|P_n\|^2=\int_{-1}^{+1}P_n^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}.$$

7.

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

4. Funciones adjuntas

1. Ecuación de las funciones adjuntas:

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right)y = 0.$$

2.

$$P_n^{(m)}(x) = (1 - x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x).$$

3.

$$\| P_n^{(m)} \|^2 = \int_{-1}^{+1} [P_n^{(m)}(x)]^2\,dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

5. Polinomios de Chebishov — Hermite

1. Función generatriz:

$$e^{2tx - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

2. Fórmulas de recurrencia:

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

3. Fórmula diferencial:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

4.

$$\| H_n \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} H_n^2(x)\,e^{-x^2}\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}.$$

6. Polinomios de Chebishov — Laguerre

1. Función generatriz:

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-x}}}{1 - t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,t^n.$$

2. Fórmula diferencial:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n).$$

3.

$$\| L_n(x) \|^2 = 1.$$

II. TABLAS

Tabla 1

Integral de los errores $\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha \qquad 0\leqslant z\leqslant 2{,}8$

z	Φ (z)	z	Φ (z)	z	Φ (z)	z	Φ (z)
0,00	0,0000	0,44	0,4662	0,88	0,7867	1,32	0,9381
0,01	0,0113	0,45	0,4755	0,89	0,7918	1,33	0,9400
0,02	0,0226	0,46	0,4847	0,90	0,7969	1,34	0,9419
0,03	0,0338	0,47	0,4937	0,91	0,8019	1,35	0,9438
0,04	0,0451	0,48	0,5027	0,92	0,8068	1,36	0,9456
0,05	0,0564	0,49	0,5117	0,93	0,8116	1,37	0,9473
0,06	0,0676	0,50	0,5205	0,94	0,8163	1,38	0,9490
0,07	0,0789	0,51	0,5292	0,95	0,8209	1,39	0,9507
0,08	0,0901	0,52	0,5379	0,96	0,8254	1,40	0,9523
0,09	0,1013	0,53	0,5465	0,97	0,8299	1,41	0,9539
0,10	0,1125	0,54	0,5549	0,98	0,8342	1,42	0,9554
0,11	0,1236	0,55	0,5633	0,99	0,8385	1,43	0,9569
0,12	0,1348	0,56	0,5716	1,00	0,8427	1,44	0,9583
0,13	0,1459	0,57	0,5798	1,01	0,8468	1,45	0,9597
0,14	0,1569	0,58	0,5879	1,02	0,8508	1,46	0,9611
0,15	0,1680	0,59	0,5959	1,03	0,8548	1,47	0,9624
0,16	0,1790	0,60	0,6039	1,04	0,8586	1,48	0,9637
0,17	0,1900	0,61	0,6117	1,05	0,8624	1,49	0,9649
0,18	0,2009	0,62	0,6194	1,06	0,8661	1,50	0,9661
0,19	0,2118	0,63	0,6270	1,07	0,8698	1,51	0,9673
0,20	0,2227	0,64	0,6346	1,08	0,8733	1,6	0,9763
0,21	0,2335	0,65	0,6420	1,09	0,8768	1,7	0,9838
0,22	0,2443	0,66	0,6494	1,10	0,8802	1,8	0,9891
0,23	0,2550	0,67	0,6566	1,11	0,8835	1,9	0,9928
0,24	0,2657	0,68	0,6633	1,12	0,8868	2,0	0,9953
0,25	0,2763	0,69	0,6708	1,1	0,8900	2,1	0,9970
0,26	0,2869	0,70	0,6778	1,14	0,8931	2,2	0,9981
0,27	0,2974	0,71	0,6847	1,15	0,8961	2,3	0,9989
0,28	0,3079	0,72	0,6914	1,16	0,8991	2,4	0,9993
0,29	0,3183	0,73	0,6981	1,17	0,9020	2,5	0,9996
0,30	0,3286	0,74	0,7047	1,18	0,9048	2,6	0,9998
0,31	0,3389	0,75	0,7112	1,19	0,9076	2,7	0,9999
0,32	0,3491	0,76	0,7175	1,20	0,9103	2,8	0,9999
0,33	0,3593	0,77	0,7238	1,21	0,9130		
0,34	0,3694	0,78	0,7300	1,22	0,9155		
0,35	0,3794	0,79	0,7361	1,23	0,9181		
0,36	0,3893	0,80	0,7421	1,24	0,9205		
0,37	0,3992	0,81	0,7480	1,25	0,9229		
0,38	0,4090	0,82	0,7538	1,26	0,9252		
0,39	0,4187	0,83	0,7595	1,27	0,9275		
0,40	0,4284	0,84	0,7651	1,28	0,9297		
0,41	0,4380	0,85	0,7707	1,29	0,9319		
0,42	0,4475	0,86	0,7761	1,30	0,9340		
0,43	0,4569	0,87	0,7814	1,31	0,9361		

Tabla 2

Valores de las funciones de Bessel de orden nulo y de primer orden desde $x = 0$ hasta $x = 12,00$

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$
0,00	+1,000	+0,000	4,00	−0,397	−0,066	8,00	+0,172	+0,235
0,10	+0,997	+0,050	4,10	−0,389	−0,103	8,10	+0,148	+0,248
0,20	+0,990	+0,099	4,20	−0,377	−0,139	8,20	+0,122	+0,258
0,30	+0,977	+0,148	4,30	−0,361	−0,172	8,30	+0,096	+0,266
0,40	+0,960	+0,196	4,40	−0,342	−0,203	8,40	+0,069	+0,271
0,50	+0,938	+0,242	4,50	−0,321	−0,231	8,50	+0,042	+0,273
0,60	+0,912	+0,288	4,60	−0,296	−0,257	8,60	+0,015	+0,273
0,70	+0,881	+0,329	4,70	−0,269	−0,279	8,70	−0,013	+0,270
0,80	+0,846	+0,369	4,80	−0,240	−0,298	8,80	−0,039	+0,264
0,90	+0,808	+0,406	4,90	−0,210	−0,315	8,90	−0,065	+0,256
1,00	+0,765	+0,440	5,00	−0,178	−0,328	9,00	−0,090	+0,245
1,10	+0,720	+0,471	5,10	−0,144	−0,337	9,10	−0,114	+0,232
1,20	+0,671	+0,498	5,20	−0,110	−0,343	9,20	−0,137	+0,217
1,30	+0,620	+0,522	5,30	−0,076	−0,346	9,30	−0,158	+0,200
1,40	+0,567	+0,542	5,40	−0,041	−0,345	9,40	−0,177	+0,182
1,50	+0,512	+0,558	5,50	−0,007	−0,341	9,50	−0,194	+0,161
1,60	+0,455	+0,570	5,60	+0,027	−0,334	9,60	−0,209	+0,140
1,70	+0,398	+0,578	5,70	+0,060	−0,324	9,70	−0,222	+0,117
1,80	+0,340	+0,582	5,80	+0,093	−0,311	9,80	−0,232	+0,093
1,90	+0,282	+0,581	5,90	+0,122	−0,295	9,90	−0,240	+0,068
2,00	+0,224	+0,577	6,00	+0,151	−0,277	10,00	−0,246	+0,043
2,10	+0,167	+0,568	6,10	+0,177	−0,256	10,10	−0,249	+0,018
2,20	+0,110	+0,556	6,20	+0,202	−0,233	10,20	−0,250	−0,007
2,30	+0,056	+0,540	6,30	+0,224	−0,208	10,30	−0,248	−0,031
2,40	+0,002	+0,520	6,40	+0,243	−0,182	10,40	−0,243	−0,055
2,50	−0,048	+0,497	6,50	+0,260	−0,154	10,50	−0,237	−0,079
2,60	−0,097	+0,471	6,60	+0,274	−0,125	10,60	−0,228	−0,101
2,70	−0,142	+0,442	6,70	+0,285	−0,095	10,70	−0,216	−0,122
2,80	−0,185	+0,410	6,80	+0,293	−0,065	10,80	−0,203	−0,142
2,90	−0,224	+0,375	6,90	+0,298	−0,035	10,90	−0,188	−0,160
3,00	−0,260	+0,339	7,00	+0,300	−0,005	11,00	−0,171	−0,177
3,10	−0,292	+0,301	7,10	+0,299	+0,025	11,10	−0,153	−0,191
3,20	−0,320	+0,261	7,20	+0,295	+0,054	11,20	−0,133	−0,204
3,30	−0,344	+0,221	7,30	+0,288	+0,083	11,30	−0,112	−0,214
3,40	−0,364	+0,179	7,40	+0,279	+0,110	11,40	−0,090	−0,222
3,50	−0,380	+0,137	7,50	+0,266	+0,135	11,50	−0,068	−0,228
3,60	−0,392	+0,095	7,60	+0,252	+0,159	11,60	−0,045	−0,232
3,70	−0,399	+0,054	7,70	+0,235	+0,181	11,70	−0,021	−0,233
3,80	−0,403	+0,013	7,80	+0,215	+0,201	11,80	+0,002	−0,232
3,90	−0,402	−0,027	7,90	+0,194	+0,219	11,90	+0,025	−0,229
						12,00	−0,048	−0,223

Tabla 3

Raíces sucesivas de la ecuación $J_0(\mu_n)=0$ y valores correspondientes $|J_1(\mu_n)|$

n	μ_n	$J_1(\mu_n)$	n	μ_n	$J_1(\mu_n)$
1	2,4048	0,5191	6	18,0711	0,1877
2	5,5201	0,3403	7	21,2116	0,1733
3	8,6537	0 2715	8	24,3525	0,1617
4	11,7915	0,2325	9	27,4935	0,1522
5	14,9309	0,2065	10	30,6346	0,1442

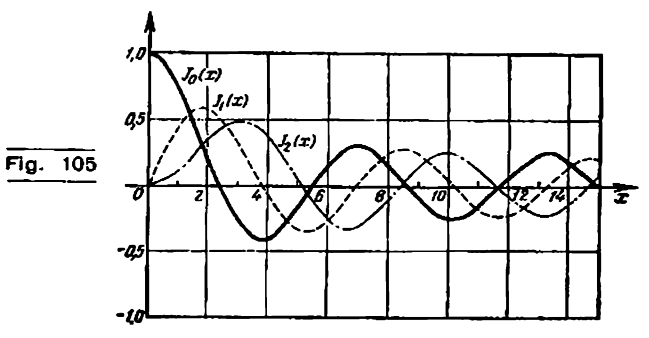
Tabla 4

Valores de las funciones $K_0(x)$ y $K_1(x)$

x	$K_0(x)$	$K_1(x)$	x	$K_0(x)$	$K_1(x)$
0,1	2,4271	9,8538	3,1	0,0310	0,0356
0,2	1,7527	4,7760	3,2	0,0276	0,0316
0,3	1,3725	3,0560	3,3	0,0246	0,0281
0,4	1,1145	2,1844	3,4	0,0220	0,0250
0,5	0,9244	1,6564	3,5	0,0196	0,0222
0,6	0,7775	1,3028	3,6	0,0175	0,0198
0,7	0,6605	1,0503	3,7	0,0156	0,0176
0,8	0,5653	0,8618	3,8	0,0140	0,0157
0,9	0,4867	0,7165	3,9	0,0125	0,0140
1,0	0,4210	0,6019	4,0	0,0112	0,0125
1,1	0,3656	0,5098	4,1	0,0098	0,0111
1,2	0,3185	0,4346	4,2	0,0089	0,0099
1,3	0,2782	0,3725	4,3	0,0080	0,0089
1,4	0,2437	0,3208	4,4	0,0071	0,0079
1,5	0,2138	0,2774	4,5	0,0064	0,0071
1,6	0,1880	0,2406	4,6	0,0057	0,0063
1,7	0,1655	0,2094	4,7	0,0051	0,0056
1,8	0,1459	0,1826	4,8	0,0046	0,0051
1,9	0,1288	0,1597	4,9	0,0041	0,0045
2,0	0,1139	0,1399	5,0	0,0037	0,0040
2,1	0,1008	0,1227	5,1	0,0033	0,0036
2,2	0,0893	0,1079	5,2	0,0030	0,0032
2,3	0,0791	0,0950	5,3	0,0027	0,0029
2,4	0,0702	0,0837	5,4	0,0024	0,0026
2,5	0,0623	0,0739	5,5	0,0021	0,0023
2,6	0,0554	0,0653	5,6	0,0019	0,0021
2,7	0,0492	0,0577	5,7	0,0017	0,0019
2,8	0,0438	0,0511	5,8	0,0015	0,0017
2,9	0,0390	0,0453	5,9	0,0014	0,0015
3,0	0,0347	0,0402	6,0	0,0012	0,0013

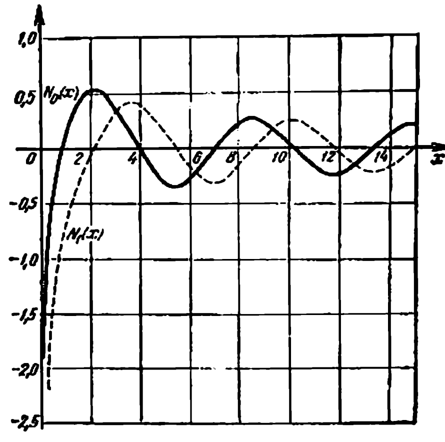
III. GRAFICAS DE LAS FUNCIONES ESPECIALES

Fig. 105



Gráficas de las funciones de Bessel $J_0(x)$, $J_1(x)$ y $J_2(x)$

Fig. 106



Gráficas de las funciones de Neuman $N_0(x)$ y $N_1(x)$

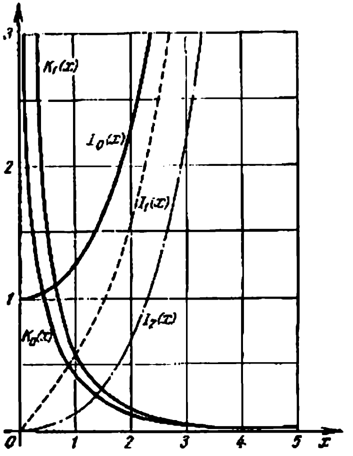


Fig. 107

Gráficas de las funciones cilíndricas de argumento imaginario $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$

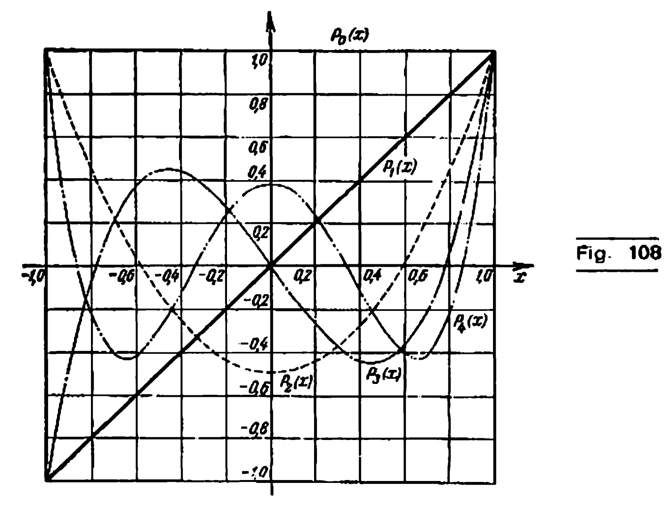


Fig. 108

Gráficas de los polinomios de Legendre

IV. DIFERENTES SISTEMAS ORTOGONALES DE COORDENADAS

Sean x, y, z las coordenadas cartesianas de cierto punto, y x_1, x_2, x_3, sus coordenadas ortogonales curvilíneas. El cuadrado del elemento de longitud se expresa por la fórmula

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2\,dx_1^2 + h_2^2\,dx_2^2 + h_3^2\,dx_3^2,$$

donde

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

son los coeficientes métricos, o coeficientes de Lamé. Un sistema de coordenadas ortogonales se caracteriza completamente por los tres coeficientes métricos h_1, h_2, h_3.

Escribamos la expresión general para los operadores grad, div, rot, Δ, en un sistema ortogonal de coordenadas curvilíneas:

$$\operatorname{grad} u = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{h_j} \frac{du}{dx_j} i_j,$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 h_2 A_3)\right],$$

$$\operatorname{rot} A = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1 i_1 & h_2 i_2 & h_3 i_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\right],$$

donde i_1, i_2, i_3 son los vectores unitarios de base, $A = (A_1, A_2, A_3)$ es un vector arbitrario y u, un escalar.

1. Coordenadas rectangulares:

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ h_1 = 1,\ h_2 = 1,\ h_3 = 1.$$

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j + \frac{\partial u}{\partial z} k, \quad \operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) i + \ldots,$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

siendo i, j y k los vectores directores unitarios de los ejes x, y, z.

2. Las coordenadas cilíndricas:

$$x_1 = r, \; x_2 = \varphi, \; x_3 = z$$

están relacionadas con las rectangulares por las ecuaciones

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\operatorname{sen}\varphi, \quad z = z.$$

Las superficies coordenadas son: $r =$ const, cilindros; $\varphi =$ $=$ const, planos; $z =$ const, planos.

Los coeficientes métricos son iguales a

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1,$$

de forma que

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} i_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} i_2 + \frac{\partial u}{\partial z} i_3,$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_3}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} A = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) i_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial r}\right) i_2 + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_2) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi}\right] i_3,$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3. Las coordenadas esféricas

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x = \varphi$$

están ligadas a las rectangulares por las fórmulas

$$x = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \quad y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Las superficies coordenadas son: esferas concéntricas, $r = \text{const}$; planos, $\varphi = \text{const}$; conos, $\theta = \text{const}$.

Los coeficientes métricos son iguales a

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \operatorname{sen} \theta,$$

de modo que

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r} i_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} i_2 + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} i_3,$$

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_1) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta A_2) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_3}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot} A = \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left[\frac{\partial}{\partial A} (\operatorname{sen} \theta A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial \varphi} \right] i_1 + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial r} (r A_3) \right] i_2 + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right] i_3,$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

4. Las coordenadas elípticas

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = z$$

se definen mediante las fórmulas de transformación

$$x = c\lambda\mu, \quad y = c \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \quad z = z,$$

donde c es un factor de escala.

Los coeficientes métricos son iguales a

$$h_1 = c \sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \qquad h_2 = c \sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \qquad h_3 = 1.$$

Las superficies coordenadas son: $\lambda = \text{const}$, cilindros de sección elíptica, con focos en los puntos $x = \pm c$, $y = 0$; $\mu = \text{const}$, una familia de cilindros hiperbólicos cofocales; $z = \text{const}$, planos.

5. Coordenadas parabólicas.

Si, r, θ son las coordenadas polares de un punto en el plano, las coordenadas parabólicas pueden ser introducidas mediante

las fórmulas

$$x_1 = \lambda = \sqrt{2r}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}, \quad x_2 = \mu = \sqrt{2r}\cos\frac{\theta}{2}, \quad x_3 = z.$$

Las superficies coordenadas $\lambda = \text{const}$ y $\mu = \text{const}$ son cilindros parabólicos que se cortan, de generatrices paralelas al eje z. El nexo con las coordenadas cartesianas lo dan las fórmulas

$$x = \frac{1}{2}(\mu^2 - \lambda^2), \quad y = \lambda\mu, \quad z = z.$$

Los coeficientes métricos son $h_1 = h_2 = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $h_3 = 1$.

6. Coordenadas elipsoidados.

Se introducen mediante las ecuaciones $(a > b > c)$:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1 \; (\lambda > -c^2)$$ (ecuación de un elipsoide),

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1 \; (-c^2 > \mu > -b^2)$$ (ecuación de un hiperboloide de una hoja),

$$\frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1 \; (-b^2 > \nu > -a^2)$$ (ecuación de un hiperboloide de dos hojas).

A cada punto (x, y, z) le corresponde sólo un sistema de valores λ, μ, ν. Los parámetros $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$, $x_3 = \nu$ se llaman, precisamente, coordenadas elipsoidales. Las coordenadas x, y, z se expresan en forma explícita mediante λ, μ, ν:

$$x = \pm\sqrt{\frac{(\lambda + a^2)(\mu + a^2)(\nu + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}},$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{(\lambda + b^2)(\mu + b^2)(\nu + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)}},$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{(\lambda + c^2)(\mu + c^2)(\nu + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}},$$

Los coeficientes de Lamé son iguales a

$$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{R^2(\lambda)}}, \quad h_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{R^2(\mu)}},$$

$$h_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{R^3(\nu)}},$$

donde

$$R(s) = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)} \quad (s = \lambda, \mu, \nu).$$

El operador de Laplace se puede representar en la forma

$$\Delta u = \frac{4}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\left[(\mu-\nu)R(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(R(\lambda)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)+\right.$$

$$\left.+(\nu-\lambda)R(\mu)\frac{\partial}{\partial\mu}\left(R(\mu)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)+(\lambda-\mu)R(\nu)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(R(\nu)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\right].$$

La solución particular de la ecuación de Laplace, que depende sólo de λ, $U = U(\lambda)$, se expresa por la fórmula

$$U = A\int\frac{d\lambda}{R(\lambda)} + B,$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

7. Coordenadas elipsoidales degeneradas.

a) Las coordenadas elipsoidales degeneradas (α, β, φ) para un elipsoide oblongo de revolución, se definen por las fórmulas

$$x = c \operatorname{sen}\beta\cos\varphi, \quad y = c \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\varphi, \quad z = c \operatorname{ch}\alpha\cos\beta,$$

donde c es un factor de escala, $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Las superficies coordenadas son: elipsoides oblongos de revolución, $\alpha = \text{const}$; hiperboloides de dos hojas de revolución, $\beta = \text{const}$; planos, $\varphi = \text{const}$.

El cuadrado del elemento de longitud se da por la expresión

$$ds^2 = c^2(\operatorname{sh}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta)(d\alpha^2 + d\beta^2) + c^2\operatorname{sh}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta\, d\varphi^2,$$

de donde se obtienen, para los coeficientes métricos, los valores

$$h_1 = h_2 = c\sqrt{\operatorname{sh}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta}, \quad h_3 = h_\varphi = c\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

La ecuación de Laplace tiene la forma

$$\Delta u=\frac{1}{c^2(\operatorname{sh}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\beta)}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\operatorname{sen}\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha}+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]=0.$$

b) El sistema de coordenadas elipsoidales degeneradas (α, β, φ) para un elispoide achatado de rotación se determina mediante las igualdades

$$x=c\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\varphi,\quad y=c\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\varphi,\quad z=c\operatorname{ch}\alpha\cos\varphi,$$

$$0\leqslant\alpha<\infty,\ 0\leqslant\beta\leqslant\pi,\ -\pi<\varphi\leqslant\pi.$$

Las superficies coordenadas son: elipsoides achatados de revolución, $\alpha=\text{const}$; hiperboloides de una hoja de revolución, $\beta=\text{const}$; planos que pasan por el eje z, $\varphi=\text{const}$.

El cuadrado del elemento lineal y el operador de Laplace en el sistema considerado de coordenadas tienen la forma

$$ds^2=c^2(\operatorname{ch}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta)(d\alpha^2+d\beta^2)+c^2\operatorname{ch}^2\alpha\operatorname{sen}^2\beta\,d\varphi^2,$$

$$\Delta u=\frac{1}{c^2(\operatorname{ch}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\beta)}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{ch}\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\operatorname{sen}\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}-\frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].$$

8. Coordenadas toroidales.

El sistema de coordenadas toroidales (α, β, φ) se define mediante las fórmulas

$$x=\frac{c\operatorname{sh}\alpha\cos\varphi}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta},\quad y=\frac{c\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta},\quad z=\frac{c\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta},$$

donde c es un factor de escala, $0\leqslant\alpha<\infty$, $-\pi<\beta\leqslant\pi$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$.

Las superficies coordenadas son toros, $\alpha=\text{const}$:

$$(\rho-c\operatorname{cth}\alpha)^2+z^2=\left(\frac{c}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^2\quad(\rho=\sqrt{x^2+y^2});$$

esferas, β = const:

$$(z - c\,\mathrm{ctg}\,\beta)^2 + \rho^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sen}\beta}\right)^2;$$

planos, φ = const.

La expresión para el cuadrado del elemento lineal tiene la forma

$$ds^2 = \frac{c^2}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^2}\,[d\alpha^2 + d\beta^2 + \operatorname{sh}^2\alpha\, d\varphi^2];$$

los coeficientes métricos son iguales a

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{c}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad h_\varphi = \frac{c\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta},$$

y el operador de Laplace se da por la siguiente expresión:

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \\ + \frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Resulta cómodo introducir, en lugar de u, la nueva función v, mediante la relación

$$u = \sqrt{2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\beta}\cdot v,$$

en este caso, la ecuación $\Delta u = 0$ se reduce a la ecuación

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + v_\alpha \operatorname{cth}\alpha + \frac{1}{4}v + \frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha} v_{\varphi\varphi} = 0.$$

9. Coordenadas bipolares.

a) Coordenadas bipolares en el plano. Las variables

$$x_1 = \alpha, \; x_2 = \beta, \; x_3 = z$$

se llaman coordenadas bipolares, si tienen lugar las igualdades

$$x = \frac{a\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad y = \frac{a\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \quad z = z.$$

Los coeficientes métricos son iguales a $h_1 = h_2 = \frac{a}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}$, $h_3 = 1$.

b) Las coordenadas biesféricas $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \varphi$ se definen por las fórmulas

$$x = \frac{c \operatorname{sen} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad y = \frac{c \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad z = \frac{c \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha},$$

donde c es un factor constante, $0 \leqslant \alpha < \beta$, $-\infty < \beta < \infty$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Estas fórmulas se pueden representar en forma compacta:

$$z + i\rho = ci \operatorname{ctg} \frac{\alpha + i\beta}{2} \qquad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Las superficies coordenadas son: superficies husiformes de revolución, $\alpha = \text{const}$:

$$(\rho - c \operatorname{ctg} \alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sen} \alpha}\right)^2;$$

esferas, $\beta = \text{const}$:

$$\rho^2 + (z - c \operatorname{ctg} \beta)^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh} \beta}\right)^2$$

planos, $\rho = \text{const}$.

La expresión para el cuadrado del elemento lineal, en coordenadas bipolares espaciales, tiene la forma

$$ds^2 = \frac{c^2}{(\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha)^2} [d\alpha^2 + d\beta^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha \, d\varphi^2],$$

de donde se deduce que

$$h_1 = h_2 = \frac{c}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad h_3 = \frac{c \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha},$$

y la ecuación de Laplace adquiere la forma

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \frac{\partial u}{\partial \beta}\right) + \\ + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha (\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha)} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

En la resolución de la ecuación de Laplace, es conveniente el cambio

$$u = \sqrt{2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha} \, v.$$

Entonces, para la función v se obtiene la ecuación

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + v_\alpha \operatorname{ctg} \alpha - \frac{1}{4} v + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha} v_{\varphi\varphi} = 0.$$

10. Coordenadas esferoidales.

a) Coordenadas esferoidales oblongas:

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \varphi,$$

$$x = c\lambda\mu, \; y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \cos\varphi, \; z = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \operatorname{sen}\varphi,$$

$$\lambda \geqslant 1, \; -1 \leqslant \mu \leqslant 1, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \; h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \; h_3 = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}.$$

b) Coordenadas esferoidales achatadas:

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \varphi,$$

$$x = c\lambda\mu \operatorname{sen}\varphi, \; y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \; z = c\lambda\mu\cos\varphi.$$

Las superficies $\lambda = \text{const}$ son esferoides achatados; las $\mu = \text{const}$, hiperboloides de una hoja. Los coeficientes métricos son

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda^2 - 1}}, \; h_2 = c\sqrt{\frac{\lambda^2 - \mu^2}{1 - \mu^2}}, \; h_3 = c\lambda\mu.$$

11. Coordenadas paraboloidales. Las variables

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = \varphi,$$

determinadas por las relaciones

$$x = \lambda\mu\cos\varphi, \quad y = \lambda\mu \operatorname{sen}\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2),$$

se llaman coordenadas paraboloidales. Los coeficientes métricos son iguales a $h_1 = h_2 = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $h_3 = \lambda\mu$.

Las superficies coordenadas $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ son paraboloides de revolución, con eje de simetría Oz.
